ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 64.

DER GANZEN REIHE 369. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN,
E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER FIGURENTAFEL.

LEIPZIG, 1921.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

S.

Amn 7d.
9E.S.
485

WITHDRAWN
from
COLLEGE
LIBRARY
223945

Inhalt.

Vierte Folge. Band 64.

Erstes und zweites Heft. Seite

1. W. C. Röntgen. Über die Elektrizitätsleitung in einigen Kristallen und über den Einfluß einer Bestrahlung darauf . . . 1
2. B. Pogány. Weitere Untersuchungen über den Faradayeffekt nicht ferromagnetischer Metalle 196

Ausgegeben am 20. Januar 1921.

Drittes Heft.

1. Richard Gans und Ramón G. Loyarte. Die Permeabilität des Nickels für schnelle elektrische Schwingungen. (Nach Messungen von Loyarte.) 209
2. Richard Gans. Die Permeabilität des Nickels für kurze Hertzsche Wellen und die Messungen von Arkadiew . . 250
3. P. P. Ewald. Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale 253
4. Thea Krüger. Über die Ionisierungsarbeiten und die Dissoziationsarbeit des Wasserstoffs 288

Ausgegeben am 9. Februar 1921.

Viertes Heft.

1. W. Jaeger und H. v. Steinwehr. Die Wärmekapazität des Wassers zwischen 5° und 50° in internationalen Wattsekunden 305
2. Albert Schultz. Spektralanalytische Beobachtungen an den Kanal- und Kathodenstrahlen des positiven Spitzenstroms in Sauerstoff und Stickstoff 367
3. Wilhelm Geiss. Grundschwingung und Oberschwingungen einlagiger Spulen 377

Ausgegeben am 24. Februar 1921.

Fünftes Heft.

Seite

1. Hans Busch. Über die Erwärmung von Drähten in verdünnten Gasen durch den elektrischen Strom 401
2. H. F. Mayer. Über das Verhalten von Molekülen gegenüber freien langsamen Elektronen 451

Ausgegeben am 10. März 1921.

Sechstes Heft.

1. Richard Gans. Dielektrizitätskonstante und elektrische Doppelbrechung 481
2. Carl Ramsauer. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen 513
3. R. Glocker und M. Kaupp †. Atomstruktur und Streustrahlung 541
4. Max Kirn. Die Dispersion des Wasserstoffs im Ultraviolett 566

Ausgegeben am 31. März 1921.

Siebentes Heft.

1. Ernst Reichenbächer. Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld in einer elektrizitätsfreien Welt 577
2. B. Wwedensky. Über die Wirbelströme bei der spontanen Änderung der Magnetisierung 609
3. Richard Gans. Über die reversible magnetische Permeabilität. Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Fritz Erhardt 621
4. A. Becker und H. Holthusen. Über die Trägererzeugung hochfrequenter Wellenstrahlung in abgeschlossenen Gasräumen 625
5. Karl F. Herzfeld. Zur kinetischen Theorie des osmotischen Druckes 646
6. W. Seitz. Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen. (III. Teil.) 661
7. W. Hahnemann und H. Hecht. Entgegnung auf die Bemerkung von M. Wien zu unserer Arbeit: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“ 671

Ausgegeben am 19. April 1921.

Achtes Heft.

Seite

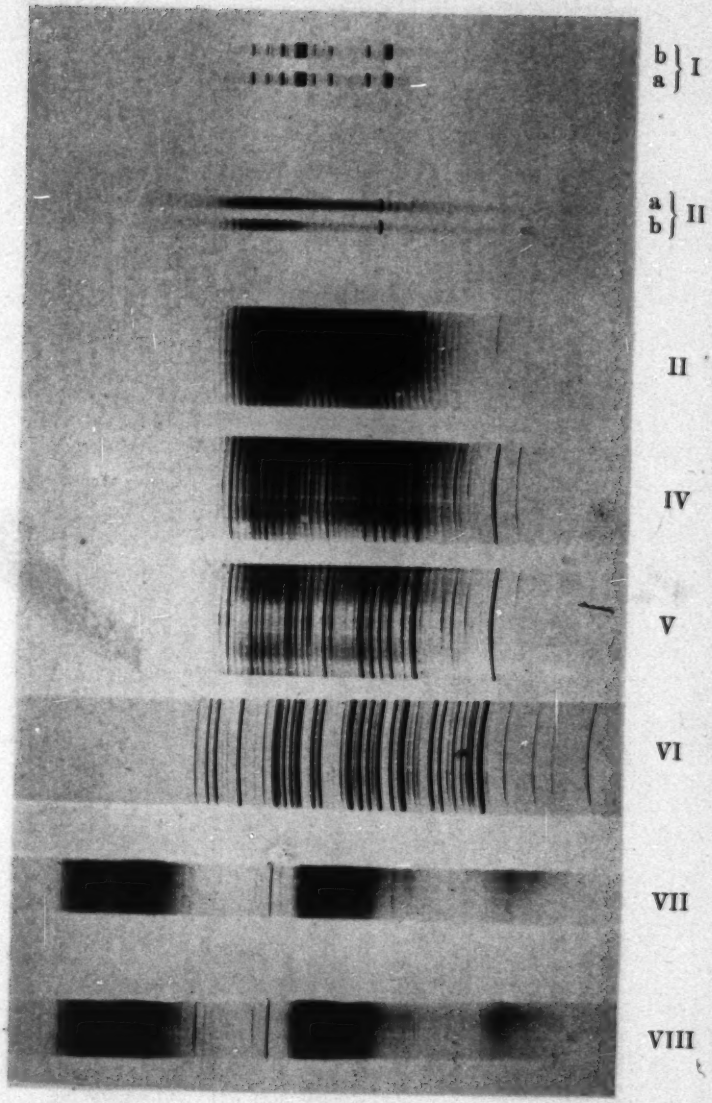
1. W. Steubing. Zur Kenntnis des Jodmoleküls und der Emission seines Bandenspektrums. (Hierzu Tafel I.) 673
2. W. Bothe. Zur Molekulartheorie der Brechung, Reflexion, Zerstreuung und Extinktion 693
3. Ferdinand Schmidt. Über die Dielektrizitätskonstanten der Phosphore und die absoluten Wellenlängen ihrer Dauererregungsverteilungen 713
4. Georg Jaffé. Zur Theorie der Vakuumentladung 733
5. J. E. Lilienfeld. Bemerkung zu Hrn. G. Jaffés vorstehender Arbeit: „Zur Theorie der Vakuumentladung“ 745
6. C. Ramsauer. Die lichtelektrische Wirkung unterteilter Lichtquanten 750
7. Al. Nasarischwily. Über eine neue Methode der Erzeugung elektromagnetischer ungedämpfter Schwingungen, welche in der Verwendung der elektrostatischen oder magnetischen Eigenschaften der Kathodenstrahlen zu schnellsten Stromunterbrechungen besteht 759

Ausgegeben am 29. April 1921.

Nachweis zu der Figurentafel.

Tafel I. W. Steubing.

Spektraltafel.



W. Steubing.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

1921. № 1 u. 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Über die Elektrizitätsleitung in einigen Kristallen und über den Einfluß einer Bestrahlung darauf;*

von W. C. Röntgen.

Zum Teil in Gemeinschaft mit A. Joffé.

Zweiter Teil.[1])

Bei der mit Hrn. Joffé seiner Zeit angefangenen Untersuchung über den Einfluß einer X-Bestrahlung auf die Leitfähigkeit von Dielektrika wurden außer Kalkspat und Quarz eine Anzahl von verschiedenen Substanzen einer Prüfung unterworfen. Es zeigte sich u. a., daß Steinsalz und einige andere Körper nicht in ähnlicher Weise von X-Strahlen beeinflußt wurden wie Kalkspat, indem ihre Leitfähigkeit im Dunkeln nur verhältnismäßig wenig durch eine Bestrahlung erhöht werden konnte. Dagegen ergab sich auffallenderweise — auch im Gegensatz zum Verhalten des Kalkspats —, daß das Steinsalz durch X-Bestrahlung für Licht empfindlich zu machen war, indem seine Leitfähigkeit nach Bestrahlung bei Tageslicht wesentlich größer erschien als im Dunkeln. Diese Erscheinung ist dann später ausführlich untersucht worden, und ich erlaube mir im folgenden das Ergebnis, sowie das von sich anschließenden Versuchen mitzuteilen.

Um die Veränderung, die das Steinsalz durch Bestrahlung erfährt, genauer kennen zu lernen, hielt ich es für nötig, zunächst einmal über die Leitfähigkeit des unbestrahlten Steinsalzes eigene Erfahrungen zu sammeln; zwar liegen über diesen Gegenstand Untersuchungen vor von den Herren Curie

1) Der erste Teil dieser Veröffentlichung wurde in Ann. d. Phys. 41. S. 449. 1913 abgedruckt. Die meisten Teile der Versuchsanordnung, die auch fernerhin im wesentlichen beibehalten wurde, sind dort beschrieben. Von den mit Kalkspat erhaltenen Versuchsergebnissen ist ein kurzer, unvollständiger Bericht in den Sitzungsberichten der bayer. Akademie 1907. S. 113 gegeben. Über das Verhalten des Quarzes findet sich Einiges in der Dissertation von A. Joffé, München 1905 und in Ann. d. Phys. 20. S. 964. 1906.

und Braun, doch schienen mir diese Untersuchungen für unsere Zwecke nicht ausreichend zu sein, und außerdem hegte ich anfänglich die Hoffnung, über das Wesen der sogenannten Leitung im Steinsalz Aufschluß zu erhalten. Diese Hoffnung hat sich aber leider kaum erfüllt. In Anbetracht dieser Sachlage habe ich eine Zeitlang geschwankt, ob ich über diesen Teil der Untersuchung — Verhalten des unbestrahlten farblosen Steinsalzes im elektrischen Felde —, die sehr viel Zeit in Anspruch genommen hat, überhaupt eine ausführliche Mitteilung veröffentlichen sollte oder nicht. Allein die Überlegung, daß der Leser doch mit den Schwierigkeiten der Versuche und den darin verbliebenen Unsicherheiten bekannt sein muß, um die Zuverlässigkeit der Versuche mit X-bestrahltem und mit natürlich gefärbtem NaCl, die den bedeutendsten Teil der im folgenden mitgeteilten Untersuchungen bilden, beurteilen zu können, hat mich zu einer Veröffentlichung bestimmt. Gerade bei den Versuchen mit unbestrahltem NaCl ließen sich jene Schwierigkeiten am besten erkennen. Auch für spätere Untersuchungen über diesen Gegenstand liefern meine Erfahrungen m. E. einige nützliche Winke.

Untersuchung von unbestrahltem, farblosem Steinsalz.

Ich wähle für diese Veröffentlichung aus den vielen Versuchsreihen zunächst eine, die sich zu dem angegebenen Zweck am besten eignet; sie dehnt sich über einige Jahre aus und ist mit ein und derselben Platte ausgeführt. Zunächst sei etwas allgemeines über Versuchsordnung usw. mitgeteilt.

Aus den früheren Arbeiten über die Leitfähigkeit des NaCl war bekannt, daß das ungefärbte NaCl, wie es in der Natur vorkommt, jedenfalls ein ungemein schlechter Leiter ist (Braun gibt für den spezifischen Widerstand parallel der Würfelnormale den Wert $1{,}25 \cdot 10^{17}$ Ohm/cm bei 18° an), dementsprechend war bei einer mit verbesserten Mitteln zu unternehmenden Fortsetzung dieser Versuche dafür zu sorgen, daß ein genügend hohes, konstantes Spannungsgefälle zur Verfügung stand, was durch Anwendung von 0,2—0.3 cm dicken fehlerfreien Steinsalzplatten und einer Bornhäuserschen Hochspannungsbatterie auch erreicht wurde. Da die früher beschriebene[1]) Anordnung zur Aufnahme der Kristallplatte

1) a. a. O., S. 456.

beibehalten blieb, konnte keine Platte verwendet werden, deren Kantenlänge größer als etwa 3 cm war; die größte benutzte Fläche der unteren mit Schutzring versehenen, mit dem Elektrometer zu verbindenden Elektrode betrug deshalb nicht mehr als etwa 3 qcm. Diese Belegung wurde bei der größeren Anzahl von Versuchen dadurch hergestellt, daß die mit Bimstein und absolutem Alkohol auf matter Glastafel fein matt geschliffene und darauf mit hartem Pinsel gut abgestäubte Steinsalzfläche mit Graphit (Bleistift Harthmuth H. B.) sorgfältig und möglichst gleichmäßig bis auf einen etwa 0,02 cm breiten kreisförmigen Isolierstreifen, dessen Grenzen mit härterem Bleistift nachgezogen wurden, eingerieben wurde. Kontaktfehler an diesen Graphitbelegungen haben sich zwar nicht bemerkbar gemacht, eine Betrachtung der graphitierten Fläche mit der Lupe ließ aber doch den Verdacht aufkommen, daß sie vielleicht nicht genügend vollständig bedeckt sei. Es wurde deshalb später bei einigen Platten durch Kathodenbestäubung eine Silberbelegung hergestellt (vgl. unten S. 37). Da diese Belegung keine anderen Ergebnisse für die Leitfähigkeit lieferte als eine entsprechende Graphitbelegung, wurde die einfachere, beschriebene Art häufig beibehalten.

Die obere, zur Aufnahme der Hochspannung bestimmte Belegung konnte nicht immer aus Graphit bestehen, weil sie manchmal für Licht und zwar für einen großen Bereich der Strahlen des Spektrums durchlässig sein sollte. Mit bestem Erfolg wurde reines Glyzerin verwendet, das durch längeres Stehen und häufiges Umschütteln mit Chlornatrium gesättigt war, um zu vermeiden, daß etwas von der Steinsalzplatte im Laufe der langen Versuchsdauer aufgelöst wurde. Welche Bedeutung eine solche Auflösung, ein Dünnerwerden und die dadurch bewirkte Kapazitätsvermehrung der Platte für die Versuche haben könnte, geht aus folgendem Beispiel hervor. Das Anlegen einer Spannung von etwa 2 Volt lieferte bei einer 0,2 cm dicken Platte eine Menge Influenzelektrizität, die sich an dem mit der unteren Belegung verbundenen Elektrometer durch einen Ausschlag von etwa 10 Skalenteilen bemerkbar machte. Bei der Untersuchung auf Leitfähigkeit wurde die Platte mit etwa 1500 Volt Spannung geladen und es war erwünscht, noch einen in 4—5 Minuten auftretenden durch Leitung verursachten Elektrometerausschlag von

0,2 Skalenteilen einigermaßen sicher beobachten zu können; dann dürfte sich aber, wie eine einfache Rechnung zeigt, in dieser Zeit die Dicke der Platte nicht um 50 $\mu\mu$ ändern. Ich fand in dem reichlich vorhandenen Beobachtungsmaterial keinen Fall, wo derartige störende Dickenänderungen vorgekommen wären.

Zur Aufnahme der Glyzerin-Salzlösung diente ein niedriges von einem Reagenzglas abgesprengtes Glaszylinderchen, das auf der Steinsalzplatte aufgekittet war. Um dieses Aufkitten zu bewerkstelligen, wurde das Zylinderchen zuerst mit seinem untern Rand in flüssigem Kolophoniumwachskitt möglichst wenig eingetaucht und dann nach Abkühlung auf die Steinsalzplatte gesetzt. Beide zusammen kamen dann auf einer Glasplatte zu liegen, die über einer Spirituslampe so weit erwärmt wurde, bis der Kitt gleichmäßig geschmolzen war. Der kleine, am inneren Rand vorhandene Kittwulst wurde nach Abkühlung sorgfältig zuerst mit dem Messer und dann mittels Chloroform entfernt, was sich als sehr nötig erwiesen hatte, um bei der Ladung elektrische Nachwirkungserscheinungen zu vermeiden. In dieser Weise hergestellte Steinsalzpräparate ließen sich viele Monate lang in einem mittels Schwefelsäure getrockneten Exsikkator für einen sofortigen Gebrauch verwendbar aufbewahren. Nebenstehende Fig. 1 verdeutlicht die beschriebene Anordnung. Die Weite des Glasringes betrug bei den beschriebenen Versuchen zuerst 2,55 cm, später 2,85 cm.

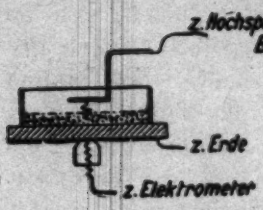


Fig. 1.

Bezüglich der durch den zwischen Schutzring und zentraler Belegung vorhandenen unbedeckt gebliebenen Streifen bewerkstelligten Isolation ist zu bemerken, daß dieselbe vorzüglich, sogar besser als die von einigen Teilen des Elektrometers war, wenn das unbestrahlte und nicht beleuchtete Steinsalzpräparat sich eine genügend lange Zeit in dem zwei mit H_2SO_4 gefüllte Gefäße enthaltenden, zu den Leitungsversuchen verwendeten Zinkkästchen befunden hatte.

Als Versuchsmaterial dienten Steinsalzplatten von sehr verschiedener Herkunft. Alle Flächen waren bei jeder Platte, mit Ausnahme von einer, zu den allerletzten Versuchen ver-

wendeten, senkrecht zu den Oktaederflächen geschliffenen, parallel der Würfelnormale orientiert. In bezug auf ihre Homogenität und Reinheit ist folgendes zu erwähnen. Bei der Untersuchung von anscheinend klaren Steinsalzstücken mit konzentriertem Bogenlicht erkennt man in manchen wolkige Trübungen oder auch kleine Stellen, die durch Reflexion hell aufleuchten und die meistens in ebenen Flächen angeordnet sind; solche Stücke sind natürlich nicht zu verwenden. Die maßgebendsten Versuche, und nur über solche soll hier berichtet werden, wurden mit von Hrn. Steeg und Reuter bezogenen, vor ihrer Belegung hochpolierten und bei der optischen Prüfung fehlerfrei befundenen Platten erster Qualität angestellt. Inwieweit auch solche vorzügliche Präparate wirklich völlig homogen und chemisch rein sind, entzieht sich der Beobachtung. Daß derartige Materialfehler die Versuchsergebnisse recht beeinflussen können, möchte ich aus der Wahrnehmung schließen, daß Steinsalzplatten, die wir aus vorhandenem, nicht besonders sorgfältig vorher geprüftem Material selbst abgespaltet hatten, häufig quantitativ verschiedene Resultate lieferten. Im folgenden kommen hauptsächlich Versuche mit drei verschiedenen Platten ausführlich zur Sprache, die als alte, neue und neueste Platte bezeichnet werden sollen.

Die verwendeten Apparate und ihre Anordnung wurden in der Hauptsache a. a. O. beschrieben. Eine wesentliche Verbesserung bestand darin, daß jetzt alle im großen Blechkasten untergebrachten Leitungen und Wippen noch in besonderen geerdeten Metallhüllen untergebracht waren, wobei wieder ausnahmslos hartes Paraffin als Isolationsmaterial zur Verwendung kam.

Ich führe nun gleichzeitig als Beispiel für die folgenden Versuche in etwas ausführlicher Weise, aber immerhin noch im Auszug einen mit der vorhin kurz erwähnten „alten" Steinsalzplatte angestellten Versuch an.

Die klare, polierte, optisch fehlerfreie, fast vollkommen optisch isotrope Steinsalzplatte, die seit Jahren meines Wissens nur zu Versuchen über Wärmestrahlung gebraucht und jedenfalls absichtlich nicht einer X-Strahlung ausgesetzt worden war, wurde mit den oben beschriebenen Belegungen versehen; ihre Dimensionen waren: Breite und Länge etwa 3 cm, Dicke 0,21

bis 0,22 cm. Die untere Fläche war bis auf einen zentralen Ring von 2,15 cm innerem und 2,18 cm äußerem Durchmesser mit Graphit sorgfältig überzogen. Das Glyzerinkochsalzlösung enthaltende aufgekittete Gläschen hatte einen Durchmesser von 2,55 cm. Nachdem die Platte in der früher angegebenen Weise mit ihrer Fassung versehen in einem der beiden Zinkkästchen aufgestellt und mit den nötigen elektrischen Leitungen verbunden worden war, blieb sie mit ihren Belegungen zur Erde abgeleitet mehrere Stunden zum Zweck des Abtrocknens ohne weitere Beanspruchung stehen. In dieser Zwischenzeit wurde die Elektrometernadel auf die richtige Spannung gebracht, was besonders stets recht frühzeitig geschehen mußte, damit die Spannung während des eigentlichen Versuchs genügend unverändert blieb, sonst traten leicht unliebsame kleine Nullpunktsverlegungen der Nadel während des Versuchs auf. Um kleine, durch thermische Wirkungen hervorgebrachte Nullpunktsverschiebungen zu vermeiden, wurde die den Lichtzeiger auf der Skala erzeugende Einfadenlampe einige Zeit vor dem Versuch angezündet, und um den Fehler einer kleinen elastischen Nachwirkung der Elektrometernadelaufhängung zu vermeiden, fand auch die Bestimmung der Elektrometerempfindlichkeit — durch Anlegen eines Normalelements an die Leitung (a. a. O. S. 461) — sowie die gleich nachfolgende Prüfung der Isolation des Isolierringes der Platte — durch Bestimmung der in 2 Minuten stattfindenden Abnahme des durch das Normalelement erzeugten Ausschlages bei Ableitung der oberen Plattenelektrode zur Erde — entweder etwas längere Zeit vor dem eigentlichen Versuch oder erst nach Beendigung desselben statt. Im Falle eine neue Platte oder eine Platte mit veränderter Belegung zur Verwendung kam, wurde noch der Elektrometerausschlag bestimmt, der infolge von Influenz beim Anlegen einer bekannten Spannung an die obere Plattenelektrode bzw. beim Entfernen von ihr entstand. Er betrug für die besprochene Platte für 1 Volt 5,12 Skalenteile. Kurz vor dem Versuch fand die Bestimmung der Plattentemperatur durch Ablesen des am Kästchen angebrachten Thermometers statt; dieselbe Bestimmung wurde am Schluß des Versuchs wiederholt. Schließlich mußte noch, wenn möglich, jedesmal vor Anfang der Bestimmung der Leitfähigkeit (L.-F.) der sogenannte

selbständige Gang des Elektrometers, d. h. die Bewegung dessen Lichtzeigers beobachtet werden, die auftritt, wenn die Erdleitung des mit der Steinsalzplatte zu verbindenden Quadrantenpaares aufgehoben wird (vgl. a. a. O. S. 464 und weiter unten in dieser Mitteilung), und zwar das eine Mal ohne, das zweitemal mit Zuschaltung dieser Platte, deren obere Belegung zur Erde abgeleitet ist. Bei der Auswertung der Beobachtung über die L.-F. wurde angenommen, daß die letztere Bewegung sich einfach in vollem Betrage zu den bei jeder Beobachtung aufgetretenen Elektrometerausschlägen addiert hatte. Nach dem Versuch wurde mit Hilfe eines Braunschen Elektrometers die Ladespannung gemessen.

Der eigentliche Versuch zur Bestimmung der Leitfähigkeit ging in folgender Weise vonstatten. Der vor der Elektrometerskala sitzende Beobachter las zunächst den Stand des Lichtzeigers des geerdeten Elektrometers ab (den Nullpunkt), zog dann die Wippe W_3 und brachte dadurch die bis dahin nur geerdete, untere Belegung der Steinsalzplatte in leitende Verbindung mit der geerdeten Elektrometerleitung; er legte darauf beim Schlage eines von einer sehr guten Pendeluhr elektrisch betriebenen Sekundenklopfers die Akkumulatorenspannung an die obere Plattenbelegung durch Ziehen der Wippe W_3 an und zog zuletzt beim nächstfolgenden Sekundenschlag die Wippe W_2, wodurch die Erdung des Elektrometerquadranten und der Platte aufgehoben wurde.[1]) In dieser einen Sekunde hatte die durch Anlegen der Spannung erzeugte Influenzelektrizität Zeit zum verschwinden, und die nach dieser Zeit eintretende Nadelbewegung blieb deshalb, von einer eventuellen Rückstandsbildung abgesehen, davon unberührt. Diese Bewegung der Nadel wurde nun in regelmäßigen Zeitintervallen durch

1) Der linke Bügel dieser Wippe stand in der Stellung, bei der das Elektrometer geerdet war, in von der Erde isolierter Verbindung mit dem negativen Pol des Normalelementes und lud sich anfänglich trotz Isolation des positiven Poles etwas negativ auf. Bei dem erwähnten Umlegen der Wippe influenzierte sie dann in der benachbarten Elektrometerleitung etwas positive Elektrizität, die sich durch einen kleinen (etwa 0,3 Skt.) Ausschlag bemerkbar machte. Um diesen störenden Ausschlag zu vermeiden, wurde vor jedem Versuch mit der Platte der negative Elementenpol geerdet und erst wieder isoliert, wenn eine neue Bestimmung der Elektrometerempfindlichkeit gemacht werden sollte.

Beobachtung des Lichtzeigers verfolgt; als Intervall behielt ich wenigstens für den Anfang des Versuchs die Zeit von 5 Sekunden gewohnheitshalber fast bei allen Versuchen bei, später folgte, wie aus Tab. I ersichtlich ist, eine längere Beobachtungsperiode; wo es anging, vermied ich langdauernde Ausschläge um das Anbringen einer Korrektion wegen Isolationsfehler zu vermeiden und leitete lieber von Zeit zu Zeit die dem Elektrometer zugeführte Elektrizität zur Erde ab, um darauf die Messung der Zufuhr wieder fortzusetzen.

Der später folgende Entladungsversuch verlief in entsprechender Weise.

In der Tab. I sind die ersten Ergebnisse der auf S. 5 erwähnten, längeren Untersuchung mit der „alten" Platte, ein Ladungs- und der dazu gehörende Entladungsversuch in abgekürzter Form mitgeteilt. (Vgl. S. 10 u. 11.)

Aus diesen Werten ist zunächst nicht viel mehr zu entnehmen, als was schon aus den Arbeiten von Curie und Braun bekannt ist: eine anfänglich rasche, gegen Ende des Ladungsversuchs sehr viel langsamer werdende Abnahme der durch die Steinsalzplatte vermittelten, auf gleiche Zeiten bezogenen Elektrizitätsmengen.

Würde man nach einem freilich wenig begründeten Vorschlag von Hrn. Braun zur Berechnung der L.-F. des NaCl den am Elektrometer etwa 24 Stunden nach Anlegen der Spannung erhaltenen Wert, hier 0,6 Skalenteile in 240 Sekunden zugrunde legen, so ergäbe sich unter Verwendung der auf S. 473 a. a. O. angegebenen Skalenteilenwerte in elektrostatischen Einheiten und unter Berücksichtigung der Kapazität der benutzten Steinsalzplatte, etwa 8 cm, deren spezifischer Widerstand zu rund $6 \cdot 10^{18}$ Ohm/cm. Hr. Braun fand für seine gleich orientierte Platte $1{,}25 \cdot 10^{17}$ Ohm/cm, also einen etwa 50mal kleineren Wert.

Leider hat die Untersuchung keine ganz sicheren Anhaltspunkte für die Beantwortung der Frage geliefert, ob dem Steinsalz eine Leitfähigkeit in dem Sinne zukommt, daß es imstande wäre unter der Wirkung einer angelegten, konstanten Spannungsdifferenz dauernd eine gleichbleibende Menge Elektrizität pro Sekunde zu befördern. Aus der Tabelle kann man

nicht entnehmen, daß die in 4 Minuten beförderten Mengen sich nach einer 24stündigen Ladung in den folgenden 9 Tagen nicht mehr geändert hätten; denn wenn auch einzelne Zahlen zu einer solchen Folgerung verführen könnten, so ist doch zu beachten, daß diese Werte bereits so klein sind, daß wir mit ihnen die Grenze der Leistungsfähigkeit der Meßmethode erreicht haben. Die in der Zeiteinheit beförderten Elektrizitätsmengen können konstant, aber auch ebensogut noch immer kleiner geworden sein. Eine Andeutung für die Möglichkeit des Vorhandenseins einer elektrolytischen Leitung gibt die aus den beiden vorletzten Bestimmungen des Ladungsversuches hervorgehende Tatsache — die später noch der Gegenstand einer besonderen Untersuchung wurde (vgl. unten S. 38 u. 69) —, daß jene Mengen in starkem Maß mit zunehmender Temperatur wachsen. Wenn ich im folgenden den Ausdruck „Leitfähigkeit" (L.-F.) häufig gebrauche, so geschieht das lediglich zur Abkürzung; mit der Angabe der L.-F. soll, wie ausdrücklich betont werden muß, nichts weiter bezeichnet werden, als daß die Platte in dem Zeitpunkt, wo dieser so bezeichnete Wert gefunden wurde, eine gewisse auf die Zeiteinheit reduzierte Elektrizitätsmenge zu dem Elektrometer beförderte von demselben Betrage, wie es ein an die Stelle des NaCl gesetzter Leiter von der angegebenen L.-F. unter gleichen Umständen getan haben würde. Auch der Ausdruck „Stromstärke" wird mehrmals verwendet werden; darunter soll immer nur eine in einer gewissen Zeit zum Elektrometer beförderte Elektrizitätsmenge verstanden werden, ohne damit eine bestimmte Vorstellung von der Natur dieses Vorganges zu verbinden.

Der am 11. Tag nach dem Anlegen der Ladung unternommene Entladungsversuch hat, wie die Tabelle zeigt, eine sehr gute Bestätigung eines speziellen Falles des von Hopkinson gefundenen und von Curie bestätigten Superpositionsgesetzes geliefert. Nach diesem Gesetz soll sich der zeitliche Verlauf der nach einer plötzlich vorgenommenen Änderung der Ladespannung beförderten Elektrizitätsmenge in der Weise von vornherein numerisch angeben lassen, daß man den als beobachtet vorausgesetzten, zeitlichen Verlauf der durch eine Spannung von der Größe dieser Spannungsänderung in einer vorher unbenutzten (nicht geladenen) Platte beförderten Elektrizitätsmengen durch einfache Superposition mit dem Verlauf

Tabelle I.

Ladungsversuch.

Empfindlichkeit (anfänglich): 169 Skalenteile.

Isolation (durchgängig): Abnahme in 2 Min. von 169: ±2,0 Skalenteile.

Influenzausschlag: 25,6 Skalenteile für 5,10 Volt.

Anfang des Versuchs ($t = 0$): Anlegen der Spannung von + 1530 Volt an die obere Plattenbelegung.

Zur Zeit $t = 1$ Sek.: Isolieren der Elektrometer-Platte-Leitung.

Entladungsversuch.

Empfindlichkeit: 150 Skalent.

Isolation: wie nebenstehend.

Anfang des Versuchs ($t = 0$): Anlegen der Erdleitung an die obere Plattenbelegung.

$t = 1$ Sek.: Isolieren der Elektrometer-Platte-Leitung.

Temp.	Elektrometergang in Skalenteilen	Stand des Lichtzeigers zur Zeit	Ablenkung des Elektrometers in Skalenteilen: beobachtet	Ablenkung des Elektrometers in Skalenteilen: nach Abzug des Elektrometerganges	Temp.	Ablenkung des Elektrometers in Skt. nach Abzug des Elektrometerganges
18,9°	1,6 in 4 Min.	$t =$ 1 Sek.: Nullpunkt 25,4			19,4°	
		$t =$ 6 „ 35,5	10,1	10,1 in 5 Sek.		−9,0 in 5 Sek.
		$t =$ 11 „ 39,3	3,8	3,8 „ 5 „		−4,0 „ 5 „
		$t =$ 16 „ 42,5	3,2	3,2 „ 5 „		−3,5 „ 5 „
		$t =$ 31 „ 48,3	5,8	5,7 „ 15 „		−5,6 „ 15 „
		$t =$ 46 „ 52,2	3,9	3,8 „ 15 „		−4,1 „ 15 „
		$t =$ 61 „ 55,1	2,9	2,8 „ 15 „		−2,6 „ 15 „
		$t =$ 76 „ 57,5	2,4	2,3 „ 15 „		−2,3 „ 15 „
		$t =$ 91 „ 59,6	2,1	2,0 „ 15 „		−2,2 „ 15 „
		$t =$ 106 „ 61,2	1,6	1,5 „ 15 „		−1,7 „ 15 „
		$t =$ 121 „ 62,8	1,6	1,5 „ 15 „		−1,4 „ 15 „
		$t =$ 136 „ 64,2	1,4	1,3 „ 15 „		−1,3 „ 15 „ } interpoliert
		$t =$ 151 „ 65,5	1,3	1,2 „ 15 „		−1,2 „ 15 „ } interpoliert
		$t =$ 166 „ 66,8	1,3	1,2 „ 15 „		−1,1 „ 15 „ } interpoliert
		$t =$ 181 „ 67,9	1,0	0,9 „ 15 „		−1,0 „ 15 „

	1,6 in 4 Min.	t = 8 Min. 0 Sk.	N.P. 25,3			
		t = 9 „ 0 „	27,3	2,0	1,6 „ 1 Min.	– 1,8 in 1 Min.
		t = 10 „ 0 „	29,2	1,9	1,5 „ 1 „	
		t = 11 „ 0 „	31,3	2,1	1,7 „ 1 „	
		t = 12 „ 0 „	33,2	1,9	1,5 „ 1 „	
		t = 13 „ 0 „	35,0	1,8	1,4 „ 1 „	
		t = 14 „ 0 „	36,6	1,6	1,2 „ 1 „	
	1,6 in 4 Min.	t = 29 „ 10 „	N.P. 24,9			
		t = 30 „ 10 „	25,9	1,0	0,6 „ 1 „	– 0,2 in 1 Min.
		t = 31 „ 10 „	27,0	1,1	0,7 „ 1 „	
		t = 32 „ 10 „	28,2	1,2	0,8 „ 1 „	
19,0°	2,0 in 4 Min.	t = 5h 26 Min.	N.P. 24,6			
		t = 5h 27 „	25,3	0,7	0,2 „ 1 „	
		t = 5h 28 „	26,2	0,8	0,3 „ 1 „	
?	1,0 in 4 Min.	t = 24h 0 „	N.P. 21,7			
		t = 24h 4 „	23,3	1,6	0,6 „ 4 „	
?	1,5 in 4 Min.	t = 48h 0 „	N.P. 22,3			
		t = 48h 4 „	24,2	1,9	0,4 „ 4 „	unmerklich
19,2°	0,9 in 4 Min.	t = 96h 0 „	N.P. 28,5			
		t = 96h 4 „	29,9	1,4	0,5 „ 4 „	
19,2°	2,2 in 4 Min.	t = 120h 0 „	N.P. 20,1			
		t = 120h 4 „	22,8	2,7	0,5 „ 4 „	
?	1,6 in 4 Min.	t = 144h 0 „	N.P. 26,8			
		t = 144h 4 „	28,8	2,0	0,4 „ 4 „	
2,5°	1,1 in 4 Min.	t = 168h 0 „	N.P. 20,2			
		t = 168h 4 „	21,5	1,3	0,2 „ 4 „	
25,1°	1,6 in 4 Min.	t = 216h 0 „	N.P. 22,8			
		t = 216h 4 „	25,4	2,6	1,0 „ 4 „	
18,4°	0,5 in 4 Min.	t = 240h 0 „	N.P. 18,8			
		t = 240h 4 „	19,9	1,1	0,6 „ 4 „	

zusammensetzt, den man beobachtet hätte, wenn die anfängliche Ladung über dem Moment ihrer Veränderung hinaus bestehen geblieben wäre. Die anfängliche Ladung betrug im vorliegenden Falle + 1530 Volt, bei der Ableitung zur Erde trat also eine Änderung von — 1530 Volt ein; die gedachte Fortsetzung der ersten Ladung hätte auch noch einige Zeit nach der Änderung ungefähr + 0,5 Skalenteile in 4 Minuten geliefert. Demnach müßten die Werte der letzten Kolonne um diesen Betrag entsprechend kleiner sein als die der 5. Kolonne. Mit dieser Forderung stehen die Zahlen dieser Kolonne, wenn man die Temperaturverschiedenheit und die Beobachtungsfehler berücksichtigt, wenigstens in der ersten Zeit der Entladung durchaus in Einklang. Für diesen Entladungsstrom wird auch im folgenden häufig der Name „Polarisationsstrom" gebraucht werden.

An dieser Stelle mag gleich erwähnt werden, daß während der Untersuchung häufig Gelegenheit vorhanden war, zu erfahren, wie sich die Platte verhielt, wenn mit dem Wechseln einer Ladung nicht wie in unserm obigen Falle gewartet wurde, bis die betreffenden Elektrometerausschläge sehr klein und scheinbar konstant geworden waren. Das Verhalten entsprach dann auch noch immer, von besonderen Fällen (vgl. z. B. S. 91), die noch erwähnt und aufgeklärt werden sollen, abgesehen, dem Superpositionsgesetz.

Mit Rücksicht auf weiteres, das noch über das Verhalten des NaCl mitzuteilen ist, erscheint es zweckmäßig, das angewendete Verfahren und den Grad der Zuverlässigkeit der Ergebnisse etwas ausführlicher[1]) zu besprechen.

Das Kelvinsche Quadrantenelektrometer (Originalexemplar) hat sich bei richtiger Behandlung zur Messung von Spannungen und bei Nullmethoden bekanntermaßen als den gestellten Anforderungen vollständig genügend erwiesen. Im vorliegenden Falle wurde es aber zur Messung von Elektrizitätsmengen verwendet, die *allmählich* zugeführt wurden und von denen manchmal der zeitliche Verlauf dieser Zufuhr einigermaßen genau erkannt werden sollte. Die im Anfang dieser

1) Die weitläufige Mitteilung von vielen Einzelheiten war leider nicht zu umgehen, namentlich weil in einigen Ergebnissen Unsicherheiten bestehen geblieben sind, zu deren Erklärung jene Einzelheiten vielleicht beitragen können.

Arbeit gestellten Ansprüche konnten auch bei dieser Verwendung von dem Instrument größtenteils befriedigt werden. Allein im späteren Verlauf machte sich der Wunsch und das Bedürfnis nach einer weitergehenden Zuverlässigkeit der Ergebnisse geltend. Da ergab sich dann, daß sowohl das Elektrometer, wie auch das oben geschilderte Beobachtungsverfahren mit Mängeln behaftet sind, die sich in speziellen Fällen bemerkbar machen. Von diesen Mängeln sollen einige besprochen werden.

1. Es wurde, wie soeben erwähnt, die Messung der in einer gewissen Zeit von der Platte zugeführten Elektrizitätsmenge stets durch Ablesung am *bewegten* Lichtzeiger vorgenommen, und es ist sicher, daß infolge der Trägheit des Nadelsystems und der Dämpfung seiner Bewegung diese Messung mehr oder weniger gefälscht wird, wenn man, wie es geschah, die vorher am *ruhenden* Zeiger vorgenommene Kalibrierung des Elektrometers bezüglich seiner Coulombempfindlichkeit für die Auswertung der Beobachtungen zugrunde legt.[1]) Es fragt sich nun, ob der begangene Fehler so beträchtlich war, daß er für unsere Versuche, die weniger eine sehr genaue absolute Bestimmung der L.-F. beabsichtigen, als eine einigermaßen zuverlässige Beobachtung der Veränderung der L.-F., die die Platte durch noch zu bezeichnende Operationen erfährt, von wesentlichem Belang war. Nach dieser Richtung angestellte Prüfungen haben ergeben, daß dieses nicht der Fall war, wenn man vermied, Ablesungen zu machen an dem noch rasch bewegten Zeiger, dessen Bewegung noch sichtlich sehr ungleichförmig, d. h. von Schwingungen stark beeinflußt war.

Für gewisse Versuche, von denen noch die Rede sein wird, war es nötig die Vermutung zu prüfen, ob nicht die durch Temperaturänderungen bewirkte Änderung der Viskosität der die Nadelbewegung dämpfenden H_2SO_4 des Elektrometers die Bestimmung der Spannung bzw. der Ladung beeinflussen könnte. Um diesen Einfluß zu prüfen, wurden Leitungsversuche angestellt, bei denen die Temperatur der H_2SO_4 durch vorangegangene elektrische Heizung des Gesamtinhalts des großen Blechkastens, in dem das Elektrometer usw. untergebracht war — ohne daß die Temperatur der Steinsalzplatte sich auch gleichzeitig verändert hatte — erhöht war. Das Ergebnis war, daß ein wesentlicher Einfluß auf die Elektrometer-

1) Vgl. darüber z. B. Steward, Phys. Rev. 21. S. 229. 1905.

ausschläge nicht zu befürchten ist. Weil ein jedesmaliges Umrühren der Schwefelsäure vor jedem der vielen Versuche nicht angängig erschien, war eine gewisse Konstanz der Schwefelsäuretemperatur allerdings erforderlich, um zu vermeiden, daß Flüssigkeitsströmungen die Nadelstellung unliebsam beeinflußten; es wurde deshalb dafür gesorgt, daß stärkere Temperaturschwankungen im Beobachtungszimmer im Verlauf einer kürzeren Zeit nicht vorkamen. Einige später noch zu erwähnende Unregelmäßigkeiten in den Versuchsergebnissen machten sich im Laufe der Zeit, als die Ansprüche an die Genauigkeit der Beobachtungen gestiegen waren, störend bemerkbar. Sie führten zu der Vermutung, daß noch ein zweiter Einfluß ähnlicher Art wirksam sein könnte. Es schien nämlich nicht ausgeschlossen zu sein, daß sich in der Oberfläche der H_2SO_4 im Laufe einiger Zeit eine zähere Haut ausbilden könnte, die an dem wenn auch sehr dünnen Draht haftend, dessen bei Nadelablenkungen eintretende Drehungen um seine Achse in mit der Zeit veränderlicher Weise hemmen würde. Um diese mögliche Fehlerquelle von vornherein auszuschließen, hätte man vor jedem der vielen Versuche das Elektrometer auseinander nehmen und die Schwefelsäure gut umrühren müssen, was aber, wie schon erwähnt, nicht angängig war. Um aber diese Fehlerquelle kennen zu lernen, fand sich eine Gelegenheit, als das Elektrometer einmal über $2^1/_2$ Monate lang unberührt gestanden hatte. Es wurden an zwei aufeinanderfolgenden Tagen mit diesem lange nicht gebrauchten Elektrometer, in dem sich somit eine solche Haut ausgebildet haben konnte, je ein Ladungs- und Entladungsversuch angestellt. Beide lieferten untereinander übereinstimmende Ergebnisse. Dann wurden wieder zwei solche Versuche gemacht, aber erst nachdem die Schwefelsäure umgerührt und infolgedessen von ihrer vermuteten Haut befreit war. Sie ergaben in der Tat etwas (ein paar Prozente) größere Werte sowohl bei der Ladung, als bei der Entladung. Daraus geht hervor, daß zwar obige Vermutung richtig war, aber gleichzeitig, daß die Ergebnisse von bald, d. h. nach einigen Stunden oder auch Tagen aufeinanderfolgenden Versuchen, und darum handelte es sich fast immer, von dieser Fehlerquelle nicht wesentlich beeinflußt werden konnten.

Ein Einfluß von in der H_2SO_4 eventuell suspendierten Teilchen auf die Nadelbewegung konnte nicht festgestellt

werden. Eine geringe elastische Nachwirkung der bifilaren Nadelaufhängung machte sich nur bei und nach etwas länger dauernden größeren Ablenkungen bemerkbar, verschwand dann aber immer nach einem kurzen Abwarten. Das Elektrometer hat während der langen Untersuchung niemals zu der Befürchtung Veranlassung gegeben, es könnte vielleicht sehr kleine Elektrizitätsmengen, wie sie öfter vorkamen, nicht genügend genau messen. Der Nullpunkt stellte sich, wenn die nötigen Vorsichtsmaßregeln getroffen waren, nach jeder Ablenkung immer wieder tadellos ein. Das Instrument reagierte ohne Fehler auf die kleinsten, wenigen Zehntel Skalenteilen entsprechenden, sowohl rasch wie langsam zugeführten Elektrizitätsmengen. Etwas größere, mit dem Piezoquarz erzeugte und einander gleiche Elektrizitätsmengen lieferten bei gleicher Elektrometerempfindlichkeit exakt gleiche Ausschläge. Kurz, dem Elektrometer kann ich in *dieser* Beziehung nicht die Schuld beimessen von Unstimmigkeiten und von einer eigentümlichen unerklärt gebliebenen Erscheinung, die im weiteren Verlauf der Untersuchung beobachtet wurden, und von denen noch ausführlich die Rede sein wird. Trotz alledem empfand ich, je länger die Untersuchung dauerte, immer mehr das Bedürfnis nach einer anderen Methode und nach anderen Instrumenten, um kleine Elektrizitätsmengen zu messen; ich fand aber bis jetzt keine Gelegenheit, dem abzuhelfen.

Ich legte mir natürlich die Frage vor, ob es doch nicht besser wäre, die Messung immer, d. h. nicht nur zu Anfang, sondern auch nach Beendigung der Elektrizitätszufuhr an der *ruhenden* Elektrometernadel zu machen, wozu nach Ablauf der für die Zufuhr gewählten Zeit die Verbindung der von der Erde isoliert bleibenden Elektrometerleitung mit der Platte durch Umlegen der Wippe W_3 hätte aufgehoben werden müssen. Ich habe auch probeweise dieses Verfahren einige Male angewendet, habe aber keine wesentlichen Vorzüge davon erkennen können. Ein solcher wäre erst eingetreten, wenn es sich um eine sehr genaue Bestimmung des absoluten Wertes der L.-F gehandelt hätte. Ein wesentlicher Nachteil aber dieses Verfahrens wäre die Schwierigkeit gewesen, sich von dem zeitlichen Verlauf der Elektrizitätszufuhr ein Bild zu verschaffen, was in manchen Fällen erwünscht war.

2. Die Sicherheit der Messung der mitunter sehr kleinen Mengen, z. B. der nach länger dauernder Ladung oder nach längerer Entladung auftretenden Elektrizitätsmengen, wie sie z. B. in der obigen Tabelle verzeichnet sind, wird nicht unbeträchtlich gefährdet durch selbständige Aufladungen des isolierten Elektrometers mit seinen Leitungen, bzw. der unteren Plattenbelegung mit ihrer Leitung. Isoliert man nämlich durch Umlegen der Wippe W_2 das zur Messung verwendete Quadrantenpaar mit seiner Leitung bis zu den drei Wippen, die die Verbindung mit den zu den Kästchen führenden Leitungen vermitteln können, so bemerkt man, wie bereits kurz erwähnt, daß sich dasselbe mit seiner Leitung langsam stetig und immer positiv aufladet. Diese Aufladung ist in der Tabelle unter „Elektrometergang" verzeichnet. Wiederholt man diesen Versuch nach Hinzuschaltung der unteren Belegung der Platte, deren obere Belegung zur Erde abgeleitet bleibt, so tritt wieder ein ähnlicher Ausschlag im Laufe der Zeit ein, der aber kleiner als der vorher erwähnte, in einzelnen Fällen sogar schwach negativ ist (diese Beobachtungen sind in den späteren Tabellen unter „$V = 0$" verzeichnet); demnach muß in diesem zugeschalteten Teile immer oder jedenfalls mit äußerst wenigen Ausnahmen negative Elektrizität entstehen. Sie rührt nicht etwa von einer „Polarisation" der Platte her, denn sie entstand unter normalen Verhältnissen in allen Fällen, sei es, daß die Platte bei vorhergehenden Versuchen positiv oder daß sie negativ geladen war und sogar auch dann, wenn bloß die Platte und nicht auch ihre Leitung bis zur Wippe W_2 von der Elektrometerleitung abgetrennt war. Die Quelle dieser negativen Elektrizität ist wohl in Kontaktpotentialen oder in Voltaeffekten zu suchen, die sich trotz der ausnahmslosen Verwendung von hartem Paraffin als Isolator nicht beseitigen ließen. An der erwähnten positiven Aufladung beteiligt sich hauptsächlich das Elektrometer selbst, wie sich aus seinem Verhalten nach Abtrennung des Quadrantenpaares von der äußeren Leitung erkennen ließ. Die Ursache dieser Aufladung liegt nach den gemachten Erfahrungen in der durch ionisierte Luft vermittelten Aufnahme von positiver Elektrizität aus der Nadelladung; sie war z. B. besonders stark in einigen Fällen, wo die Möglichkeit vorlag, daß von entfernten Zimmern etwas Radiumemanation

in den Beobachtungsraum gelangt war; ihre Größe konnte in solchen Fällen den Betrag der zu messenden Elektrizitätszufuhr sogar übersteigen[1]) (vgl. den Versuch der Tabelle). Es fragt sich nun, wie diese Ladungen bei der Auswertung der L.-F.-Messung zu berücksichtigen sind. Wenn es angängig war den einen davon, mit $V = 0$ bezeichneten Wert, zu beobachten, so wurde dieser in einer der Beobachtungszeit entsprechenden Größe dem gemessenen Ausschlag hinzugefügt, was als einwandsfrei gelten dürfte. Nun ist es aber nicht immer möglich, diesen Vorversuch zu machen, wie z. B. bei dem beschriebenen Versuch, als die Platte verschiedene Tage lang geladen blieb und deshalb keine Gelegenheit vorhanden war, vor jedem Ladungsversuch das $V = 0$ zu messen. Wie ist nun in solchen Fällen zu verfahren?[2]) Man hat dann nur die Wahl, entweder keine Aufladung oder aushilfsweise den „Elektrometergang" zu berücksichtigen. Die Erfahrung von vielen Versuchen, bei denen sowohl der Elektrometergang als das $V = 0$ gemessen wurde, hat gezeigt, daß es in den Fällen, wo die Messung des letzteren ausfallen muß, besser ist, den Elektrometergang in der angegebenen Weise zu benutzen, als auf die selbständige Aufladung überhaupt keine Rücksicht zu nehmen. Auch erkennt man schon aus den Ergebnissen der vier letzten Ladungsversuche und der zwei letzten Entladungsversuche der Tabelle, daß es angezeigt war, so zu verfahren. Ähnliche Beispiele werden wir noch im weiteren Verlauf dieser Mitteilung finden.

Es lag natürlich der Gedanke nahe, in den Fällen, wo sehr kleine Stromstärken zu messen waren und dazu eine längere Zeit, etwa von einer Stunde oder mehr, zur Verfügung

1) Bei späteren Versuchen, vgl. z. B. S. 38 und 137, war der Elektrometergang wesentlich kleiner als bei dieser ersten Versuchsreihe. Wenn es während der Untersuchung nötig gewesen war, das Elektrometer zur Erneuerung der Schwefelsäure auseinander zu nehmen, so mußte es nachher ein paar Tage lang sich selbst überlassen bleiben, sonst traten leicht neue störende Selbstaufladungen ein.

2) Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die in Rede stehende Unsicherheit bei einigermaßen größeren Stromstärken, und solche kommen bei dem größeren Teil der Arbeit — Untersuchung des X-bestrahlten und des natürlich-gefärbten NaCl — fast immer nur in Frage, eine sehr geringe Rolle spielt, die gegen die von noch nicht zu beseitigenden Unsicherheiten zurücktritt.

stand, wie z. B. gegen Ende des oben mitgeteilten Versuchs, sich von dieser soeben besprochenen Unsicherheit in der Weise frei zu machen, daß man die von der Platte in einer gewissen Zeit zugeführte Elektrizitätsmenge sich zuerst auf der Platte oder eventuell auf einem Kondensator ansammeln ließ, um sie dann am Schluß dieser Zeit mit dem Elektrometer zu messen, wobei auch die vorhin beanstandete Ablesung am bewegten Lichtzeiger wegfallen könnte. Allein es hat sich bei angestellten Probeversuchen ergeben, daß dann, wenigstens mit der vorhandenen Apparatur, andere Fehlerquellen auftraten, die das Resultat wieder unsicher machten. Ich zog es deshalb vor, so zu verfahren, wie oben angegeben ist und mich durch häufige Wiederholung der Versuche unter ähnlichen Verhältnissen von Spannung, Temperatur usw. — was auch noch aus anderen Gründen angezeigt war — von dem Einfluß der genannten Fehlerquelle frei zu machen. Es dürfte mir deshalb auch gelungen sein wenigstens so weit zu kommen, daß ich die Richtigkeit der in solchen Fällen gezogenen Schlüsse verbürgen kann, und ich würde erst dann nochmals auf die Suche nach einer besseren Methode gehen, wenn bei einer eventuellen Fortsetzung der Untersuchung andere Unsicherheiten, von denen noch die Rede sein wird, vorher beseitigt worden sind.

3. Die Sicherheit der in der allerersten Versuchsperiode, wo die Elektrizitätszufuhr am stärksten ist — in der Zeit von 1—6 Sekunden nach Anlegen der Spannung —, erhaltenen Werte ist infolge der Unsicherheit in dem Innehalten von einer Sekunde, die zwischen dem Anlegen der Spannung und dem Isolieren der Elektrometerleitung vergehen soll, etwas mehr gefährdet als die der unmittelbar folgenden Werte. Auch ist die Bewegung der Nadel so kurze Zeit nach dem Anfang ihrer Bewegung manchmal noch nicht so gleichförmig fortschreitend als später.

4. Wenn es auch von vornherein nicht sehr wahrscheinlich erschien, daß das am Anfang eines Ladungsversuches vorgenommene plötzliche Anlegen der Plattenkapazität an die Hochspannungsleitung den Betrag der Spannung vorübergehend merklich vermindern könnte und dadurch der folgende Elektrometerausschlag infolge von durch Erholung der Spannung erzeugter Influenzelektrizität gefälscht worden wäre, so schien

es mir doch nicht überflüssig, durch einen Versuch nachzuweisen, daß diese Fehlerquelle wirklich nicht zu befürchten war. Dazu wurde noch eine zweite Steinsalzplatte in das andere Zinkkästchen aufgestellt und für eine Zeitlang dauernd und zwar durch *direkte* Verbindung mit der Akkumulatorenbatterie auf etwa 1500 Volt geladen. Als die in ihr erzeugte Stromstärke sehr klein geworden war, blieb die untere mit dem Elektrometer verbundene Leitung ungeerdet, so daß eine eventuell folgende langsame Änderung der Hochspannung sich durch Influenz an dem Lichtzeiger bemerkbar machen mußte. Dann wurde in der üblichen Weise die erste Platte durch Umlegen der Wippe W_8 auch mit der Hochspannung verbunden, während ihre untere Belegung geerdet war, und weiter auch geerdet blieb. Es zeigte sich bei dieser Operation gar kein merklicher Einfluß auf die äußerst langsame Bewegung des Lichtzeigers, wodurch der gewünschte Nachweis als erbracht gelten darf.

5. Auf S. 467 des ersten Teiles der Arbeit ist erwähnt, daß die Kapazität des Quadrantenpaares nach Ablenkung der Nadel scheinbar größer ist als bei der in der Nullstellung ruhenden Nadel und daß die diese Veränderung berücksichtigende Größe a von der Nadelspannung abhängig ist. Benutzt man somit, wie es hier geschah, die Nadelablenkung zur Vergleichung von bei verschiedenen Versuchen zugeführten Elektrizitätsmengen untereinander, so ist dafür Sorge zu tragen, daß in allen diesen Fällen die Nadelspannung möglichst die gleiche ist. Eine vollständige Gleichheit läßt sich aber nicht leicht erreichen, weil man nicht kurz vor jedem Versuch die Spannung der Nadel, die in der Zwischenzeit zwischen zwei Versuchen, die nicht unmittelbar aufeinander folgen, mehr oder weniger je nach der Isolation der Leidner-Flasche des Elektrometers abgenommen hat, ändern darf, wenn die notwendige Unveränderlichkeit der Nullage der Nadel gewährleistet werden soll; dadurch kämen somit unter Umständen kleine Unsicherheiten in der Bestimmung der L.-F. hinein. In den wenigen Fällen, wo eine größere Verschiedenheit der Nadelspannung nicht zu vermeiden, und wo doch auch eine möglichst genaue Bestimmung der L.-F. erwünscht war, habe ich deshalb an den abgelesenen Ausschlägen eine Korrektion angebracht, deren Betrag aus besonderen Versuchen

abgeleitet war. Diese Versuche lieferten folgendes Resultat: Wenn die Empfindlichkeit von 154 Skalenteilen auf 122 Skalenteile verringert worden war, so hatte sich ein durch eine gleichbleibende Elektrizitätsmenge erzeugter Ausschlag von 13,0 Skalenteilen um ungefähr 1,0 Skalenteile vermindert, d. h. ein bei der Empfindlichkeit 122 gemessener Ausschlag von dem genannten Betrag wäre um 1,0 Skalenteile zu vergrößern, um den als unbekannt angenommenen Ausschlag bei der Empfindlichkeit 154 Skalenteile zu erhalten. (Vgl. S. 48).

6. An die Konstanz der Bornhäuserschen Akkumulatorenbatterie, die zur Ladung der Platte diente, wurden während eines Ladungsversuches große Ansprüche gemacht, insbesondere, wenn sehr kleine Stromstärken gemessen werden sollten. Sie hat diese aber vollständig erfüllt, wenn folgende Maßregeln getroffen waren. Erstens müssen alle in ihr vorkommenden Kontakte mittels Klemmen bzw. Lötstellen und nicht, wie es anfänglich der Fall war, durch kleine Hg-Näpfe hergestellt sein. Zweitens darf die Batterie nicht zu kurze Zeit nach ihrer Ladung und auch nicht nach längerem Gebrauch verwendet werden, da in beiden Fällen die Spannung verhältnismäßig rasch abnimmt, was leicht Influenzerscheinungen an der Platte zur Folge haben könnte, die die Ergebnisse eines Versuches völlig entstellen würden (vgl. das folgende Beispiel für den Fall einer Temperaturänderung der Akkumulatoren). Aus dem gleichen Grunde ist zu vermeiden, daß die Schaltung der Batterie, etwa von nebeneinander auf hintereinander, kurz vor einem Bestimmungsversuch geändert wird; am sichersten ist es, an der Schaltung überhaupt nichts zu ändern und die Batterie von einer Aufladung zur anderen dauernd auf Hintereinanderschaltung stehen zu lassen, ihre Ladung nimmt dann wohl etwas rascher, aber jedenfalls viel regelmäßiger ab, als wenn mit der Schaltung gewechselt wurde. Drittens muß dafür gesorgt werden, daß die Temperatur der Batterie während eines Versuchs sich nicht oder nur sehr wenig ändert, weshalb sie bei den späteren genaueren Versuchen nicht im Beobachtungszimmer, wo die Temperatur absichtlich einige Male geändert werden mußte, sondern in einem Nebenraum mit möglichst konstanter Temperatur aufgestellt wurde. Der Einfluß einer Temperaturänderung ist unter Umständen in der Tat sehr beträchtlich, wie aus folgender Überlegung hervor-

geht. Die Akkumulatorenspannung nimmt nach einer Angabe, die ich im Kohlrauschschen Lehrbuch der praktischen Physik, S. 414 fand, um etwa 4 Promille bei einer Temperatursteigerung um 1° zu. Die Vermehrung der an der Platte angelegten Spannung von etwa 1600 Volt würde demnach nach Zunahme der Akkumulatorentemperatur um einen Grad 6,4 Volt betragen, und auf der mit dem Elektrometer verbundenen Belegung eine Menge Influenzelektrizität erzeugen, die sich an dem Elektrometer durch einen Ausschlag von etwa 33 Skalenteilen bemerkbar machen würde. Wenn also eine L.-F.-Bestimmung, wie es häufiger der Fall war, 3 oder 4 Minuten beanspruchte und wenn ein Fehler von 0,3 Skalenteilen vermieden werden sollte, so durfte sich die mittlere Akkumulatorentemperatur in dieser Zeit nicht um 0,01° geändert haben.

7. Eine Temperaturänderung der Platte während eines Ladungsversuchs könnte sich durch das damit verbundene Auftreten von Influenzelektrizität nur bei größeren Änderungen bemerkbar machen. 1° Temperaturzunahme während eines Versuchs würde bei etwa 1600 Volt Ladung erzeugen:

a) infolge der Dickenänderung der Platte einen Ausschlag von — 0,3 Skalenteilen,

b) infolge der Flächenänderung der Platte einen Ausschlag von + 0,6 Skalenteilen,

c) infolge der Änderung der Dielektrizitätskonstante einen Ausschlag von — 0,5 Skalenteilen.

Eine so große Temperaturänderung kam aber bei den L.-F.-Bestimmungen mit einer verdunkelten Platte nicht vor.

Dagegen zeigte sich bei plötzlich eintretender intensiver Beleuchtung, bzw. Verdunkelung der geladenen Platte — wie sie öfter vorgenommen wurde —, wenn die Platte infolge längerer positiver bzw. negativer Ladung nur noch wenig Elektrizität zum Elektrometer führte, sehr deutlich ein kleiner, rasch eintretender positiver bzw. negativer Ausschlag, der der thermischen Ausdehnung, bzw. Abkühlung speziell der unteren Plattenbelegung, die aus Graphit bestehend die Strahlung gut absorbierte, zugeschrieben werden muß. Ausführlicheres hierüber vgl. S. 79.

8. Die Temperatur der Platte übt auf ihre L.-F. einen recht merklichen Einfluß aus, namentlich auf die nach längerer

Ladungsdauer vorhandene; aus der Tabelle ist dieser Einfluß in zwei Fällen (Bestimmung der L.-F. nach 168 Stunden, bzw. 216 Stunden) sehr deutlich zu erkennen. Diese Versuche wären aber zu ungenau, um daraus einen Wert für den Temperaturkoeffizienten ableiten zu können; dazu dienen später mitzuteilende Bestimmungen.

9. Die Isolation des in Betracht kommenden Leitersystems war, wenn keine beleuchtete, X-bestrahlte Platte untersucht wurde, sehr gut; von allen Teilen isolierte das Elektrometer am wenigsten. Unter normalen Verhältnissen nahm ein Elektrometerausschlag von 150 Skalenteilen in 2 Minuten um etwa 3 Skalenteile infolge mangelhafter Isolation ab; die dadurch bedingte Korrektion der Leitungsversuchsergebnisse ist häufig verschwindend klein und erreicht in manchen Fällen, z. B. bei dem oben in der Tabelle wiedergegebenen Versuch, etwa die Grenze der Ablesungsgenauigkeit, so daß ich von der Anwendung dieser Korrektion meist abgesehen habe. Wenn die Platte durch Bestrahlung und Beleuchtung recht leitungsfähig geworden ist, so ist natürlich die Isolation des Isolierstreifens wesentlich schlechter; aber auch dann braucht dieser Fehler nur sehr selten berücksichtigt zu werden, weil eben die zu korrigierende Größe selbst auch beträchtlich größer geworden ist. Deshalb geschah die Bestimmung der Isolation zwar immer, aber mehr zu ihrer Kontrolle.

10. Da der Isolierring der Plattenbelegung nicht absolut isoliert, wird der Verlauf der Kraftlinien des durch Anlegen der Spannung erzeugten elektrischen Feldes in der Platte sich mit der Zeit etwas ändern; über den Einfluß dieser Veränderung auf die beobachteten Werte der L.-F. liegen keine direkten Beobachtungen vor.

Etwaige Verlegungen des Nullpunktes der Elektrometernadel während einer Bestimmung der L.-F. infolge von Temperaturänderungen oder von kleinen Erschütterungen usw. des Elektrometers, der Skala oder der Lampe wurden nicht wahrgenommen, vorausgesetzt, daß die Lampe einige Minuten vor Anfang des Versuches angezündet worden war, was, wie schon erwähnt, immer geschehen ist.

Mit der Messung von Elektrometerausschlägen von etwa 0,4—0,6 Skalenteilen in 4 Minuten sind wir an der Grenze

der Leistungsfähigkeit der Methode angelangt; diese Werte können von den verschiedenen vorhandenen Fehlerquellen sogar leicht in nicht unerheblichem Maße beeinflußt werden. Für sicher halte ich dagegen, daß diese sehr kleinen Elektrizitätsmengen wirklich durch das NaCl und nicht etwa, was nahe läge zu vermuten, durch ionisierte Luft der Elektrometerleitung zugeführt wurden. Dieser Weg durch die Luft war nämlich durch Metallgase versperrt, die die einzige zwischen angelegter Spannung und Elektrometerleitung vorhandene Öffnung verdeckte. Diese in dem die Plattenfassung tragenden Rohrstutzen angebrachte Öffnung ist für das Austrocknen der unteren Plattenbelegung nötig.

An anderer Stelle dieser Veröffentlichung wird ein paarmal Gelegenheit gegeben werden, um sich über die Frage ein Urteil zu bilden, inwieweit die Versuchsanordnung und auch das untersuchte Material der Anforderung genügt haben, daß zwei zu verschiedenen Zeiten unter gleichen Umständen, was Ladung und Temperatur anbetrifft, mit der gleichen Platte ausgeführte Versuche untereinander übereinstimmende Ergebnisse liefern; hier mag es genügen, wenn ich zur Orientierung auf folgendes hinweise. Nach dem erwähnten Superpositionsgesetz soll nach lang fortgesetzter Ladung, nachdem die L. F. sehr klein geworden ist, der gleich nachfolgende Entladungsversuch bei gleicher Temperatur für die ersten Zeiten den gleichen zeitlichen Verlauf zeigen wie der Ladungsversuch. Vergleicht man in der Tab. I die beim Ladungsversuch erhaltenen Werte mit den daneben stehenden der Entladung, so findet man, daß diese letzteren 11 Tage nach der Ladung erhaltenen Werte im allgemeinen sehr gut mit jenen übereinstimmen. Die vorkommenden kleinen Differenzen entsprechen unvermeidlichen Ablesungsfehlern. Diese Wahrnehmung bestärkte mich in der Ansicht, daß die Versuchsanordnung bei vorsichtiger Anwendung sehr wohl imstande war, über einige Fragen, die sich auf das elektrische Verhalten des NaCl beziehen, mit der nötigen Sicherheit Aufschluß zu geben. Inwieweit sich diese Ansicht im Verlauf der Untersuchung als zutreffend erwiesen hat, wird aus dem weiter Folgenden hervorgehen.

Ich berichte nun über weitere mit der „alten" Platte im Laufe einer längeren Zeit angestellte Versuche zur Bestimmung der L.-F. Zunächst sei erwähnt, daß zu jener Zeit der bedeutende Einfluß, den die Temperatur auf die L.-F. des NaCl ausübt, noch nicht sicher festgestellt war, und daß deshalb auf die möglichst genaue Bestimmung der Temperatur bei diesen Versuchen noch kein so großes Gewicht gelegt wurde, wie es später der Fall war. Auch wurde auf eine genauere Bestimmung der Ladespannung weniger acht gegeben. Deshalb darf ich kleinen Verschiedenheiten, die sich von Versuch zu Versuch ergaben, keine Bedeutung beilegen, und nur solche Veränderungen, deren Betrag so groß ist, daß sie von Temperatur und Spannungsunsicherheit keinesfalls herrühren können, in Betracht ziehen. Alle erhaltenen Werte wurden mit Hilfe eines später bestimmten Temperaturkoeffizienten auf die gleiche Temperatur von 18,0° und außerdem unter Anwendung der Gesetzmäßigkeit, daß die Stromstärken den angelegten Spannungen proportional sind, auf die gleiche Spannung von 1530 Volt reduziert. Da auch die Dicke der Platte durch Abschleifen einmal eine merkliche Änderung erfuhr und ein paarmal die Größe der Graphitelektrode absichtlich verkleinert wurde, reduzierte ich die nach diesen Operationen erhaltenen Werte auf die ursprüngliche Dicke und auf den Durchmesser der anfänglich angebrachten Graphitelektrode. Die so erhaltenen, nun für einen Vergleich untereinander besser verwendbaren Stromstärken wurden dann in einer Tabelle zusammengestellt, auf deren ausführliche Wiedergabe ich verzichten möchte, sowohl aus Sparsamkeitsrücksichten, als auch weil man sich aus einer auf S. 46 bis 49 abgedruckten Darstellung der Ergebnisse einer zu ähnlichen Zwecken angestellten Versuchsreihe in bezug auf die immer vorgekommenen Unregelmäßigkeiten und Störungen leicht ein Bild verschaffen kann.

Überblicke ich nun diese hier nicht wiedergegebene Tabelle, so finde ich als auffallendste Erscheinung, daß sowohl die in der Ladungsperiode von 1—16 Sekunden als auch namentlich die in der folgenden Periode von 16—121 Sekunden erhaltenen Elektrometerausschläge folgende bemerkenswerte Veränderungen erfuhren. Dem oben ausführlich beschriebenen, viele Tage dauernden Ladungs- und Entladungsversuch waren

zwei in gleicher Weise an je einem Tage angestellte, aber, was Ladungsdauer anbetrifft, wesentlich kürzere Versuche vorangegangen.[1]) Ihm folgte ein vierter Versuch. Während den etwa drei Wochen, die diese unter annähernd gleichen Bedingungen von Spannung und Temperatur angestellten vier Versuche in Anspruch nahmen, verblieb die Platte, wenn nicht zum Versuch geladen, geerdet in ihrem Kästchen im Dunkeln. Die in der Versuchsperiode von 16—121 Sekunden gelieferten, auf 18° und 1530 Volt reduzierten Elektrometerausschläge betrugen bzw. 18,7, 17,9, 17,4, und 16,0 Skalenteile. Es zeigte sich somit eine von Versuch zu Versuch eingetretene Abnahme der Stromstärke. Diese Erscheinung einer „langzeitigen Abnahme" der L.-F. wurde in der Folge mehrmals beobachtet; es wird von ihr noch ausführlicher die Rede sein. Auf diese vier Versuche mit der unbestrahlten Platte folgten bald einige kurz dauernde X-Bestrahlungen und Ladungs- und Entladungsversuche, die auf S. 82 besprochen werden sollen. Etwa $2^3/_4$ Jahre später als ich glaubte annehmen zu können, daß die Platte die durch die X-Bestrahlung erzeugte Veränderung verloren hatte, sollte versucht werden, einen Grund für die erwähnte langzeitige Abnahme zu finden. Es wurde die Platte auf beiden Seiten abgeschliffen, so daß ihre Dicke von 0,215 auf 0,188 cm abnahm. Das Glyzerintrögchen wurde wieder aufgekittet und eine neue Graphitelektrode von gleicher Größe wie die vorherige angebracht. Ein bald folgender Ladungs- und Entladungsversuch ergab eine auffallend größere Stromstärke (28,2 Skalenteile) als vor der langen Pause; ein zweiter am zweitfolgenden Tage angestellter Versuch ergab einen etwas kleineren und nach zwanzig Tagen ein dritter einen noch kleineren Wert (21,9 Skalenteile), aber immerhin bedeutend größer als vor dem Abschleifen beobachtet war. Da die Platte in der langen Zwischenzeit — unbeabsichtigt — frei, also nicht im Exsikkator aufbewahrt worden war, glaubte ich zuerst, einer Curieschen Anschauung

1) Für gewöhnlich dauerte bei allen Versuchen der Arbeit die Ladung nur etwa 5—6 Minuten; bis zum nächsten Ladungsversuch, der fast immer um die von der vorhergegangenen Ladung erzeugte Polarisation möglichst verschwinden zu lassen, frühestens erst am folgenden Tag gemacht wurde, blieb die Platte geerdet und im Dunkeln. Über den Einfluß einer kürzeren Dauer der Erdung wird bei einer anderen Gelegenheit berichtet.

entsprechend, daß die Vergrößerung der Stromstärke von einer in der Zwischenzeit in das NaCl eingedrungenen Feuchtigkeit herrühre. Bald fand ich aber die richtige Lösung. Das neu aufgesetzte Glyzerintrögchen war ausnahmsweise nicht mit der sonst angewendeten Sorgfalt aufgekittet worden, so daß ein freilich nur kleiner Kittwulst an dem inneren Glasrand stehen geblieben war, und der Kitt sich infolgedessen etwa 2 mm weit über das NaCl ausgebreitet hatte. Deshalb verliefen einige Kraftlinien, die zu der Graphitelektrode gelangten, auch durch diese dünne Kittschicht, und diese bewirkte die bekannte beträchtliche „Rückstandserscheinung" in der Form einer für die ersten Zeiten der Ladung bzw. Entladung vergrößerten Stromstärke. Nachdem der Kitt sauber entfernt worden war, stellte sich sofort und auch am nächsten Tage wieder ein Wert der Stromstärke (15 Skalenteile) ein von nahezu derselben Größe, wie der zuletzt vor etwa $2^3/_4$ Jahren gefundene (16,0 Skalenteile). Durch dieses Ergebnis war der Verdacht rege geworden, daß vielleicht auch dieser letztere Wert, sowie die drei vorher gefundenen durch die Anwesenheit einer äußerst dünnen, nicht sichtbaren, an der Oberfläche des NaCl etwa beim Abschleifen entstandenen fremden Oberflächenschicht, die nach den Versuchen von Arons den „Rückstand" merklich beeinflussen kann, gefälscht sein könnten, und es wurde deshalb die Platte vor einigen gleich folgenden Ladungsversuchen jedesmal ein wenig abgeschliffen, mit aller Vorsicht gereinigt, neu graphitiert und mit frischer Glyzerinelektrode versehen. Eine Wirkung dieser Operation auf die Stromstärke konnte aber bei den in den folgenden 10 Tagen nach jedem Abschleifen usw. angestellten Versuchen nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Dagegen zeigte sich, daß in dieser Zeit unabhängig von dem Abschleifungsprozeß die Stromstärke wiederum, wenn auch mit kleinen Sprüngen, weiter abgenommen hatte. Am Schluß betrug sie etwa 12 bis 13 Skalenteile (immer in der Versuchszeit von 16 bis 121 Sekunden).

Es schien mir nun nützlich, zu versuchen, ob das Verhältnis der Größe der Glyzerinelektrode zu der der Graphitelektrode bei den bisherigen Versuchen ausreichend war, um in der Platte ein genügend homogenes, konstant bleibendes elektrisches Feld zu erhalten, und gleichzeitig zu prüfen, ob die Platte in ihrer Breitenausdehnung an allen Stellen die

gleiche L.-F. besaß, d. h. in erwünschter Weise homogen war. Deshalb wurde bei den nun folgenden wieder an je einem Tage angestellten Versuchen eine kleinere Graphitelektrode (Durchmesser 1,98 cm) und später eine noch kleinere (Durchmesser 1,41 cm) verwendet; die Glyzerinelektrode blieb unverändert erhalten. Dadurch erlitt der ursprüngliche Stromquerschnitt zuerst eine Verkleinerung im Verhältnis von 1,22 zu 1,00 und darauf von 2,88 zu 1,00. Die bei diesen im Verlauf von einem Monat angestellten Versuchen erhaltenen Stromstärken lassen nun nach Reduktion der Werte auf den ursprünglichen Stromquerschnitt folgendes erkennen. Alle Werte, sowohl die nach der ersten, wie die nach der zweiten Verkleinerung der Graphitelektrode erhaltenen, sind, von einigen Unregelmäßigkeiten abgesehen, untereinander ziemlich übereinstimmend, aber deutlich größer (im Mittel betrug die Stromstärke etwa 18,8 Skalenteile) als der vor der Verkleinerung erhaltene (12—13 Skalenteile), dagegen dem allerersten (18,7 Skalenteile) gleich. Aus der Übereinstimmung der Werte untereinander möchte ich schließen, erstens, daß zwischen dem durch Verkleinerung ausgeschalteten Gebiet des Stromquerschnitts und dem noch erhaltenen keine *größeren* von Inhomogenität herrührenden Verschiedenheiten in der Platte vorhanden waren, und zweitens, da die zweite bedeutendste Verkleinerung der Elektrode keine wahrnehmbare Veränderung in den Werten hervorbrachte, daß jedenfalls zuletzt das Verhältnis zwischen der Größe der oberen Glyzerinelektrode und der unteren Graphitelektrode groß genug war, um ein für das vorliegende Bedürfnis genügend homogenes, unveränderliches elektrisches Feld zu gewährleisten (vgl. die Größenverhältnisse beider Elektroden bei den später verwendeten Ag-belegten Platten, S. 37). Für die eingetretene Vergrößerung der Werte nach der vorgenommenen Elektrodenverkleinerung lassen sich folgende Gründe angeben: Erstens vielleicht vorhandene *kleinere* Inhomogenitäten, zweitens die durch Abschleifen verringerte Dicke der Platte; diese Ursachen reichen aber m. E. nicht aus, um die ganze Vergrößerung zu erklären, dagegen wohl ein dritter Umstand: die Nichtberücksichtigung des Einflusses der Breite des Isolierringes bei der Reduktion der Stromquerschnitte, sowie die Unsicherheit in der Bestimmung der Größe der auf rauher Fläche angebrachten Graphitelektrode.

Die oben erwähnte langzeitige Abnahme der Stromstärke, die sich bei Versuchen zeigte, die innerhalb einer längeren Zeit (von manchen Tagen) dann und wann mit der ununterbrochenen in ihrem verdunkelten Kästchen verbliebenen Platte angestellt wurden, erstreckte sich, wie gesagt, sowohl auf die ersten 15 Sekunden als auf die folgende Zeitperiode der Versuche und ebenso auf die Entladungsversuche. Der Vermutung nachgehend, daß diese Abnahme vielleicht von einer allmählichen Veränderung in der Beschaffenheit der Graphitelektrode oder von einem Schlechterwerden des Kontaktes an der Platte herrührte, erneuerte ich ein paarmal die Graphitbelegung — nicht aber die Glyzerinbelegung — und reinigte die Kontakte. Diese Prozesse hatten aber keinen ersichtlichen Erfolg, und da eine andere Ursache für die Abnahme nicht gefunden werden konnte, so mußte dieselbe bis auf weiteres unerklärt bleiben.[1]) Ebenso unerklärt blieben Unregelmäßigkeiten, plötzliche kleine Sprünge in den Werten der Stromstärken von einem Versuch zum anderen. Während eines Versuchs traten solche Störungen niemals auf, wie z. B. aus der Tab. I ersichtlich ist.

Das Urteil, das man sich aus dem Mitgeteilten über die Zuverlässigkeit des benutzten Verfahrens bilden kann, wird verschieden ausfallen, je nach dem Gesichtspunkt, von dem man dabei ausgeht. Vergleicht man die Versuchsergebnisse mit denen, die bei der Bestimmung der L.-F. von wässeriger Lösung von Salzen und Säuren zu erhalten sind, so wird man bezüglich der Genauigkeit jener wenig zufrieden sein. Vergleicht man andererseits die mitgeteilten Ergebnisse mit denen, die bisher auf demselben Gebiete, d. h. bei der Untersuchung der L.-F. des NaCl und ähnlicher schlecht leitender Körper gewonnen wurden, so wird man wohl doch zugeben können, daß die angewendete Versuchsanordnung imstande gewesen ist, wesentlich zuverlässigere Resultate zu liefern als die früheren und um außerdem die weiteren Ergebnisse der Arbeit, von denen in den folgenden Abschnitten die Rede sein wird, als sicher gestellt erscheinen zu lassen.

Ich verzichte hier auf die Wiedergabe von einigen anderen Ergebnissen, die bei dieser langen Untersuchung erhalten

1) Vgl. eine spätere Untersuchung über diesen Gegenstand S. 36 u. ff.

wurden, da sich noch eine andere Gelegenheit bieten wird, sie zu besprechen.

Eine zu beantwortende Frage war, wie verhalten sich die nach einer bestimmten Ladungszeit pro Zeiteinheit erhaltenen Elektrometerausschläge zu den angelegten Spannungen? Die folgenden, einer von mehreren zu demselben Zweck angestellten Versuchsreihen entnommenen Werte, ergaben in genügend überzeugender Weise Proportionalität zwischen Stromstärke und Spannung innerhalb des angewendeten Spannungsbereichs. Sie wurden mit derselben Platte erhalten, die die Werte der Tab. I lieferte, nachdem ihre Dicke durch Abschleifen auf 0,188 cm verringert worden war (vgl. S. 25). Die direkt aufeinander folgenden Ladungs- und Entladungsversuche wurden in ähnlicher ausführlicher Weise gemacht wie bei dem oben mitgeteilten Versuch, nur mit wesentlich verkürzten Versuchspausen (etwa je ein Tag). Es genügt wohl hier, die folgende Zusammenstellung mitzuteilen.

Tabelle II.

Temperatur ca. 20,5°.

Elektrometerausschläge in Skalenteilen.[1])

In der Zeit von 1 bis 16 Sek.	0,6 (1,5)	7,0 (7,7)	15,2 (15,5)	28,0
„ „ „ „ 16 „ 121 „	1,9 (2,0)	9,7 (9,8)	19,1 (19,7)	29,5
Zur Zeit 7 Min. in 1 Min. . .	0,2 (0,2)	1,1 (1,0)	2,3 (2,1)	3,1
„ „ 5 „ „ 4 „ . .	unmerkl. (0,0)	unsicher (0,1)	0,2 (0,3)	0,4
„ „ 24 „ „ 4 „ . .	„ (0,0)	unmerkl. (0,1)	0,2 (0,3)	0,4
Spanung in Volt	103	514	1024	1540

Die eingeklammerten Zahlen sind aus den Werten der letzten Kolonne unter Annahme der erwähnten Proportionalität berechnet; ein Vergleich dieser Zahlen mit den daneben stehenden beobachteten Stromstärken zeigt, daß keine Andeutung für das Vorhandensein eines Sättigungsstromes innerhalb der angewendeten Spannungen (hier ebensowenig wie bei anderen darauf hingerichteten Versuchen) zu bemerken ist. Indessen möchte ich noch nicht mit aller Bestimmtheit das Vorhandensein eines Sättigungsstromes verneinen, und zwar aus folgenden Gründen. Im folgenden werden wir zu

1) Nach Berücksichtigung des Elektrometerganges.

der Anschauung gelangen, daß der Elektrizitätszufuhr der Platte zum Elektrometer zwei Ursachen zugrunde liegen, von denen die eine — wahrscheinlich die sogenannte Rückstandsbildung — im Anfang der Ladung überwiegend neben einer zweiten — einer Art von Leitung — tätig ist und daß die erstere allmählich an Einfluß abnimmt und dadurch die zweite mehr und mehr hervortreten läßt. Für den ersten Vorgang einen Sättigungsstrom zu erwarten, liegt zunächst kein Grund vor; dagegen könnte ein solcher bei dem zweiten Vorgang vielleicht doch vorhanden gewesen, aber nicht wahrgenommen worden sein, weil die ihn messenden Werte — die nach längerem Anlegen der Spannung erhaltenen Elektrometerausschläge — zu klein und zu unsicher sind. Ich kann deshalb nur das Gesagte gewährleisten: daß sich nämlich in keinem Falle eine Andeutung für das Bestehen eines Sättigungsstromes gezeigt hat, trotzdem vielfach danach gesucht wurde.

Mehrfach war bei verschiedenen NaCl-Platten Gelegenheit zu beobachten, daß die von einer geladenen Platte in einer gewissen Zeit ihrer unteren Belegung zugeführte Elektrizitätsmenge unter sonst gleichen Versuchsbedingungen nach Verringerung der Plattendicke um so größer war, je geringer die Dicke, und zwar paßten sich die Ergebnisse dieser Versuche recht gut der Regel an, daß diese Mengen der Dicke umgekehrt proportional sind, sowohl für die stärkere Anfangszufuhr, wie für die so wesentlich kleinere Zufuhr nach längerer Ladung. Eine genauere Prüfung dieser Gesetzmäßigkeit hat aber nicht stattgefunden.

Die auch von Curie wahrgenommene Tatsache, daß die L.-F. des unbestrahlten NaCl mit zunehmender Temperatur zunimmt, konnte häufig an vielen Steinsalzpräparaten von uns bestätigt werden. Da es nur sehr wenige Faktoren gibt, durch die man die L.-F. beeinflussen kann, war es mit Rücksicht auf das Verlangen, über den Vorgang der Elektrizitätsbewegung im NaCl etwas Näheres zu erfahren, besonders erwünscht, diesen Einfluß genauer kennen zu lernen. Es war aber im Anfang nicht leicht, zu einigermaßen befriedigenden Ergebnissen in bezug auf den Temperatureinfluß zu gelangen, und erst gegen Ende der Untersuchung erhielt ich einen richtigen Einblick in diese Verhältnisse. Der Grund für die Schwierig-

keiten lag einmal in der Unsicherheit, die lange Zeit in erheblichem Maße den Versuchen anhaftete, dann aber auch in den bedeutenden Fehlern, die, wie auf S. 20 u. 21 mitgeteilt, eine Temperaturänderung der Platte und ihrer Umgebung bewirken können, und schließlich in dem Fehlen einer geeigneten Vorrichtung, um eine bestimmte Temperatur auf eine genügend lange Zeit konstant zu halten. Erst sehr spät habe ich, wie weiter unten mitgeteilt werden soll, diese Schwierigkeiten bis zu einem gewissen Grade überwinden können. Von den älteren Versuchen führe ich zunächst eine bei ziemlich hohen Temperaturen angestellte Reihe an. Die zu diesem Zwecke gewählte und nur mit Graphit versehene, unbestrahlte NaCl-Platte wurde in einer eigens angefertigten Vorrichtung aufgestellt und mittels elektrischer Heizung langsam erwärmt und darauf langsam abgekühlt. Zur Temperaturbestimmung diente ein Thermoelement; eine Spannung von — 200 Volt war dauernd angelegt und mit der Messung der in je 15 Sekunden erfolgenden Elektrometerausschläge wurde erst etwa 4 Stunden nach Anlegen dieser Spannung, in welcher Zeit die Temperatur allmählich auf 65° gestiegen war, angefangen. In der folgenden halben Stunde stieg die Temperatur auf 130° und fiel dann in einer weiteren Stunde wieder auf 90°; während dieser Zeit wurden folgende Messungen gemacht.

Tabelle III.

Temperatur		65°	75°	85°	95°	110°	120°	128°	130°	128°	117°	106°	90°
Elektrometerausschläge[1]) in 15 Sek.	beob.	4,0	10	21	38	90	160	220	288	180	105	58	16
	berechn.	6,5	12	21	38	90,5	162	229	288	200	112	51	16

Man erkennt, daß die bei steigender Temperatur erhaltenen Werte kleiner sind als die entsprechenden bei abnehmender Temperatur gefundenen: der Anstieg der L.-F. ist verhältnismäßig langsamer als der Abstieg, was unzweifelhaft hauptsächlich der bei dauernd angelegter Spannung zunehmenden „Polarisation" zuzuschreiben ist. Außerdem ist ersichtlich,

1) Die zu den höheren Temperaturen gehörigen großen Werte wurden aus kleineren berechnet, die nach Einschaltung einer Zusatzkapazität zur Elektrometerleitung erhalten sind.

daß die L.-F. beschleunigt mit der Temperatur wächst und es wurde deshalb versucht, ob sich der Zusammenhang beider durch den Ausdruck $\varkappa = a\,c^t$ ($\varkappa$ L.-F., t Temperatur, a und c Konstanten) darstellen ließe. Für die Berechnung von a und c wurden für zunehmende Temperaturen die Wertepaare bei 95° und 130°, für abnehmende Temperatur die Werte bei 130°, und 90° zugrunde gelegt. Der Erfolg dieser Rechnung ist nun, wie die „berechneten Werte" zeigen, nicht besonders befriedigend, was auch in Anbetracht des erwähnten Einflusses der Polarisation und außerdem der in der Temperaturmessung vorhandenen Unsicherheit wohl zu erwarten war. Immerhin genügen die Bestimmungen, um einen ungefähren Wert des Temperaturkoeffizienten $1/\varkappa\; d\varkappa/dt$ zu erhalten. Als solcher ergibt sich aus den Versuchen bei 95° und 130°: 0,06 und aus den bei 130° und 90°: 0,07.

Eine Wiederholung der Untersuchung in einem so großen Temperaturintervall, aber mit besserer Vorrichtung zur Herstellung, Konstanthaltung und Messung der Temperaturen und nicht mit dauernd, sondern von Temperatur zu Temperatur jedesmal nur kurz angelegter Spannung wäre erwünscht.

Weitere Versuche zu einer vorläufigen Bestimmung des Temperaturkoeffizienten wurden in dem kleineren Temperaturbereich angestellt, der sich durch Änderung der Temperatur im Zimmer erreichen ließ. Die älteren dieser Bestimmungen leiden in Anbetracht der Kleinheit der miteinander zu vergleichenden Stromstärken sowie der geringen Temperaturunterschiede besonders unter den Fehlern und Unstimmigkeiten, von denen oben die Rede war. Außerdem war auch die Sorgfalt, mit der die Versuche angestellt wurden, nicht besonders groß, weil anfänglich das Augenmerk mehr auf andere Dinge gerichtet war, als auf die Bestimmung des Temperaturkoeffizienten, und weil es mir erst allmählich bekannt wurde, daß in bezug auf Genauigkeit mehr zu erreichen war, als ich anfänglich durch irreführende Ergebnisse annahm. Immerhin konnte ich trotz dieser manchmal vorhandenen geringeren Übereinstimmung aus dem ziemlich großen Beobachtungsmaterial für eine Beurteilung des Temperatureinflusses nützliche Schlüsse ziehen, die sich dann auch bei einer später unternommenen exakteren Nachprüfung bestätigten. Ich führe eine Auswahl dieser älteren Versuche hier an.

Eine im Vorhergehenden nicht besonders erwähnte Platte lieferte in dem Temperaturintervall von 17,1° bis 29,8° Elektrometerausschläge von entsprechend 1,0—6,8 Skalenteilen in je 4 Minuten, nachdem sie etwa $4^1/_2$ Stunden dauernd geladen war. Aus den beobachteten Werten ergibt sich der Temperaturkoeffizient zu 0,14.

Eine der beiden später noch zu erwähnenden, aus einem Stück gespaltenen Platten ergab etwa 10 Tage nach Anfang der Ladung bei den Temperaturen von 14,0° und 24,3° Stromstärken von 0,5 bzw. 2,4 Skalenteilen in 4 Minuten. Daraus berechnet sich ein Koeffizient von 0,18. Dieselbe Platte hatte vorher bei an verschiedenen aufeinanderfolgenden Tagen angestellten, kurz dauernden Ladungsversuchen in der Versuchsperiode von 16—121 Sekunden nach Anlegen der Spannung den Wert 0,056 für den Temperaturkoeffizienten geliefert.

Für die „alte" Platte, über deren Verhalten im Laufe längerer Zeit vorhin berichtet wurde, leite ich aus Messungen, die mehrere Tage nach Anlegen der Dauerladung bei Temperaturen, die zwischen 20,1° und 25,0° lagen, gemacht wurden, den Wert 0,12 ab. Aus den späteren vielfachen, kurz dauernden Ladungsversuchen mit dieser Platte läßt sich mit Benutzung des dabei häufig vorkommenden Wechsels in der Zimmertemperatur von wenigen Graden einige Male der Temperatureinfluß berechnen. Von den so gefundenen Werten von $1/\varkappa \; d\varkappa/dt$ gebe ich folgende wieder: 0,050, 0,042, 0,041, 0,057; alle wurden aus Elektrometerausschlägen abgeleitet, die in der Zeit von 16—121 Sekunden nach Anlegen der Spannung beobachtet sind.

Überblickt man diese Ergebnisse, so findet man das bemerkenswerte Resultat, daß bei allen Platten die kleineren Werte des Temperaturkoeffizienten gegen Anfang der Ladungszeit (16—121 Sekunden), die größeren dagegen nach stunden- oder tagelanger Ladung erschienen. Da dieser Wechsel in der Größe des Temperaturkoeffizienten noch zweimal bei einer und derselben Platte wahrgenommen wurde, so ist er nicht durch einen Unterschied in dem gebrauchten Material verursacht.[1]) Für die Verschiedenheit der Werte läßt sich

1) Der aus den oben zuerst besprochenen Versuchen bei *höherer* Temperatur abgeleitete Wert 0,06—0,07 scheint in Anbetracht der $4^1/_2$stündigen Ladungsdauer in Widerspruch zu stehen mit dem so-

nicht etwa als Grund anführen, daß im ersten Falle — nach kurzer Ladungsdauer — die Elektrometerausschläge — die ja, wie erwähnt, wegen der Bewegungsverhältnisse des Nadelsystems den zugeführten Elektrizitätsmengen nicht genau proportional sein können — diese Mengen in etwas anderem Maßstabe messen als im zweiten Falle. Denn diese Verschiedenheit in der Messung ist erfahrungsgemäß viel zu gering, um die bedeutenden Unterschiede in den Werten des Temperaturkoeffizienten erklären zu können. Als Ursache kann nur eine Abhängigkeit dieses Koeffizienten von der Ladungsdauer vermutet werden.

Wenn dem wirklich so wäre, so ließen sich vielleicht doch einige Schlüsse ziehen, die, wenn auch kein vollständig genügendes, so doch etwas mehr Licht bringen würden, um die bisher unbekannten elektrischen Vorgänge, die während der Ladung, bzw. der Entladung in einer Steinsalzplatte sich abspielen, einigermaßen verstehen zu können. Es lag mir deshalb daran, die ausgesprochene Vermutung auf ihre Richtigkeit noch weiter zu prüfen. Zu diesem Zwecke wurden gegen Ende der ganzen Untersuchung mit einer neuen NaCl-Platte mit aller Sorgfalt Versuche unternommen, über die unten (vgl. S. 69) im Zusammenhang mit anderen Fragen ausführlich berichtet werden soll. Sie ergaben eine volle Bestätigung der aus den oben erwähnten, etwas unsicheren Versuchen abgeleiteten Folgerung: eine Zunahme des Temperaturkoeffizienten mit der Ladungsdauer.

In diesem Verhalten des Temperaturkoeffizienten möchte ich eine Andeutung erblicken für das Vorhandensein von zwei der Natur nach verschiedenen Vorgängen, aus denen die Elektrizitätsbewegung in der Platte sowohl bei der Ladung als bei der Entladung besteht. Weiter unten (S. 69) wird dieser Gegenstand nochmals besprochen werden.

---

eben Gesagten. Ich möchte diesen Widerspruch beheben durch die Annahme, daß der Temperaturkoeffizient mit zunehmender Temperatur kleiner wird, für welche Annahme in der angegebenen Versuchsreihe selbst schon eine Andeutung gefunden werden kann. Die Beziehung $\varkappa = ac^t$ soll deshalb auch nur auf kleine Temperaturintervalle angewendet werden.

Eine große Anzahl von Steinsalzpräparaten verschiedener Herkunft wurde auf ihre L.-F. untersucht, um etwas über die Frage zu erfahren, ob man in dieser Beziehung von einer Materialkonstante des NaCl überhaupt sprechen darf oder nicht.

Ich führe zunächst einige Ergebnisse an, die mit zwei Platten erhalten wurden, die durch Spaltung einer dickeren Platte aus einem klaren, keine Fehler aufweisenden Kristall hergestellt wurden, demnach ursprünglich im Kristall dicht benachbart waren. Da sich eine ziemlich beträchtliche L.-F. ergab, wurde mit Rücksicht auf die Curiesche Vermutung, daß Feuchtigkeit etwa die Ursache einer größeren L.-F. sein könnte, die eine Platte auf etwa 1 Stunde vorsichtig auf etwa 300° im elektrischen Ofen in einem Sandbad erhitzt und erst dann mit Glyzerin- und Graphitbelegungen versehen. Die darauf folgenden Ladungs- und Entladungsversuche ließen aber keine Andeutung einer Verschiedenheit der L.-F. der nicht erhitzten, vorher auch nicht im Exsikkator besonders getrockneten und der der erhitzten Platte erkennen. Beide Platten zeigten sowohl zu Anfang der Ladung wie auch später (nach 1—2tägiger Ladung) innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmendes Verhalten. Die für die Anfangszeit geltende, auf gleiche Dicke, gleichen Querschnitt und gleiche Ladung reduzierte L.-F. ergab sich doppelt so groß, die für die spätere Zeit geltende etwa 30mal so groß als die L.-F. der „alten" Platte. Im übrigen zeigten sich die gleichen Erscheinungen wie bei jener Platte, d. h. eine langzeitige, durch Abschleifen und Neugraphitieren nicht rückgängig zu machende Abnahme der L.-F. und außerdem die beschriebenen kleineren Störungen. Erwähnenswert ist noch, daß ein Vertauschen von positiver und negativer Ladung keine besondere Verschiedenheiten in den Ergebnissen lieferte.

In ganz ähnlicher Weise verhielt sich eine Anzahl von anderen parallel der Würfelfläche orientierten Platten sehr verschiedener Herkunft, zum Teil nach vorhergegangener starker Erhitzung, zum Teil ohne weiteres benutzt. Ein Einfluß des Erhitzens ließ sich wieder nicht mit Bestimmtheit erkennen. Die gefundenen Unterschiede im Verhalten sind ebenfalls immer kleiner für die Anfangszeiten als für die Endzeiten der Ladung, was möglicherweise seinen Grund in der erwähnten großen Unsicherheit dieser kleinen End-

werte haben kann, das mir aber doch wieder, wie das vorhin über den Temperatureinfluß auf die L.-F. Mitgeteilte, darauf hinzudeuten scheint, daß die elektrischen Vorgänge in der Platte zu Anfang bzw. gegen Ende der Ladung nicht bloß quantitativ, sondern auch qualitativ voneinander verschieden sind.

Angesichts dieser Sachlage und des Umstandes, daß Braun mit wesentlich primitiveren Mitteln arbeitete als wir, muß ich seiner Angabe, daß die L.-F. des NaCl senkrecht zur Würfelfläche etwa doppelt so groß sei als senkrecht zur Oktaederfläche, für noch nicht genügend begründet halten.

(Der Inhalt des folgenden Abschnittes gehört zwar zu dem Kapitel über L.-F. des unbestrahlten NaCl, zum besseren Verständnis einiger Angaben empfiehlt es sich aber vielleicht, zuerst die später folgenden Abschnitte von S. 79 an zu lesen.)

Die Untersuchung hatte zwar zu einigen brauchbaren Ergebnissen geführt; es ließ sich aber nicht verkennen, daß manchmal Unstimmigkeiten und unerwartete Resultate aufgetreten waren, die zwar die Sicherheit jener Ergebnisse nicht gefährden, die aber doch, weil sie nicht erklärt werden konnten, das unbehagliche Empfinden bei mir wecken mußten, daß bei den Leitungsversuchen Faktoren, vielleicht Fehlerquellen, wirksam waren, die ich nicht kannte, und die mich deshalb verhinderten, das Verfahren vollständig zu beherrschen. Eine solche Erscheinung ist z. B. die mehrfach beobachtete, im Laufe einer längeren Zeit (von manchen Wochen) eintretende, allmähliche langsame Abnahme der L.-F. des nicht bestrahlen NaCl. Ich bin deshalb gegen Ende der Arbeit nochmals auf die Suche nach solchen Einflüssen gegangen. Das in diesen Abschnitten Mitgeteilte stellt somit teilweise eine Prüfung, aber auch eine Vervollständigung des Vorhergehenden dar.

Ich nahm zu dieser Untersuchung wegen ihrer tadellosen Beschaffenheit eine senkrecht zur Oktaedernormale geschliffene, hochpolierte NaCl-Platte, die noch in der Sammlung vorrätig und vor längerer Zeit von Steeg und Reuter bezogen worden war. Sie hat folgende Dimensionen: 3,0 cm : 3,0 cm : 0,295 bis 0,300 cm. Da ein Hauptverdacht sich gegen die Zuverlässigkeit der bisher benutzten Art der Belegung mit eingeriebenem Graphit richtete, deren Gleichmäßigkeit, Kohärenz und Fähig-

keit, erhaltene Spannungen vollständig auf die angedrückte Elektrometerleitung zu übertragen, bezweifelt werden konnte, wurde die neue Platte durch Kathodenbestäubung auf der einen Seite mit Silber kräftig belegt und nachher mittelst eines im Kreise geführten feinen Meißels mit einem 0,02 cm breiten, von Silber befreiten Isolierring von 1,70 cm äußerem Durchmesser versehen. Ein Anschleifen der Platte, wie es bei einer Belegung mit Graphit nötig gewesen wäre, brauchte somit nicht vorgenommen zu werden. Auf der anderen Seite erhielt die Platte in früher beschriebener Weise ein mit einer wenige Millimeter dicken Schicht einer gesättigten Lösung von NaCl in reinem Glyzerin gefülltes, 2,5 cm weites Glaströgchen. Bei diesem Größenverhältnis der Durchmesser der beiden Elektroden waren bei dieser Platte für das Zustandekommen eines homogenen und unveränderlichen elektrischen Feldes noch günstigere Verhältnisse vorhanden als bei der Platte, über deren Verhalten im Anfang dieser Arbeit berichtet wurde. Gegen die sonst sehr empfehlenswerte Anwendung einer Silberbelegung bei *allen* zu untersuchenden Steinsalzplatten sprechen zwei Gründe: einmal die Umständlichkeit der Herstellung, aber mehr noch der nicht zu vermeidende Übelstand, daß die Platte bei der Kathodenbestäubung wahrscheinlich infolge der dabei auftretenden weichen X-Bestrahlung beträchtlich lichtempfindlich wird. Um diese Störung im vorliegenden Falle zu beseitigen, konnte das sonst als sehr wirksam befundene Mittel, starkes Erhitzen, nicht angewendet werden, weil die Gefahr nahe lag, daß dadurch die Silberschicht Schaden erleiden würde; deshalb wurde das andere, allerdings sehr zeitraubende Verfahren benutzt: die Platte blieb ungefähr 1 Jahr lang und dann, nachdem sich gezeigt hatte, daß sie ihre Aktivität noch nicht verloren hatte, noch weitere 17 Monate im Exsikkator, häufig vom Tageslicht beleuchtet, unbenutzt liegen. Nach dieser Zeit hatte die Platte ihre Lichtempfindlichkeit fast vollständig und gleichzeitig ihre bei der Kathodenbestäubung erworbene schwachgelbe Färbung verloren.

Es sei nun zunächst durch ausführliche Mitteilung eines Versuchs das bewährte Schema angegeben, nach dem bei allen Versuchen, wenn kein besonderer Grund für eine Abänderung vorlag, verfahren wurde.

Tabelle IV.

30. Dez. Elektrometer gestern nachgeladen.
9^h 35 Min. Skalenlampe angezündet.
Umgerührt.

$V = 0$, dunkel.

Zeit	Zeigerstellung
9^h 44 Min. 0 Sek.	21,7 (Nullp.)
9^h 45 „ 0 „	21,6
9^h 48 „ 0 „	21,4
9^h 49 „ 0 „	21,3
	21,7 (Nullp.)
	−0,4

Elektrometergang.

Zeit	Zeigerstellung
9^h 49 Min. 15 Sek.	21,7 (Nullp.)
9^h 50 „ 15 „	21,7
9^h 53 „ 15 „	21,9
9^h 54 „ 15 „	22,0
	21,8 (Nullp.)
	+0,2

Temp.: $t = 19{,}7°$; Spannung: + 1530 Volt.

9^h 54 Min. 30 Sek. Anlegen der Spannung (dunkel).

Nach:	Zeigerstellung	Nach:	Zeigerstellung
1 Sek.	21,8 (Nullp.)	151 Sek.	21,8 (Nullp.)
6 „	24,4	181 „	23,4
11 „	25,6	211 „	25,1
16 „	26,5	241 „	26,7
31 „	28,1	271 „	28,1
46 „	29,6	301 „	29,4
61 „	30,9	331 „	30,8
91 „	33,0	361 „	32,0
121 „	34,9		

Daraus: Elektrometerausschlag in der Zeit nach Anlegen der Spannung:
1—16 Sek.: 4,7 Skt., 16—121 Sek.: 8,4 Skt., 151—331 Sek.: 9,0 Skt.

10^h 1 Min. 0 Sek. Erdung (dunkel).

Nach:	Zeigerstellung	Nach:	Zeigerstellung
1 Sek.	21,8 (Nullp.)	151 Sek.	21,8 (Nullp.)
6 „	19,5	181 „	21,2
11 „	18,5	211 „	20,7
16 „	17,8	241 „	20,2
31 „	16,7	271 „	19,9
46 „	15,9	301 „	19,5
61 „	15,2	331 „	19,1
91 „	14,4		
121 „	13,8		

Daraus: Elektrometerausschlag in der Zeit nach der Erdung:
1—16 Sek.: 4,0 Skt., 16—121 Sek.: 4,0 Skt., 151—331 Sek.: 2,7 Skt.

Temp. $t = 20{,}0°$.

Empfindlichkeit des Elektrometers: 150 Skalenteile.

Rückgang der Nadelstellung von 150 Skt. in 2 Min.: 6,2 Skt. Daraus Isolationsfehler etwa 4,5 Skt. in 2 Min.

In der Regel, und auch jetzt, hatte vor jedem Ladungsversuch die in ihrem Kästchen befindliche Platte nach dem vorhergegangenen Versuch ungefähr 24 Stunden lang im Dunkeln und mit Ableitung beider Elektroden zur Erde gestanden. Am Vorabend des Versuchs war die Nadelladung etwas verstärkt (vgl. S. 6), um die am Versuchstag erwünschte Elektrometerempfindlichkeit zu erhalten. Die Einfadenlampe, deren Bild als Lichtzeiger für das Elektrometer diente, wurde immer etwa 10 Minuten vor einem Versuch angezündet (vgl. S. 6). In dieser Zwischenzeit wurden vorsichtshalber durch kurzes Verbinden der Elektrometerleitung mit dem Normalelement und rasch darauf folgender Erdung ein paar größere, nur sehr kurz dauernde Ausschläge der Nadel erzeugt („umgerührt" der Tab. IV), mit der Absicht, dadurch für die bei den folgenden Versuchen zu erwartenden Ausschläge eine von Versuch zu Versuch möglichst gleichbleibende Dämpfung der Nadelbewegung in der H_2SO_4 des Elektrometers zu erreichen. Nach dieser Operation wurde das Normalelement von der Wippe W_2 abgetrennt, um den auf S. 7 erwähnten kleinen Ausschlag beim folgenden Umlegen der Wippe zu vermeiden. Auch eine Beobachtung der Plattentemperatur, sowie der Ladespannung fand in dieser Zwischenzeit statt. Darauf folgte eine Bestimmung des in 5 Minuten auftretenden Elektrometerausschlages, wenn das im übrigen isolierte Quadrantenpaar mit der stets verdunkelten Platte verbunden war, und zwar bei Ableitung der Glyzerinbelegung zur Erde, „$V = 0$" der Tabelle (vgl. S. 16) und dann nach Abtrennung der Platte und ihrer Zuleitung von der Elektrometerleitung die Bestimmung des in 5 Minuten stattfindenden „Elektrometerganges". Nachdem die Platte wieder mit dem Elektrometer verbunden worden war, fing durch Anlegen der Spannung an die Platte der eigentliche Ladungsversuch an. Der vor der Skala sitzende Beobachter zog eine Sekunde später die Wippe W_2 und bestimmte dann von Zeit zu Zeit die Stellung des Lichtzeigers auf der Skala: im Anfang der Ladungszeit (1—16 Sekunden) alle 5 Sekunden, nachher (16—121 Sekunden) alle 15 Sekunden und noch später (151—361 Sekunden) alle 30 Sekunden. Um den geringen Einfluß des Isolationsmangels noch zu verringern, wurde zur Zeit 121 Sekunden das Elektrometer und die Plattenbelegung auf 30 Sekunden lang geerdet,

so daß die nun auftretenden Ausschläge wieder wie zu Beginn ihren Anfang von der Nullstellung des Elektrometers aus nahmen. Wie aus der Tab. IV ersichtlich, ergab der Versuch in der ersten Periode von 15 Sekunden: 4,7 Skalenteile, in der zweiten von 105 Sekunden: 8,4 Skalenteile und in der dritten von 180 Sekunden: 9,0 Skalenteile; mit Ablesungsfehlern oder Unregelmäßigkeiten im Betrage von 0,1, selten von 0,2 Skalenteilen, ist zu rechnen.

In entsprechender Weise wurde bei der folgenden Bestimmung des Entladungsstromes verfahren. Es ergaben sich dabei in der ersten Periode von 15 Sekunden 4,0 Skalenteile, in der zweiten von 105 Sekunden 4,0 Skalenteile und in der dritten von 180 Sekunden 2,7 Skalenteile.

Das Superpositionsgesetz trifft für die ersten Versuchszeiten in befriedigender Weise zu, indem der Ausschlag in den ersten 15 Sekunden: 4,0 Skalenteile, vermehrt um den beim Entladungsversuch zuletzt in 15 Sekunden erhaltenen: $^1/_2 \cdot 1{,}2 = 0{,}6$ Skalenteile, praktisch dasselbe Resultat gibt, das in den ersten 15 Sekunden beim Ladungsversuch erhalten wurde: 4,7 Skalenteile. Eine *so* gute Übereinstimmung findet sich nicht immer, was durch die oben erwähnte Unsicherheit in der Zeitmessung der *einen* Sekunde, die zwischen dem Anlegen der Spannung und dem Beginn des Elektrometerausschlages vergehen soll usw., verursacht wird. Die in den auf die ersten 15 Sekunden folgenden Zeitabschnitte erhaltenen Ausschläge fügen sich dem Gesetz weniger gut; die bei der Erdung gefundenen sind immer nicht unwesentlich kleiner, als man nach dem Gesetz erwarten würde. Über das Superpositionsgesetz wird wohl noch eine weitere Mitteilung erforderlich sein. Ich möchte nicht unterlassen, auf die große Gleichmäßigkeit des zeitlichen Verlaufs der Elektrometerausschläge bei diesen Versuchen — die übrigens auch bei allen anderen vorhanden war — aufmerksam zu machen.

Die nochmals gemessene Temperatur betrug 20,0°; sie war folglich während des Versuchs um 0,3° gestiegen. Es liegt hier der in letzter Zeit seltene Fall einer wenig konstant gebliebenen Temperatur vor, und daraus entsteht eine immerhin noch merkliche Unsicherheit der Versuchsergebnisse (vgl. unten). Am Schlusse des Versuchs wurde meistens, in der letzten Zeit immer, eine Bestimmung der Elektrometerempfindlichkeit

(Ausschlag für 1,018 Volt) und eine Prüfung der Isolation vorgenommen. Im vorliegenden Falle fand sich bezüglich der Isolation folgendes. Ein durch Verbindung mit dem Normalelement erzeugter, zur Vermeidung des Einflusses der elastischen Nachwirkung der Nadelaufhängung etwa 2 Minuten konstant gehaltener Ausschlag von 150 Skalenteilen nahm in 2 Minuten um 6,2 Skalenteile regelmäßig ab, wenn die Platte mit der von der Erde isolierten Elektrometerleitung verbunden war. Von diesem Betrag sind etwa 1,5 Skalenteile abzuziehen, die auf Rechnung kommen des noch weiterlaufenden Polarisationsstromes, so daß als Isolationsfehler bei einem Ausschlag von 150 Skalenteilen etwa 4,5 Skalenteile in 2 Minuten in Betracht kommen.[1])

Im vorliegenden Falle beläuft sich also nach einer annähernden Rechnung die Korrektion für eine mangelhafte Isolation bei den drei oben angegebenen Werten der drei Perioden des Ladungsversuches: praktisch 0, bzw. + 0,1 Skalenteile, bzw. + 0,2 Skalenteile, also etwas mehr als die zugelassenen Ablesungsfehler. Die vielen Isolationsprüfungen ergaben, daß dieser Fehler im Laufe der Untersuchung mit der Ag-belegten Platte immer sehr gering war; da außerdem dieser Fehler den beobachteten Ausschlägen unbedenklich proportional gesetzt werden kann, und weil es bei dieser Arbeit wesentlich nur darauf ankam, das Verhältnis der verschiedenen in untereinander gleichbleibenden Versuchsperioden auftretenden Ausschläge kennen zu lernen, so habe ich die Ergebnisse dieser Isolationsprüfungen nicht in der folgenden Tabelle aufgenommen und die betreffende, ohnehin so geringfügige Korrektion nicht angebracht.

Viele Ladungs- und Entladungsversuche der beschriebenen Art wurden mit der gleichen Platte im Laufe einer längeren Zeit gemacht, und zwar meistens nur einer an je einem Tage, um es jedesmal mit einer Platte zu tun zu haben, die möglichst wenig von einem vorhergehenden Versuch beeinflußt und

1) Die dunkel gehaltene Steinsalzplatte selbst isolierte vorzüglich, wie aus der weiteren Beobachtung hervorging, daß der Rückgang des Lichtzeigers in 2 Minuten auch 5,1 Skalenteile von 150 Skalenteilen betrug, nachdem die Platte von der Elektrometerleitung abgeschaltet war. Die Ursache des von der Luftfeuchtigkeit beeinflußten Isolationsfehlers fand sich in dem Hartgummi, mit dem die Klemmschraube, die die Leitung an das Elektrometer befestigt, isoliert sein sollte.

deshalb geeignet war, um aus dem betreffenden Versuch den Einfluß einzelner Faktoren, deren Wirkung geprüft werden sollte, möglichst sicher erkennen zu lassen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in den Kolonnen 6, 7 und 8 der Tab. V S. 46 u. ff. enthalten, und zwar gebe ich der Kürze halber nur die bei den Ladungsversuchen erhaltenen Werte an und von diesen nur die Summen der einzelnen Ablenkungen, die in je einer der drei oben erwähnten Zeitperioden: 1—16 Sekunden, 16—121 Sekunden und 151—331 Sekunden beobachtet wurden. Der Grund, weshalb ich für die Darstellung in der Tabelle und für einen großen Teil der folgenden Besprechung die ersten 15 Sekunden der Ladungszeit und nicht weniger als ersten Zeitabschnitt wählte, ist hauptsächlich der, daß bei fast allen Versuchen der Tabelle die Nadelbewegung erst in dieser Zeit schon genügend gleichmäßig und langsam geworden war, um einen möglichst zuverlässigen Wert der Stromstärke liefern zu können. In der 9. Kolonne (unter Σ) stehen die Summen der in den beiden letzten Perioden eines jeden Versuchs gefundenen Ausschläge; in der 10. Kolonne (unter Σ') deren für Selbstaufladung korrigierte, auf gleiche Spannung (1530 V.) und gleiche Elektrometerempfindlichkeit (150 Skalenteile) reduzierte Werte. In der 11., 12., 13. Kolonne befinden sich die mit jener Korrektion versehenen, auf gleiche Spannung, gleiche Elektrometerempfindlichkeit reduzierten Werte der in den Kolonnen 6, 7 und 8 verzeichneten Ausschläge, nach Vornahme einer Reduktion auf die gleiche Temperatur von 18°, wobei wegen nicht genügender Kenntnis und der verhältnismäßigen Kleinheit ihrer Temperaturkoeffizienten die Werte der ersten Periode (Kolonne 6) von dieser Korrektion ausgeschlossen wurden. Die 14. Kolonne enthält die Summen Σ'' der beiden letzten Werte der vorstehenden Kolonnen.

Über das Verfahren, das bei diesen Korrektionen und Reduktionen angewendet wurde, sei folgendes berichtet. Wie die Korrektion für die Selbstaufladung von Elektrometer und Platte anzubringen war, wurde schon oben auf S. 17 mitgeteilt. Bei der Reduktion auf gleiche Spannung machte ich von der Gesetzmäßigkeit Gebrauch, daß die „Stromstärken" den angelegten Spannungen proportional sind (vgl. S. 29). Um den Betrag der Korrektion für eine von 150 Skalen-

teilen abweichende Elektrometerempfindlichkeit zu ermitteln, wurde eine Anzahl von Ladungsversuchen mit verschiedener Empfindlichkeit gemacht, von denen einige in der Tab. V (unter 26. II. bis 19. III.) aufgeführt sind. Aus diesen Versuchen konnte mit genügender Sicherheit abgeleitet werden, daß jeder Skalenteil Elektrometerausschlag für jeden Skalenteil mehr oder weniger Elektrometerempfindlichkeit als 150 Skalenteile um 0,0024 Skalenteile vermindert bzw. vermehrt werden muß, um die Stromstärke zu erhalten, die sich unter sonst gleichen Umständen ergeben hätte, wenn die Elektrometerempfindlichkeit bei dem betreffenden Versuche 150 Skalenteile gewesen wäre.

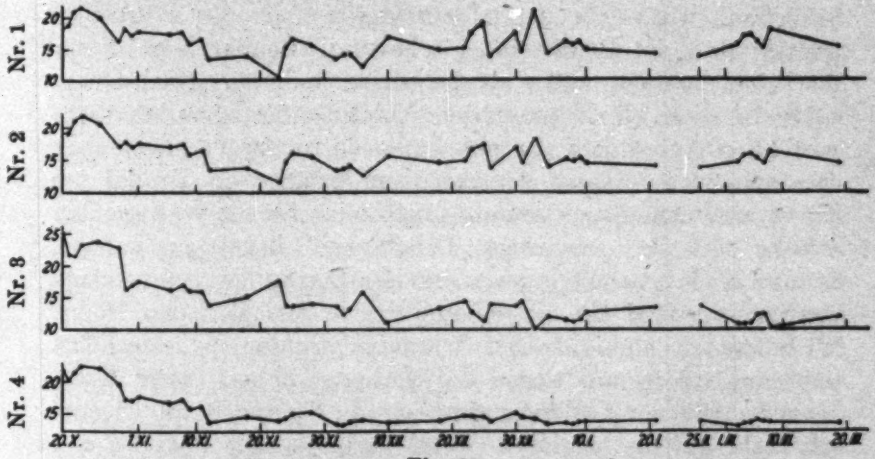


Fig. 2.

Um die Reduktion auf 18,0° vornehmen zu können, mußte zuerst aus den auf gleiche Spannung und gleiche Elektrometerempfindlichkeit reduzierten, von dem Einfluß der Selbstaufladung befreiten Summen der in den Zeiten 16—121 Sekunden und 151—331 Sekunden erhaltenen Elektrometerausschläge (Kolonen Σ' der Tab. V) ein Wert für den Temperatu koeffizienten $1/\varkappa \; d\varkappa/dt$ abgeleitet werden. Zu diesem Zwecke wurden zuerst diese in der Zeit vom 20. X. bis 19. III. erhaltenen Summen mit Ausnahme von wenigen, die von Bestrahlung, Beleuchtung oder Polarisation beeinflußt sind, auf Koordinatenpapier als Ordinaten mit den zugehörigen Zeiten ihrer Beobachtung als Abszissen eingetragen (vgl. die verkleinerte Darstellung in Fig. 2). Aus

dieser Darstellung (Punktreihe 1) ergab sich in gut sichtbarer Weise zunächst, daß bedeutende Abweichungen von einem glatten Verlauf vorliegen. Alsdann wurde versucht, die von einem Temperatureinfluß auf die L.-F. herrührenden Abweichungen durch Reduktion aller Werte auf 18,0° mit Hilfe eines Temperaturkoeffizienten von 0,025 zu vermindern; man erkennt aus der Punktreihe 2, daß diese Reduktion schon etwas geholfen hat. Das gleiche Verfahren wurde dann mit einem Koeffizienten 0,15 (mit Rücksicht auf folgendes so groß gewählt) angewendet; die so erhaltene Punktreihe 3 zeigt, daß wieder eine größere Unordnung eingetreten ist; es war offenbar der Temperatureinfluß überkompensiert worden. Schließlich wurde für den Koeffizienten noch der Wert 0,08 gewählt und die Punktreihe 4 erhalten; offenbar liegt dieser Wert dem richtigen näher als die beiden anderen. Nach einem vielleicht noch besser passenden Koeffizienten habe ich nicht gesucht in Anbetracht der ohnehin noch immer verbleibenden, von anderen Einflüssen herrührenden Sprünge im Verlauf der Kurve, und namentlich auch, weil ich mich für die vorliegenden Zwecke mit der erreichten Genauigkeit begnügen konnte. Es muß noch bemerkt werden, daß der Betrag des Temperaturkoeffizienten 0,08 für die Summe der in den Perioden 16 bis 121 Sekunden und 151—331 Sekunden erhaltenen Ausschläge abgeleitet wurde und wegen der Veränderlichkeit dieses Koeffizienten mit der Ladungsdauer (vgl. S. 34 und S. 69) eigentlich nicht auf die einzelnen Werte dieser beiden Perioden angewendet werden durfte. Bei den Werten der Kolonne 11 blieb, wie schon gesagt, die Temperaturreduktion unberücksichtigt.

Die Zahlen der beiden letzten Kolonnen wurden erhalten durch Division der Elektrometerausschläge der zweiten Versuchsperiode mit denen der ersten, bzw. der dritten Periode mit denen der zweiten. Sie sollen eine ungefähre Vorstellung liefern von dem zeitlichen Verlauf eines jeden Ladungsversuchs.

Die Tabelle enthält das Material für verschiedene im folgenden mitzuteilende Besprechungen.

Die zunächst zu beantwortende Frage ist, wie weit geht die Übereinstimmung in den Ergebnissen von Versuchen, die unter gleichbleibenden äußeren Umständen mit einer Platte angestellt wurden? Die Antwort wird angesichts der Tabelle folgende sein: Wenn die stets im Dunkeln gehaltene

Platte in regelmäßigen Intervallen von etwa einem Tage, bei gleicher Temperatur, mit der gleichen Spannung, während einer gleichen verhältnismäßig kurzen Ladungsdauer untersucht wird, so kann die angewendete Methode aus aufeinander folgenden Versuchen im allgemeinen für den vorliegenden Zweck recht brauchbare Resultate liefern. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß dann und wann in einer solchen Versuchsreihe plötzlich größere Unstimmigkeiten auftreten, die den Beobachter veranlassen werden, sich nur sehr selten mit dem Resultat eines einzelnen Versuchs zu begnügen. Die Tabelle, aber wohl am einfachsten ihre graphische Darstellung in Fig. 2, läßt solche sprungweise eingetretene Unstimmigkeiten deutlich erkennen; besonders in den ersten drei Wochen der in der Zeichnung berücksichtigten Untersuchung (20. X. bis 10. XI.) traten wohl infolge noch nicht genügender Übung und Bekanntschaft mit den Fehlerquellen unerwartete Sprünge auf. Es ist aber auch wohl zu beachten, daß, wie aus den „Bemerkungen" der Tabelle ersichtlich ist, die Versuche absichtlich nicht immer in ununterbrochen gleicher Weise, was die Vorbehandlung der Platten anbetrifft, gemacht wurden, so daß manche scheinbare Unstimmigkeit begründet werden kann (vgl. unten). Ich kann mich jedenfalls nicht entschließen, die Ursache der nicht aufgeklärten und auch später nicht ganz ausgebliebenen Unstimmigkeiten einem besonderen Verhalten der Platte zuzuschreiben und muß vielmehr vermuten, daß Fehlerquellen daran schuld sind. Es sei noch bemerkt, daß eine entsprechende Darstellung der in der *ganzen* Versuchszeit (1—331 Sekunden) gemessenen Elektrizitätsmengen kein wesentlich anderes Bild von diesen Verhältnissen lieferte, als das obige aus den Versuchsperioden 16—121 Sekunden und 151—331 Sekunden abgeleitete.

Eingangs dieses Abschnittes erwähnte ich, daß die zu unternehmende Nachprüfung sich hauptsächlich mit der Frage beschäftigen sollte, ob die u. a. bei der „älteren" Platte gefundene Erscheinung (vgl. S. 24 u. ff.) der langzeitigen Abnahme der „Stromstärke", d. h. der Erscheinung, daß von Zeit zu Zeit mit verhältnismäßig kurz dauernder Ladungszeit ausgeführte Versuche fortwährend kleiner werdende Werte der L.-F. liefern, auch bei einer mit Silber und deshalb vielleicht einwandfreier belegten Platte auftreten würde. Sieht man sich die Tab. V

Tabelle

Datum	Selbstaufladung $V=0$	Spannung	Elektrometerempfindlichkeit	τ	Beobachtete Elektrometerausschläge 1—16 Sek.	16—121 Sek.	151—391 Sek.	Σ	Σ'	Reduzierte Elektrometerausschläge ohne Berücksicht. d. Temp. 1—16 Sek.	16—121 Sek.	mit Berücksicht. d. Temp. 151—391 Sek.
16. I.	0,0	1570	158	20,0°	4,5	10,5	8,8	19,3	18,5	4,3	8,5	7,25
16. I.	0,0	1570	158	20,0	4,5	10,7	8,3	19,0	18,2	4,3	8,7	6,8
16. I.	0,0	1570	175	20,0	3,5	10,0	8,9	18,9	17,5	3,3	7,8	7,1
9. VII.	?	1520	164	19,5	6,3	15,5	13,8	29,3	28,7	6,1	13,5	12,0
15. VII.	− 0,7	1540	173	20,0	4,3	10,5	9,0	19,5	19,2	4,3	8,7	7,7
17. VII.	− 0,8	1520	144	21,5	4,3	10,9	8,7	19,6	19,6	4,3	8,6	7,1
20. VII.	+ 0,5	1520	163	22,8	4,2	11,4	11,1	22,5	21,4	4,1	7,4	7,2
22. VII.	− 0,5	1500	165	23,0	3,8	10,5	10,8	21,3	21,7	3,8	7,2	7,4
25. VII.		1475		22,6	5,9	26,0	34,9	60,9				
27. VII.	0,0	1475	162	20,2	3,1	9,2	9,7	18,9	19,2	3,2	7,8	8,3
29. VII.	0,0	1470	170	18,5	2,4	7,8	7,8	15,6	15,6	2,4	7,5	7,5
20. X.	+ 0,3	1580	156	15,8	10,0	12,0	7,2	19,2	18,1	9,6	13,6	8,0
21. X.	?	1585	156	17,0	10,7	12,0	7,5	19,5	18,6	10,2	12,5	7,7
22. X.	?	1590	170	17,8	11,3	13,8	8,7	22,5	20,9	10,5	13,1	8,2
23. X.	?	1590	156	17,5	11,7	13,7	8,8	22,5	21,5	11,5	13,6	8,7
24. X.		1590		17,0	12,2	22,9	24,2	47,1				
26. X.	?	1600	152	16,8	9,9	12,7	8,2	20,9	19,9	9,5	13,3	8,6
27. X.		1585		17,0	11,3	32,6	45,4	88,0				
28. X.		1575		16,5	10,3	31,6	43,9	85,5				
29. X.	+ 0,2	1575	151	15,6	7,2	9,0	7,7	16,7	16,0	7,0	10,4	9,0
30. X.	+ 0,1	1590	153	18,7	7,1	9,5	9,3	18,8	18,0	6,8	8,6	8,4
31. X.	+ 0,1	1585	153	18,0	7,0	9,0	8,6	17,6	16,9	6,8	8,7	8,2
1. XI.	?	1575	153	18,0	7,5	10,0	8,0	18,0	17,4	7,3	9,6	7,8
6. XI.	?	1570	154	18,4	5,9	8,8	8,8	17,6	17,0	5,8	8,2	8,2
8. XI.	?	1560	159	18,2	5,5	9,5	8,6	18,1	17,4	5,3	9,0	8,2
9. XI.	?	1560	159	17,8	5,3	8,4	7,5	15,9	15,4	5,1	8,2	7,4
11. XI.	?	1550	153	18,2	5,1	8,5	8,1	16,6	16,4	5,0	8,3	7,9
12. XI.	?	1540	153	17,8	4,7	6,7	6,4	13,1	13,1	4,7	6,8	6,5
15. XI.		1520		16,8	6,5	20,3	28,1	48,4				
16. XI.		1520		21,8	25	125	176	301				
18. XI.	?	1520	164	17,4	4,4	6,9	7,2	14,1	13,7	4,3	7,0	7,3
22. XI.		1500		17,2	10,0	43	58	101				
23. XI.	+ 0,3	1485	150	14,4	3,9	5,3	5,0	10,3	10,3	4,0	7,2	6,5
24. XI.	+ 0,2	1480	153	18,6	4,3	7,2	7,4	14,6	14,8	4,4	7,0	7,15
25. XI.	+ 0,5	1480	150	19,2	4,4	7,8	8,4	16,2	16,3	4,5	7,2	7,6
28. XI.	0,0	1480	150	18,2	4,5	7,2	7,7	14,9	15,4	4,7	7,3	7,9
2. XII.	+ 0,6	1460	148	17,8	4,2	6,4	6,6	13,0	13,0	4,4	6,6	6,6
3. XII.	+ 0,4	1460	150	18,8	4,4	6,8	6,8	13,6	13,8	4,6	6,6	6,4
4. XII.	+ 0,3	1640	155	18,4	4,9	7,5	8,0	15,5	14,0	4,6	6,6	7,0
6. XII.	+ 0,4	1620	150	16,0	4,9	6,6	6,3	12,9	11,8	4,6	7,2	6,7
10. XII.	+ 0,5	1600	144	20,7	5,3	8,7	8,9	17,6	16,5	5,2	6,6	6,7
18. XII.	0,0	1565	151	18,6	4,5	7,3	7,6	14,9	14,5	4,4	6,8	7,1
18. XII.	?	1570	151	18,8	4,5	7,5	7,5	15,0	14,6	4,4	6,8	6,8
18. XII.	?	1575	151	19,2	4,5	8,0	7,5	15,5	15,1	4,4	7,1	6,6

V.

Σ''			Bemerkungen Wenn nicht das Gegenteil bemerkt ist, blieb die Platte von einem Versuch zum anderen immer ca. 24 Stunden lang geerdet im Dunkeln.
15,8	1,97	0,85	Diese 3 Versuche wurden $1^1/_2$ Jahre vor Anfang der folgenden Versuche gemacht.
15,5	2,02	0,78	
14,9	2,36	0,91	
25,5	2,21	0,89	Nach diesem Versuch behielt die Platte 2 Tage die Spannung im Dunkeln; sie wurde dann kurz auf ihre Aktivität geprüft und blieb dann 4 Tage geerdet im Dunkeln.
16,4	2,02	0,88	
15,7	2,00	0,83	
14,6	1,80	0,97	
14,6	1,94	1,03	
			Die Platte war v. d. Vers. 10 Min. X-bestrahlt worden.
16,1	2,44	1,06	Vermutlich noch Nachwirkung d. X-Bestrahlung bemerkbar.
15,0	3,13	1,00	
21,6	1,42	0,58	
20,2	1,23	0,62	
21,3	1,25	0,63	Versuch nach Umrühren der H_2SO_4 im Elektrometer.
22,3	1,18	0,64	
			Versuch nach ca. 9. Min. langer Beleucht. d. geerdeten Platte.
21,9	1,40	0,65	
			Versuche mit schwacher Beleuchtung der Platte.
19,4	1,49	0,86	
17,0	1,27	0,98	
16,9	1,28	0,94	
17,4	1,31	0,81	Versuch nach Neueinsetzen der Plattenfassung.
16,4	1,41	1,00	
17,2	1,70	0,91	Versuch nach Reinigung aller Wippen.
15,6	1,61	0,90	
16,2	1,66	0,95	Versuch nach Reinigung der Plattenkontakte.
13,3	1,45	0,96	
			Vers. n. 19stünd. Beleuchtung der geerdeten Platte.
			Vers. n. 23stünd. nochmaliger Beleucht. d. geerdeten Platte.
14,3	1,63	1,04	
			Platte vorher 2 Tage gelad. u. beleucht., 6 St. geerd. u. beleucht., 18 St. gelad. u. beleucht., 21 St. geerd. u. beleucht.
13,7	1,80	0,90	
14,15	1,59	1,02	
14,8	1,60	1,06	
15,2	1,55	1,08	
13,2	1,50	1,00	
13,0	1,43	0,97	Nach dem Versuch Akkumulatorenbatterie frisch geladen.
13,6	1,43	1,06	
13,9	1,57	0,93	
13,3	1,27	1,02	Nach dem Versuch Platte 8 Min. geladen und beleuchtet.
13,9	1,55	1,04	Umschaltung der ausnahmsweise nebeneinander geschalt. Akkum. auf hintereinander zu kurz v. d. Vers. vorgenommen, daher störende Zunahme der Spannung.
13,6	1,55	1,00	Entladungsdauer v. d. Vers. nur 13 Minuten
13,7	1,62	0,93	Entladungsdauer v. d. Vers. nur 13 Minuten

Tabelle V

Datum	Selbstaufladung $V=0$	Spannung	Elektrometerempfindlichkeit	t	Beobachtete Elektrometerausschläge 1—16 Sek.	16—121 Sek.	151—631 Sek.	Σ	Σ'	Reduzierte Elektrometerausschläge ohne | mit Berücksicht. d. Temp. 1—16 Sek.	16—121 Sek.	151—631 Sek.
19. XII.	− 0,5	1585	150	17,0°	4,1	6,9	6,6	13,5	13,6	4,0	7,5	7,3
19. XII.	?	1585	150	17,0	4,2	6,1	5,8	11,9	12,0	4,1	6,6	6,4
19. XII.	− 1,5	1585	150	17,0	4,1	6,0	5,8	11,8	11,9	4,0	6,5	6,4
19. XII.	− 1,3	1585	150	17,0	4,1	6,1	5,8	11,9	12,0	4,0	6,6	6,4
19. XII.	− 0,5	1585	150	16,6	4,3	6,2	6,3	12,5	12,6	4,2	6,9	7,2
19. XII.	− 1,8	1585	150	16,6	4,1	6,1	5,8	11,9	12,0	4,0	6,8	6,6
20. XII.	?	1580	150	15,2	3,8	5,9	5,5	11,4	11,0	3,7	7,1	6,6
21. XII.		1580		18,6	10,6	44,2	62,6	106,8				
22. XII.	+ 0,8	1575	156	18,2	4,2	7,9	8,4	16,3	14,8	4,1	7,2	7,4
23. XII.	+ 0,3	1575	156	20,0	4,2	9,2	9,1	18,3	17,2	4,1	7,4	7,2
25. XII.	+ 0,5	1570	153	21,5	4,5	10,0	10,3	20,3	19,0	4,4	7,1	7,3
26. XII.	+ 0,3	1565	150	17,8	4,1	6,9	7,3	14,2	13,5	4,0	6,7	7,0
26. XII.	− 2,3	1565	150	17,8	3,8	6,2	6,3	12,5	12,0	3,7	6,1	6,1
26. XII.	− 2,8	1565	150	17,8	3,6	5,8	5,9	11,7	11,2	3,5	5,7	5,7
27. XII.	− 0,9	1565	150	17,6	3,8	6,1	6,0	12,1	12,8	3,7	6,5	6,7
29. XII.		1565		20,0	16,4	79	110	189				
30. XII.	− 0,4	1560	150	19,7	4,7	8,4	9,0	17,4	17,4	4,6	7,2	7,9
31. XII.	+ 0,1	1560	150	18,0	4,3	7,3	7,3	14,8	14,3	4,2	7,2	7,1
2. I.	+ 0,8	1555	150	22,8	5,0	10,5	11,5	22,0	20,8	4,9	6,8	7,4
4. I.	+ 0,2	1530	148	19,0	4,2	7,0	7,3	14,3	14,1	4,2	6,4	6,6
7. I.	− 0,4	1510	148	20,2	4,2	7,6	7,7	15,3	15,9	4,3	6,5	6,8
7. I.		1510	148	21,4	3,9	5,7	6,4	12,1	12,3	4,0	4,4	5,0
					(3,7)	(4,8)	(3,6)					
8. I.	− 0,2	1510	145	20,2	4,2	7,4	7,6	15,0	15,4	4,3	6,5	6,6
9. I.	− 0,1	1500	147	20,1	4,0	7,6	7,8	15,4	15,9	4,1	6,6	6,8
10. I.	0,0	1485	145	19,0	4,0	7,0	7,1	14,1	14,7	4,1	6,7	6,8
18. I.	+ 0,1	1590	136	17,6	4,9	10,0	11,3	21,3	21,0	4,8	10,2	11,5
21. I.	+ 0,8	1595	140	18,4	4,3	7,5	7,8	15,3	14,1	4,2	6,8	8,9
25. II.	− 0,5	1545	128	15,8	4,5	5,4	4,6	10,0	10,8	4,7	6,8	6,1
25. II.	− 0,6	− 1535	125	18,0	− 4,9	− 7,0	− 6,5	− 13,5	− 13,5	− 5,1	− 7,1	− 6,4
3. III.	+ 0,1	− 1530	127?	20,4	− 4,7	− 7,5	− 7,2	− 14,7	− 15,4	− 4,9	− 6,4	− 6,3
4. III.	+ 0,1	− 1525	123	21,0	− 4,8	− 8,0	− 7,8	− 15,8	− 16,7	− 5,1	− 6,6	− 6,6
5. III.	− 0,5	− 1525	158	21,0	− 5,0	− 8,9	− 8,9	− 17,8	− 17,1	− 4,9	− 6,7	− 6,6
6. III.	− 0,2	− 1520	125	19,7	− 4,6	− 7,6	− 7,4	− 15,0	− 15,8	− 4,8	− 7,0	− 6,8
7. III.	− 0,4	− 1515	154	19,2	− 4,5	− 7,9	− 7,4	− 15,3	− 15,0	− 4,5	− 7,1	− 6,5
8. III.	?	− 1510	126	21,7	− 4,7	− 8,6	− 8,2	− 16,8	− 17,8	− 5,0	− 6,8	− 6,5
19. III.	− 0,6	− 1580	156	19,6	− 4,4	− 8,3	− 8,3	− 16,6	− 15,2	− 4,3	− 6,7	− 6,5

(Fortsetzung).

Σ''			Bemerkungen
14,8	1,88	0,97	
13,0(?)	1,61	0,97	Entladungsdauer vor dem Versuch: 9 Minuten
12,9 (14,4)	1,62	0,98	„ „ „ „ 13 „
13,0 (14,3)	1,65	0,97	„ „ „ „ 13 „
14,1	1,64	1,04	„ „ „ „ 88 „
13,4 (14,2)	1,70	0,97	„ „ „ „ $13^1/_2$ „
13,7	1,92	0,93	
			Vor dem Versuch 10 Min. schwach X-bestrahlt.
14,6	1,76	1,03	
14,6	1,80	0,97	
14,4	1,61	1,03	
13,7	1,68	1,04	
12,2 (14,5)	1,65	1,00	Entladungsdauer vor dem Versuch: 6 Minuten
11,4 (14,2)	1,63	1,00	„ „ „ „ 6 „
13,2	1,76	1,03	Nach $18^1/_2$stündiger Ladung im Dunkeln und 51stündiger Erdung im Dunkeln.
			Nach 17stündiger Ladung bei Beleuchtung u. 16stündiger Erdung bei Beleuchtung.
15,1	1,56	1,10	Noch Nachwirkung der Beleuchtung.
14,3	1,71	0,99	
14,2	1,39	1,09	
13,0	1,52	1,03	
13,3	1,51	1,05	
9,4	1,10	1,14	Nach häufigem kurz dauerndem (1 Min.) Wechsel von Spannung und Erdung im Dunkeln.
			Werte des Entladungsversuches.
13,1	1,51	1,02	
13,4	1,61	1,03	Bei einer Probe erwies sich die Platte als noch schwach lichtempfindlich.
13,5	1,63	1,01	Nach d. Vers. blieb Platte 8 Tage bei $V = 0$ dem Tageslicht ausgesetzt, Lichtempfindlichkeit nachher noch nicht ganz verschwunden.
21,7	2,13	1,13	Nachwirkung der Beleuchtung.
13,7	1,62	1,01	Nach d. Vers. blieb Platte zur Bestimmung d. Temp.-Koeff. 34 Tage im Dunkeln geladen u. dann 24 Stunden im Dunkeln geerdet. (Vgl. S. 66.)
12,9	1,45	0,90	
−13,5	1,39	0,90	Erster Versuch mit negativer Ladung.
−12,7	1,31	0,98	
−13,2	1,29	1,00	
−13,3	1,37	0,98	
−13,8	1,46	0,97	
−13,6	1,56	0,91	
−13,3	1,36	0,96	Nach d. Vers. Platte auf kurze Zeit aus ihrem Kästchen entfernt.
−13,2	1,56	0,97	

auf diese Frage an, so ergibt sich folgendes. Die allerersten, dort verzeichneten Versuche (vom 16. I.) wurden mehr probeweise, und zwar alle an einem Tage mit der noch sehr lichtempfindlichen Platte (vgl. S. 37) gemacht; sie kommen deshalb für die vorliegende Frage nicht in Betracht. $1^1/_2$ Jahre später, in welcher Zwischenzeit die Platte mitsamt Fassung und Glyzerinelektrode abwechselnd bei Tageslicht und im Dunkeln im Exsikkator untergebracht war und ihre Lichtempfindlichkeit infolgedessen genügend verloren hatte, folgten die unter dem 9. VII. bis 22. VII. verzeichneten Versuche. Die fünf ersten erhaltenen Werte der Kolumne Σ'' weisen nun in der Tat wiederum eine solche zeitliche Abnahme (von 25,5 auf 14,6 Skalenteile) auf, und zwar ähnlich wie in anderen Fällen einige Male beobachtet wurde, und was auch in diesem Falle vielleicht von der unter „Bemerkungen" vermeldeten Behandlung herrühren könnte, nach dem ersten Versuch mit einem besonders großen Sprunge von 25,5 auf 16,5 Skalenteile. Es lag demnach anscheinend kein Grund mehr vor, dem Belegen der Platte mit Graphit die Schuld zu geben an dem Auftreten der langzeitigen Abnahme der „Stromstärken".

Eine nochmalige Bestätigung dieses Ergebnisses finden wir in der langen Versuchsreihe, die am 20. X. anfing. Bevor wir aber diese besprechen, muß der Vollständigkeit halber noch mitgeteilt werden, daß die Platte gleich nach den fünf erwähnten Versuchen mit Rücksicht auf andere noch zu beantwortende Fragen einer schwachen X-Bestrahlung ausgesetzt und dann an drei folgenden Tagen (25., 27., 29. VII. der Tabelle) auf ihre L.-F. geprüft wurde. Über diese Versuche wird weiter unten noch berichtet werden. Darauf folgte eine Ruhepause von etwa 3 Monaten, in der die Platte, mit ihrer Fassung und ihren Elektroden versehen meistens im Dunkeln im Exsikkator liegen blieb. Kurz vor dem 20. X. wurde sie dann in ihr Kästchen gebracht und rasch auf ihre Lichtempfindlichkeit geprüft; sie erwies sich dabei wohl noch als lichtempfindlich, aber nach gemachten Erfahrungen doch nicht so stark, um damit ihr folgendes Verhalten in bezug auf die langzeitige Abnahme erklären zu können. Aus der Tabelle, aber zum größten Teil noch einfacher wieder aus der Kurve 4 der Fig. 2, ist dieses Verhalten zu entnehmen. Es ist ersichtlich, erstens daß die L.-F. in der 3monatlichen

Ruhepause, ähnlich wie in der vorherigen $1^1/_2$jährigen, wieder gestiegen war, und zwar beinahe auf denselben Betrag, der nach der ersten Ruhepause gefunden war; zweitens, daß die L.-F. wiederum im Verlauf der Zeit, etwa bis zum 2. XII, in verlangsamtem Tempo abnahm. Ob von da an eine noch weitere sehr langsame Abnahme stattfand, kann nicht entschieden werden; der weitere Verlauf der Kurve könnte wohl als eine Annäherung an einen konstant bleibenden Wert der Stromstärken gedeutet werden, was als eine allmähliche Angewöhnung der Platte an ihre regelmäßige, tägliche, elektrische Behandlung angesehen werden könnte. Es ist aber nunmehr ganz sicher, daß eine langzeitige Abnahme der Stromstärken in verschiedenen Fällen eingetreten ist, und daß die Platte sich in Ruhepausen hat „erholen" können.

Es fällt noch eine besondere, vermutlich mit der soeben besprochenen ursächlich zusammenhängende Erscheinung auf, wenn wir in den Kolumnen 11, 12 und 13 den zeitlichen Verlauf der reduzierten Stromstärken verfolgen. Wir erfahren, daß die in den drei Versuchsperioden 1—16 Sekunden usw. erhaltenen Stromstärken sich nicht in gleichem Maße an der langzeitigen Abnahme beteiligt haben. Wählen wir zu einem Vergleich z. B. den Versuch vom 22. X. und den vom 26. XII., so finden wir, daß sowohl absolut als auch relativ die erste der drei Stromstärken am meisten (von 10,5 auf 4,0 Skalenteile), die zweite weniger (von 13,1 auf 6,7) und die dritte am wenigsten (von 8,2 auf 7,0) abgenommen hat. Es hat demnach allen Anschein, als ob sich nach einer genügend langen Ladungsdauer eines Versuches für die L.-F. Werte hätten ergeben müssen, die sich von Versuch zu Versuch überhaupt nicht mehr änderten. Diese Wahrnehmungen und Überlegungen sind m. E. wiederum, wenn auch kein Beweis, so doch eine gute Stütze für die oben einige Male geäußerte Ansicht, daß die bei einem Ladungsversuch im Steinsalz vor sich gehenden elektrischen Prozesse zweierlei Art sind. Natürlich spiegelt sich das beschriebene Verhalten der Platte in den Verhältniszahlen der beiden letzten Kolumnen der Tab. V ab; sie geben eine ungefähre Anschauung von dem Verlauf eines Versuchs; je kleiner die Zahlen in einer und derselben Kolumne sind, desto rascher war der Abstieg der Stromstärke bei dem betreffenden Versuch.

Nachdem somit festgestellt war, daß die Vermutung,

die langzeitige Abnahme der L.-F. sowie die erwähnten Unregelmäßigkeiten in den Versuchsergebnissen rührten von der Art der Belegung der NaCl-Platte — mit Graphit — her, nicht zutraf, galt es, nach anderen Ursachen zu suchen, bzw. früher in dieser Richtung angestellte Versuche sicher zu stellen. Vorher mag aber noch in Kürze angegeben werden, was über die langzeitige Abnahme der L.-F. auch bei anderen Platten übereinstimmend in der Hauptsache gefunden wurde.

Eine langzeitige Abnahme ist nicht die Folge von einem längeren Aufenthalt der von elektrischen Kräften nicht beanspruchten Platte in ihrem Kästchen, wie u. a. aus einem auf S. 25 mitgeteilten Versuch hervorgeht, der nach einer 20tägigen Pause angestellt wurde. Sie tritt nur als Folge von Ladungs-Entladungsversuchen auf. Eine Erhöhung der stark gesunkenen L.-F. wurde beobachtet, wenn die mitsamt ihrer Fassung aus dem Kästchen herausgenommene Platte längere Zeit im Exsikkator liegen geblieben war. Ob der gleiche Erfolg auch eintritt, wenn die geerdete Platte längere Zeit im Kästchen verbleibt, wurde erst später (vgl. S. 77) untersucht. Ein Herausnehmen und Wiedereinsetzen der Platte hat an und für sich keine Folgen. Abschleifen der Platte, Säuberung der Glyzerinelektrode oder eine viele Stunden lang andauernde intensive Beleuchtung (vgl. die darauf bezüglichen Versuche der Tab. V) können ebenfalls die gesunkene L.-F. nicht wieder auf die ursprüngliche Höhe bringen. Eine mit Graphit belegte und eine mit Silber belegte Platte zeigen das gleiche Verhalten.

Im folgenden ist eine Anzahl von Erklärungsversuchen für diese Erscheinung mitgeteilt.

a) Es ist schon auf S. 18 ein Versuch erwähnt, der den Verdacht entfernte, daß eine durch Temperaturänderung der im Elektrometer vorhandenen H_2SO_4 bewirkte Änderung ihrer Viskosität die Dämpfung und damit die Bewegung der Elektrometernadel möglicherweise so sehr beeinflussen könnte, daß dadurch merkliche Verschiedenheiten in den Nadelablenkungen zustande kämen. An jener Stelle wurde auch die Frage bereits beantwortet, ob ein Umrühren der seit einer längeren Zeit unberührt im Elektrometer gestandenen H_2SO_4, in der sich vielleicht Schichten von ungleicher Kon-

zentration oder eine oberflächliche Haut größerer Widerstandskraft gebildet haben könnten, eine wesentliche Veränderung der Versuchsergebnisse zur Folge hatte. Der betreffende Versuch ist der folgende, in der Tabelle aufgenommene. Am 22. X. offnete ich das Elektrometer, rührte die H_2SO_4 kräftig um, setzte das Elektrometer wieder zusammen und machte am gleichen und auch am folgenden Tage je einen Versuch. Trotzdem die H_2SO_4 vorher mehrere Monate unberührt gestanden hatte, trat, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, nach dem Umrühren keine Vergrößerung der Ausschläge ein, deren Betrag einen sicheren Anhaltspunkt für die Richtigkeit der Annahme, die langzeitige Abnahme der L.-F. beruhe auf einer zeitlichen Veränderung der Zusammensetzung der H_2SO_4, gegeben hätte. Daß kleinere, dann und wann beobachtete Unstimmigkeiten in den Versuchsergebnissen durch diesen Einfluß nicht verursacht sein können, will ich nicht behaupten. Die langzeitige Abnahme läßt sich aber nicht darauf zurückführen.

b) Über den Einfluß einer Änderung der Akkumulatorenspannung wurde bereits auf S. 20 berichtet, und es sei hier nur noch hinzugefügt, daß die — nicht mitgeteilten — Entladungsversuche, deren Ergebnisse natürlich nicht von einer solchen Änderung beeinflußt werden können, die gleiche langzeitige Abnahme aufwiesen wie die zugehörigen Ladungsversuche.

c) Ein weiterer Verdacht richtete sich gegen die verschiedenen Kontakte, die in den Leitungen vorhanden waren. Gelötete oder mit Klemmschrauben hergestellte Kontakte konnte ich als fehlerfrei betrachten, dagegen war zu prüfen, ob die Hg-Kontakte in den Wippen, sowie die Kontakte an der Platte und an ihrer Fassung tadellos funktionierten. Einige darauf bezügliche Versuche sind in der Tabelle aufgenommen: Nachdem die L.-F. schon beträchtlich abgenommen hatte, wurden am 31. X. der Bajonettverschluß der Plattenfassung und am 7. XI. die verschiedenen Wippen, am 10. XI. die Kontaktstelle des Schutzringes der Platte einer Reinigung und Revision unterworfen. Keine dieser Operationen hatte aber, wie aus der Tabelle ersichtlich, und was auch in Übereinstimmung mit früheren ähnlichen Versuchen mit anderen Platten ist, eine Erhöhung der Stromstärke auf den Anfangs-

wert vom 20. X. zur Folge, so daß der Verdacht gegen diese Kontaktstellen als grundlos aufgegeben werden mußte. Einer besonderen Besprechung bedarf aber noch die Frage, ob sich mit diesen Versuchen auch die Verbindung der unteren Plattenbelegung mit der Elektrometerleitung als einwandsfrei erwiesen hat. Diese Stelle ist besonders verdächtig; der Kontakt wird nämlich gebildet von einem schwach gewölbten Platinplättchen, das mittelst einer weichen Spiralfeder gegen die dünne Plattenbelegung gedrückt wird (vgl. a. a. O. S. 456), und es erscheint bei der Kleinheit dieser Verbindungsstelle wohl möglich, daß auch nach jedesmaligem, beim Einsetzen der Platte in ihrem Kästchen vorgenommenen Abstäuben der elektrische Kontakt sich (sei es durch eine mechanische Wirkung von kleinen Erschütterungen, oder durch die zwar kurz dauernden, aber verhältnismäßig kräftigen elektrischen Ströme beim Anlegen der Spannung an die Platte) von Versuch zu Versuch so verschlechtere, daß die geringen Spannungsänderungen, wie sie bei den L.-F.-Bestimmungen vorkommen, nicht mehr gleich gut von der Belegung auf die Elektrometerleitung übertragen werden können und daß infolgedessen die Stromstärke im Laufe einer längeren Versuchszeit kleiner wird. Wäre die so häufig beobachtete langzeitige Abnahme der L.-F. auf diesen Umstand zurückzuführen gewesen, so hätte man aber doch mit Recht erwarten können, daß nach dem Herausnehmen der Platte aus ihrem Kästchen zum Zwecke der erwähnten Reinigung, sowie auch zum Zwecke einer X-Bestrahlung, wobei natürlich die Verbindung der Platte mit der Elektrometerleitung gelöst werden mußte, und nach ihrem Wiedereinsetzen, also nach der Wiederherstellung der fraglichen Verbindung ein folgender Ladungsversuch wieder den anfangs beobachteten größeren Wert der L.-F. oder wenigstens eine wesentliche Vergrößerung geliefert haben müßte. Die angeführten Versuche sind die vom 27. VII. und vom 22. XII., sowie auch mancher Versuch mit anderen Platten, z. B. mit der oben ausführlich besprochenen „alten" NaCl-Platte, bei der sogar die Graphitbelegung erneuert wurde. Diese Versuche lassen aber von einer Vergrößerung nichts erkennen. Ich habe somit keinen Grund für die Annahme, daß die langzeitige Abnahme auf irgendeinen Kontaktfehler zurückzuführen sei. Daß aber verhältnismäßig geringe un-

regelmäßig aufgetretene Verschiedenheiten in den Stromstärken von aufeinander folgenden Versuchen oder auch die erwähnte, ein paarmal wahrgenommene sprungweise Verminderung der L.-F. im Laufe ihrer langzeitigen Abnahme durch Änderung in der Güte des Kontaktes der Plattenbelegung mit der Elektrometerleitung verursacht wurden, ist nicht ausgeschlossen. Eine Entscheidung über diese Möglichkeit könnte mit einer Ag-belegten Platte, die das Anlöten von Elektroden und deshalb die Herstellung eines sicheren Kontaktes gestattet, wohl herbeigeführt werden (vgl. die allerletzten Versuche S. 77 u. ff.).

d) Noch eines weiteren Erklärungsversuchs für die langzeitige Abnahme der L.-F. muß hier gedacht werden. Auf S. 26 ist die Wahrnehmung mitgeteilt, daß die Stromstärke insbesondere kurze Zeit nach Anlegen der Spannung wesentlich beeinflußt werden kann durch eine Inhomogenität des elektrischen Kraftfeldes zwischen oberer und unterer Elektrode der Platte. Es wurde bei jenem Versuch eine besondere Rückstandsbildung beobachtet, die von Kraftlinien herrührte, die durch eine Kittschicht, die beim Aufkitten des Glaströgchens unbeabsichtigt stehen geblieben war, hindurch gingen. Man könnte nun vermuten, daß ein solcher Einfluß auch bei den Versuchen mit der Ag-belegten Platte als Ursache einer vorübergehenden großen L.-F. tätig gewesen, und daß die langzeitige Abnahme dadurch zustande gekommen wäre, daß die Glyzerinsalzlösung sich allmählich zwischen Platte und Kitt ausgebreitet und dadurch die Wirkung des Kittes, eventuell auch des Glases, vom Trögchen ausgeschaltet hätte. Gegen diese Ansicht läßt sich nun einwenden: 1. daß der damals so wirksame Kittring jetzt sorgfältig vermieden war, und 2. daß das Querschnittsverhältnis von oberer und unterer Belegung bei der Ag-belegten Platte für das Zustandekommen eines homogenen Feldes besonders günstig war, und 3. daß nicht einzusehen ist, weshalb dieser vermehrende Einfluß sich erst nach Jahren bemerkbar gemacht haben sollte; das Trögchen wurde nämlich in der ganzen Versuchszeit niemals ab- und niemals wieder neu aufgekittet.

e) Die im Vorhergehenden beschriebenen und noch andere Versuche, eine Ursache für die langzeitige Abnahme in der

Versuchsanordnung zu finden, haben keine solche erkennen lassen; es bleibt deshalb nur noch übrig, zu überlegen, ob sie nicht *in der Platte* selbst gefunden werden kann. Bei dieser Frage wird man die aus der Tabelle ersichtliche und auch bei anderen Platten erhaltene Tatsache im Auge behalten müssen, daß die größte, auf gleiche Temperatur bsw. reduzierte Stromstärke immer und nur bei einem ersten Versuch mit einer seit langer Zeit oder überhaupt nicht benutzten Platte auftrat. Man kommt dadurch zu der Vorstellung, daß das Material im Verlauf einer Versuchsreihe möglicherweise eine Veränderung erleidet, die durch längeres Liegen rückgängig gemacht werden kann.

Fragen wir, worin diese Veränderungen haben bestehen können.

f) Zunächst sei ein Verdacht beseitigt, der sich vielleicht speziell gegen die in der Tab. V angeführten Versuche richten könnte. Man könnte nämlich vermuten, daß die beiden (am 9. VII. bzw. am 20. X.) beobachteten großen Stromstärken und deren folgende Abnahme die Folge seien von den $1^1/_2$ Jahre, bzw. 3 Monate vorhergegangenen Bestrahlungen. Übt doch eine X-Bestrahlung, auch ohne daß eine nachherige Beleuchtung stattgefunden hat, bei einem später mit der verdunkelten Platte unternommenen Ladungsversuch auf die Stromstärke einen vermehrenden, mit der Zeit wieder verschwindenden Einfluß aus. Man erkennt diese später noch zu besprechende Tatsache z. B. an den Versuchen, die gleich auf die am 25. VII. bzw. 20. XII. vorgenommenen Bestrahlungen folgten.[1]) Diese Vermutung ist aber nicht zutreffend. Erstens weil, wie schon früher erwähnt, Platten, die keiner X-Bestrahlung ausgesetzt waren, auch die langzeitige Abnahme zeigten, zweitens und insbesondere, weil nach gemachten Erfahrungen nicht angenommen werden kann, daß die Nachwirkungseigenschaft der jetzt gebrauchten Platte noch $1^1/_2$ Jahre bzw. 3 Monate

1) Es ist vielleicht bemerkenswert, daß jede neue von der Glyzerinseite her im Dunkeln bestrahlte, und unter Vermeidung jeglicher Beleuchtung in ihr Kästchen gebrachte NaCl-Platte gleich nachher bei Ableitung ihrer Glyzerinelektrode zur Erde auf kure Zeit eine schwache, aber deutlich erkennbare Strömung von negativer Elektrizität zum Elektrometer lieferte.

nach ihrer Bestrahlung kräftig erhalten war, um dann, wie die auf den 9. VII. bzw. 20. X. folgenden Versuche zeigen, innerhalb von etwa 2 Tagen zu verschwinden. Wie bald sich die Nachwirkung einer X-Bestrahlung auf die im Dunkeln erhaltenen Stromstärken nicht mehr zeigt, kann man aus den Versuchen vom 25. bis 29. VII. und vom 21. bis 24. XII. erkennen. Daß auch die bei dem Einsetzen der Platte in ihr Kästchen nötige schwache Beleuchtung der noch lichtempfindlichen Platte durch ihre „Nachwirkung" die Ursache nicht gewesen sein kann, zeigen die auf eine besonders zu diesem Zwecke am 15. und 16. XI. vorgenommene Beleuchtung folgenden Versuche.

g) Es ist die Tatsache zu erwähnen, daß bei einem Ladungsversuch geringere Werte der Stromstärke auch dann erhalten werden, wenn ein solcher Versuch bereits vorangegangen war und die darauf folgende Entladung nur kurze Zeit, einige Minuten, statt längere Zeit, etwa mehrere Stunden, gedauert hatte: wenn, wie wir uns der Kürze halber ausdrückten, die Platte noch nicht polarisationsfrei geworden war. Um den Einfluß einer solchen Polarisation zu erfahren, wurden auch jetzt mit der Ag-belegten Platte einige Versuche gemacht, deren Ergebnisse unter dem 19., bzw. 26. XII. verzeichnet sind. Bei allen dauerte die Ladung die normale Zeit von 6 Minuten, die Entladung aber statt wie gewöhnlich 24 Stunden nur einige Minuten, deren Anzahl in der Tab. V angegeben ist; außerdem geben die unter $V = 0$ angeführten Zahlen die vor jedem Ladungsversuch gefundenen Werte des Polarisations- plus Selbstaufladungsstromes an. Verwendet man diese nach dem Superpositionsgesetz, so ergeben sich die eingeklammerten Zahlen der Kolumne 11. Berücksichtigt man, daß diese Werte sicher etwas zu groß ausgefallen sein müssen[1]), um die vorhandene L.-F. ausdrücken zu können, so erkennt man, daß sie recht gut in die Wertreihe der zeitlich benachbarten Ladungsversuche passen, daß somit bei richtiger Verwertung der kurz vor einem Ladungsversuch beobachteten Polarisation für die L.-F. ein mit den Ergebnissen von Versuchen mit längerer Entladungsdauer übereinstimmender Wert erhalten werden kann, wenn

1) Die Polarisation ist nämlich etwas zu hoch angerechnet, weil sie mit der Zeit abnimmt.

auch die Ladungsversuche so bald aufeinander folgten, daß in der Zwischenzeit die Polarisation durch Erdung nicht verschwinden konnte. Dieses Ergebnis gilt zunächst für die gewählte kurze Ladungszeit von, wie erwähnt, 6 Minuten, ob es auch für eine wesentlich längere Ladungszeit von Stunden oder Tagen gültig ist, ist zunächst noch nicht erwiesen. Aus den beiden Versuchen vom 27. XII., bzw. vom 25. II., denen Ladungsdauern von $18^1/_2$ Stunden, bzw. 34 Tagen, freilich auch keine sehr kurz dauernden Entladungen vorangingen, ergibt sich aber, daß auch in solchen Fällen kein besonders verkleinerter Wert der L.-F. auftritt.

Nach diesen Bemerkungen versuchen wir, die Frage zu beantworten, ob die langzeitige Abnahme der L.-F. etwa einer im Laufe der Zeit anwachsenden Polarisation zugeschrieben werden kann.

Um den in der Tabelle aufgeführten Tatsachen und den mit verschiedenen anderen Platten gefundenen mit Hilfe der Annahme einer wachsenden Polarisation gerecht werden zu können, müßte man sich zunächst vorstellen, daß eine Zeit von 24 Stunden bzw. von etwa 5 Tagen (Versuch 1. XI. bzw. 6. XI), die bei verdunkelter, geerdeter Platte zwischen je zwei Ladungsversuchen verging, nicht genügte, um die von einem nur 6 Minuten dauernden Ladungsstrom im Dunkeln erworbene Polarisation ganz zum Verschwinden zu bringen, so daß jedesmal jeder Versuch eine etwas vergrößerte Polarisation hinterlassen hätte. Erst eine mehrere Monate dauernde Pause bewirke eine so merkliche Verminderung der Polarisation, daß ein folgender Ladungsversuch davon nichts mehr erkennen läßt. Gegen diese Vorstellung, daß die von einer kur en Ladungsdauer herrührende Polarisation sich unter Umständen so lange erhalten haben könnte, läßt sich an und für sich nichts einwenden; denn z. B. ist an einer X-bestrahlten, kurze Zeit bei Belichtung geladenen Platte die so erworbene Polarisation noch nach vielen Monaten durch eine mit Belichtung vorgenommene Probe sehr deutlich nachweisbar, wenn die Platte in dieser Zwischenzeit im Dunkeln geerdet war. Es bestehen aber andere gewichtigere Einwände: wenn die Abnahme der Stromstärke von 21,6 Skalenteilen (20. X.) auf 19,9 Skalenteile (18. XII.) auf zurückgebliebener Polarisation beruhen würde, so sollte man meinen, daß nach

dem Superpositionsgesetz die elektromotorische Kraft dieser Polarisation im Betrage von $\frac{21{,}6 - 13{,}9}{21{,}6} \cdot 1530 =$ etwa 540 Volt sich bei dem dem letztgenannten Ladungsversuch unmittelbar vorangegangenen mit geerdeter Platte angestellten Vorversuch („$V = 0$") durch einen entsprechenden Ausschlag hätte bemerkbar machen müssen. Tatsächlich war aber von einer solchen Äußerung der Polarisation nichts zu bemerken, wie aus der Tab. V, wo in der Kolumne 2 0,0 Skalenteile in 5 Minuten verzeichnet sind, ersichtlich ist. Ebenso läßt der Anfang der Erdung der Platte, also unmittelbar nach dem vorgegangenen Ladungsversuch — in der Tabelle nicht aufgeführt — nichts von einer allmählich angehäuften, sondern nur die Polarisation erkennen, die die Platte bei jenem Ladungsversuch erworben hatte. Auch der Versuch vom 15. VII. läßt sowohl in seinem $V = 0$ als in den bei der Entladung erhaltenen Werten nichts davon erkennen, daß die seit dem 9. VII. eingetretene bedeutende Verminderung der Stromstärken etwa auf Polarisation beruhe. Diese Ergebnisse sprechen somit sehr gegen unsere Annahme einer allmählich wachsenden Polarisation als Ursache der langzeitigen Abnahme der L.-F.[1])

Ich habe aber doch geglaubt, die Frage noch etwas weiter verfolgen zu müssen und versuchte zunächst, ob etwa ein häufiger, rascher Wechsel von Ladung und Entladung — unsere Versuchsreihe besteht ja auch aus Versuchen mit solchem, aber in langen Zeiträumen unternommenem Wechsel — eine Beschleunigung der langzeitigen Abnahme der L.-F. zur Folge habe. In der Tabelle S. 48 u. 49 ist unter dem 7. I. das Resultat dieser Probe wiedergegeben. Die zweite, an diesem Tage angestellte Bestimmung der L.-F. geschah, nachdem unmittelbar

---

1) Die verhältnismäßig geringe Größe der Stromstärke, die am 16. I. beobachtet wurde, als die Platte zum erstenmal mit der Akkumulatorenladung versehen war, wo man also eine polarisationsfreie Platte als vorhanden annehmen müßte und deshalb einen größeren Wert der Stromstärke erwarten würde, ließe sich zur Not noch durch die nicht unwahrscheinliche Annahme erklären, daß die Platte bei der einem Jahr vorher vorgenommenen Kathodenversilberung eine sehr kräftige Polarisation erworben hätte. Die Richtung der dabei in der Platte erzeugten Kraftlinien war wenigstens so, daß eine Polarisation von erforderlichem Vorzeichen hätte entstehen können.

vorher die Platte in gleichbleibenden Intervallen von je 5 oder auch von je 1 Minute etwa 20mal abwechselnd mit 1530 Volt geladen und zur Erde abgeleitet worden war. Die in den drei Versuchsperioden erhaltenen Stromstärken sind ersichtlich wesentlich kleiner, als die bei dem am gleichen Tage vor dem erwähnten Wechseln gefundenen, und aus den beiden letzten Kolumnen der Tabelle ergibt sich, daß die Abnahme dieser Werte während des Versuchs langsamer war, als bei jenem vorhergegangenen Versuch. Dafür vermindert sich aber auch die bei der gleich folgenden Entladung auftretende Stromstärke entsprechend langsamer wie die eingeklammerten Zahlen und deren Vergleich mit denen eines auf S. 38 ausführlich mitgeteilten, nach einer Erdung von 20 Stunden, also in normaler Weise angestellten Versuch, zeigen. Berücksichtigt man das Superpositionsgesetz, und zwar bei allen — nicht in der Tabelle ausführlich mitgeteilten — Werten, so findet man, daß jedenfalls eine merkliche Verringerung der L.-F. durch den häufigen Ladungswechsel nicht eingetreten ist. Auch die am folgenden Tage (8. I.) in normaler Weise angestellten Ladungsversuche zeigten davon nichts, so daß unsere Frage eine negative Beantwortung erhalten hat. Ebensowenig haben Versuche mit sehr langer, Stunden bzw. tagelanger Ladungsdauer ein besonderes, die Polarisationshypothese stützendes Ergebnis geliefert. Vgl. Tab. V unter 27. XII., 25. II. und 21.—25. II.

Aus all diesen Versuchen darf man natürlich nicht etwa schließen, daß die Vorgänge bei der Ladung bzw. Entladung überhaupt nicht die Ursache der langzeitigen Abnahme der L.-F. sein können; sie zeigen nur, daß diese Vorgänge keinen oder nur wenig Einfluß haben, nachdem die Platte während einer langen Versuchszeit häufig in der beschriebenen Weise zu L.-F.-Bestimmungen verwendet worden war.

Es entstand weiter bei mir die Vermutung, daß die langzeitige Abnahme der L.-F. vielleicht doch noch einer wachsenden Polarisation zuzuschreiben sei, einer Polarisation natürlich, die sich in der Weise „versteckt" haben müßte, daß sie sich wohl bei einer Ladung, nicht aber, wie oben nachgewiesen, bei einer Erdung der Platte zur Geltung bringen konnte. Ich kam auf diesen Gedanken, durch die zuerst von Hopkinson bei Glas beobachtete und im hiesigen Institut bei anderer

Gelegenheit bestätigte Tatsache, daß eine Ladung sich über eine folgende von entgegengesetztem Vorzeichen hinaus noch bei einer folgenden Entladung bemerkbar machen kann. Es kann sich demnach unter Umständen eine im Dielektrikum erzeugte elektromotorische Kraft der Polarisation eine Zeitlang gewissermaßen verborgen halten. Auch bei blauem NaCl fand ich, wenn belichtet, dieselbe Erscheinung wieder (vgl. unten S. 163), und ich glaubte sogar eine direkte Bestätigung dieser Auffassung von der Ursache der langzeitigen Abnahme der L.-F. gefunden zu haben, als sich bei einem Versuch mit X-bestrahltem NaCl ergab, daß dasselbe zwar im Dunkeln keine Anzeichen von Polarisation, wohl aber bei darauffolgender Beleuchtung, und zwar in sehr kräftiger Weise lieferte.[1]) Bei näherer Überlegung aber bemerkte ich, daß diese zuletzt genannte Elektrometerablenkung doch nicht so groß war, daß auch bei der im Dunkeln stark verringerten L.-F. ein Ausschlag hätte wahrgenommen werden können. Eine einigermaßen annehmbare Begründung für die oben erwähnte Vermutung hat sich also nicht finden lassen.

h) Ich habe mir zur Erklärung der langzeitigen Abnahme der L.-F. und der nach längerer Ruhepause beobachteten Vermehrung der gesunkenen L.-F. die Frage vorgelegt, ob es mit den Versuchsergebnissen vereinbar sei, anzunehmen, daß eine Ladung auch im Steinsalz eine Art „Reinigung" bewirke, wie sie zuerst H. Hertz bei Benzin beobachtet hat, die sich ebenfalls in einer während der Ladung stattfindenden Abnahme der L.-F. zeigte, und die sich durch Umrühren des Benzins wieder rückgängig machen ließ. Prüfen wir die vorliegenden Versuchsergebnisse auf die Möglichkeit einer solchen Annahme.

Nach den beiden Ruhepausen vom 16. I. bis 9. VIII. bzw. vom 29. VII. bis 20. X., in denen sich die Platte, nicht von ihrer Glyzerinlösung befreit, meistens im Dunkeln im Exsikkator befand, müßte nach unserer Annahme die durch die vorhergegangenen Ladungen „gereinigte" Platte wieder „verunreinigt" worden sein. An eine Reinigung der Platte auf der ganzen Strombahn ist in Anbetracht der kurzen Gesamtdauer der Ladung wohl nicht zu denken; es würde aber auch

1) Es sei hier nebenbei erwähnt, daß eine vorhandene Polarisation eine erneute X-Bestrahlung überdauern kann.

wohl genügt haben, wenn durch die Ladung nur ein kleiner Teil der dem natürlichen Steinsalz beigemengten Stoffe in der Nähe der Elektroden eine größere bzw. geringere Anhäufung erfahren oder sich an den Elektroden abgeschieden hätte. Die nach der Ladung eintretende Verunreinigung mußte als ein vielleicht von elektrischen Kräften unterstützter Diffusionsvorgang aufgefaßt werden, der im Vergleich zu dem Reinigungsprozeß ein äußerst langsamer sein müßte, so daß nach jedem Ladungsversuch, namentlich im Anfang der langen Versuchsreihe, immer eine etwas mehr gereinigte Platte zurückbliebe. In dieser Weise ließen sich m. E. wenigstens die beiden genannten Haupterscheinungen wohl erklären. Mehr Schwierigkeit macht die Frage, wie die Platte auch nach Anbringen der Elektroden von außen her ihre Verunreinigung erhalten haben könnte. Die Silberbelegung dürfte die Platte gegen eine solche Aufnahme schützen, die Salz-Glyzerinlösung dagegen erscheint dazu besser geeignet; man könnte denken, daß etwas Flüssigkeit, etwa Wasser, in das NaCl hineindiffundiere und dieses „verunreinige". Die „Reinigung" würde in einem Hinausschaffen des Wassers durch elektrische Kräfte bestehen: dann aber müßte eine Ladung mit Elektrizität von entgegengesetzter Art keine Reinigung, sondern eher eine größere Verunreinigung erzeugen, was jedoch mit den Beobachtungen nicht vereinbar ist. Um diesem Widerspruch zu entgehen, müßte weiter angenommen werden, daß die Reinigung durch Vernichten (Zersetzung, Verdampfung) und nicht durch Transport der eingedrungenen Flüssigkeit zustande käme, und die Verunreinigung durch ein nur von Molekularkräften bewirktes Hineinwandern, und zwar in feine, nicht sichtbare Kanäle, auf deren Vorhandensein man in der Tat schon durch anderweitige Beobachtungen, wie z. B. durch die Anordnung von submikroskopischen Na-Teilchen in gefärbtem Steinsalz, hingewiesen wird.

Es fragt sich nun, inwieweit bei der vorliegenden Arbeit wahrgenommene Einzelheiten im Verhalten der Platte mit unserer Annahme in Einklang zu bringen sind. Es ist vielleicht aufgefallen, daß die zu allererst (16. I.) mit der „neuen" Platte erhaltenen Stromstärken nicht so groß sind, wie man es von Versuchen, die zum erstenmal mit der Platte gemacht wurden, erwarten müßte: Folgende Erklärung erscheint möglich.

Die Versilberung der Platte fand ein Jahr vor jenen Versuchen statt[1]); dabei war die Platte längere Zeit starken elektrischen Kräften, die in der Richtung ihrer Dickendimension wirkten, ausgesetzt, so daß eine so ergiebige „Reinigung" stattgefunden haben könnte, daß davon nach einem Jahr noch ein beträchtlicher Teil übrig geblieben wäre und die Platte infolgedessen eine geringe L.-F. besäße. Die bedeutende, vielleicht nur scheinbar sprungweise auftretende Änderung der L.-F. vom 9. VII. auf den 15. VII. könnte wohl erklärt werden durch eine besonders kräftige Reinigung, die die Platte infolge der inzwischen vorgenommenen langen, ununterbrochenen, zweitägigen Ladung mit etwa 1500 Volt erhalten hatte; eine Reinigung, die so gründlich hätte sein müssen, daß sie in den auf die Ladung folgenden 4 Tagen mit Erdung nicht rückgängig gemacht werden konnte. Es wäre dann aber nicht recht verständlich, weshalb in dieser langen Ladungszeit die Reinigung nicht so weitgehend gewesen sein sollte, um nicht am 15. VII. einen so geringen Wert für die Stromstärke zu liefern, wie er am 12. XI, also nach nur $17 \cdot 6 = 102$ Minuten Gesamtladung (Anzahl der Versuche × Dauer je einer Ladung) erhalten wurde, als die am 20. X. beobachtete Stromstärke von 21,6 auf 13,9 Skalenteile nach unserer Annahme ebenfalls infolge einer Reinigung gesunken war. — Wenn eine während eines Ladungsversuchs eintretende Reinigung besonders ergiebig am Anfang einer längeren Versuchsreihe sein soll — weil, wie aus der Kurve 4 von Fig. 2 ersichtlich ist, die langzeitige Abnahme dann am stärksten ist —, so müßte die während eines Versuchs vorhandene, verhältnismäßige Abnahme der Stromstärke zu dieser Anfangszeit bedeutender sein als im späteren Verlauf der Versuchsreihe. Aus den Kolumnen 15 und 16 der Tab. V ist zu erkennen, daß diese Folgerung in den beiden Versuchsreihen (der am 9. VII. bzw. am 20. X. angefangenen), insbesondere in der letzteren wirklich beobachtet wurde. — Nicht gleich befriedigend fällt dagegen folgende Überlegung aus. Nach unserer Vorstellung müßte die Platte, wieder hauptsächlich am Anfang einer Versuchsreihe, sofort nach einem Ladungsversuch, wesentlich reiner

1) Die mit ihrem aufgekitteten, aber nicht mit Glyzerin gefülltem Trögchen versehene Platte befand sich während dieses Jahres im Exsikator und meistens im Dunkeln.

sein, als sie es vor dem Versuch war. Dieser Unterschied müßte sich aber vor allem in dem auf den Ladungsversuch gleich folgenden Entladungsversuch durch ein Nichteintreffen des Superpositionsgesetzes zeigen. Für das Vorhandensein einer solchen Abweichung habe ich aber in den Beobachtungen keine sichere Bestätigung finden können. — Manche Tatsachen scheinen demnach unsere Annahme wohl zu bestätigen, andere aber lassen sich mit ihr nicht gut in Einklang bringen.

i) Zu ähnlichen Überlegungen führt die Annahme von einem Entstehen und Verschwinden einer dünnen, schlecht leitenden Schicht an der Grenze des NaCl und der Salz- Glyzerinlösung. Solche Schichten können nach Maxwell und nach Versuchen von Arons die „Rückstandsbildung" stark beeinflussen, und zwar in einer Weise, die im großen und ganzen mit den Wahrnehmungen über die langzeitige Abnahme wohl vereinbar wäre. Eine derartige Schicht müßte am Anfang einer Versuchsreihe vorhanden gewesen und dann infolge von Ladung und Entladung mehr und mehr verschwunden sein und sich erst wieder neu gebildet bzw. verstärkt haben, während die Platte unbeansprucht blieb. Über die Fragen, woraus diese Schichten in unserem Falle bestehen sollen und wie man sich ihr Verschwinden beim Versuch zu denken habe, kann ich keine Auskunft geben; dagegen sei das Ergebnis von Versuchen angeführt, die mehrfach unternommen wurden, um einen bestimmten Anhaltspunkt für die Beurteilung der Frage, ob die obige Annahme tatsächlich richtig ist, zu gewinnen. Zum Teil wurden diese Versuche mit der „älteren" Platte angestellt — sie sind auch bereits oben erwähnt — zum Teil mit der „neueren" Platte (nach den in der Tab. V aufgeführten Versuchen). Es wurde wiederholt nur die Glyzerinlösung durch eine neue ersetzt, oder die Platte abgeschliffen und wieder mit Glyzerinlösung versehen, oder eine gründliche Säuberung der Plattenoberfläche mittels Chloroform vorgenommen entweder zu einer Zeit, wo die L.-F. schon beträchtlich abgenommen hatte, oder auch schon früher. In keinem dieser Fälle brachte eine dieser Operationen bei einem gleich folgenden Ladungsversuch eine Verminderung der Stromstärke oder eine Vermehrung auf den am Anfang der Versuchsreihe gefundenen großen Wert. Meistens war keine Wirkung festzustellen, und nur ein paarmal trat, wenn die Stromstärke stark

gefallen war, eine vorübergehende geringe Vermehrung ein. Diese Probeversuche haben somit weder für noch gegen die Richtigkeit der Annahme einen Beweis geliefert. (Vgl. S. 76.)

Einen nicht leicht zu beseitigenden Einwand gegen die unter h) mitgeteilten Vorstellungen liefern die auf S. 35 erwähnten Ladungsversuche mit vorher stark erhitztem Steinsalz. Dort ist u. a. angegeben, daß sowohl die stark erhitzte, wie die nicht erhitzte Platte, die beide durch Spalten aus *einem* Stück NaCl erhalten wurden, bei den *sehr bald* auf die Erhitzung folgenden Ladungsversuchen quantitativ gleiche Resultate und außerdem auch die Erscheinung der langzeitigen Abnahme lieferten. Nach den obigen Überlegungen hätte die vorher erhitzte und bald nach dem Erhitzen untersuchte Platte wohl keinen so großen Anfangswert und keine langzeitige Abnahme liefern dürfen, wenn die „Verunreinigung" in dem Vorhandensein eines leicht verdampfbaren Stoffes bestanden hätte. —

Übersieht man die Versuche, die verschiedenen Vermutungen über die Ursache der so häufig beobachteten langzeitigen Abnahme der L.-F. mit den Tatsachen in Einklang zu bringen, so wird man verstehen, daß ich micht nicht entschließen konnte, eine dieser Vermutungen als die wahrscheinlich richtigste zu bezeichnen. Vielleicht haben einige der besprochenen Ursachen zusammengewirkt. Einer Lösung der Frage und zugleich der anderen Frage nach der Ursache der in den Versuchsergebnissen übrig gebliebenen Unstimmigkeiten hoffte ich näher kommen zu können, wenn ich wieder brauchbare Steinsalzpräparate erhalten haben würde, die dann auf *beiden* Seiten mit einer Silberbelegung versehen werden sollten, um sowohl die Verwendung von Glyzerin zu umgehen, als auch um durch angelötete Platinspirälchen einwandfreiere Verbindungen mit den betreffenden Zuleitungen zu erhalten. (Vgl. den Bericht über diese Versuche auf S. 71 und folgende.)

Man wird vielleicht der Ansicht sein, daß ich auf das Suchen nach der langzeitigen Abnahme unverhältnismäßig viel Zeit verwendet und für die Mitteilung der Ergebnisse unverantwortlich viel Raum beansprucht habe. Der letzte Vorwurf wäre berechtigt, wenn sich wenigstens sicher herausgestellt hätte, daß die Erscheinung bloß eine nebensächliche ist, wie ich es lange vermutet habe und auch jetzt noch nicht als

ganz ausgeschlossen betrachte. Die Versuche haben aber einen solchen Nachweis nicht erbracht, und es blieb deshalb auch die Möglichkeit bestehen, daß die Erscheinung doch eine Folge einer unbekannten, nicht unwichtigen Eigenschaft des Materials ist, deren Erkennung nützlich gewesen wäre. Weil ich nun glaubte, ein eventuell von anderer Seite beabsichtigtes Suchen nach dieser Eigenschaft durch die Mitteilung meiner Bemühungen vielleicht erleichtern zu können, wählte ich die ausführliche Form der Darstellung. —

Ein Teil der Versuche mit der versilberten Platte galt der nochmaligen Prüfung von zwei ebenfalls schon oben behandelten, m. E. für die Auffassung des elektrischen Vorgangs im Kristall wichtigen Fragen: Ob die L.-F. des NaCl nach längerer, etwa 24stündiger Ladung einen für folgende Zeiten unverändert bleibenden Wert erreicht (Ansicht von Gauguin und von Braun) oder ob sie fortwährend noch kleiner wird; und zweitens, ob der Temperaturkoeffizient der L.-F. derselbe ist für die großen am Anfang eines Ladungsversuchs und für die kleineren später sich einstellenden Stromstärken.

Zu diesem Zwecke blieb die im Dunkeln aufgestellte Platte nach dem letzten Versuch vom 21. I. mehrere Tage unausgesetzt mit etwa 1500 Volt geladen und wurde während dieser Zeit fast täglich auf ihre L.-F. untersucht. Um verschiedene Temperaturen zu erhalten, wurde das Zimmer abwechselnd geheizt und abgekühlt. Dabei machte sich wieder das Fehlen eines Thermostaten und einer Vorrichtung, die gestattet, die Temperatur der Platte genauer als mit dem neben der Platte aufgestellten Thermometer zu messen, bemerkbar, und einige Sicherheit in dieser Beziehung konnte nur dadurch erreicht werden, daß zwischen den aufeinanderfolgenden Versuchen wieder eine längere Zeit, meist etwa 24 Stunden, eingeschaltet wurde, während der die Temperaturänderung vor sich ging und die Platte genügend Gelegenheit hatte, die allmählich konstant gewordene Temperatur ihrer Umgebung anzunehmen. Immerhin blieb in einzelnen Fällen doch noch eine gewisse Unsicherheit in dieser Beziehung bestehen, die um so empfindlicher war, als der Temperatureinfluß auf die L.-F. recht bedeutend ist.

Eine noch größere Unsicherheit kann in die Ergebnisse hineingebracht worden sein durch das Unbekanntsein der

selbständigen Aufladungen von Elektrometer mit Platte (von dem „$V = 0$" der vorhergehenden Tabellen IV bzw. V). Der Elektrometergang, d. h. die selbständige Aufladung des Elektrometers und seiner Leitung bis zur Wippe W_3 läßt sich zwar immer bestimmen und wurde bei diesen Versuchen auch immer bestimmt. Was aber auch jetzt wieder eigentlich gebraucht wurde, war die Kenntnis der erstgenannten Selbstaufladung, und diese ließ sich natürlich nicht bei dauernd geladener Platte messen. Wie ich mir aus dieser Schwierigkeit so gut wie möglich geholfen habe, wird unten mitgeteilt werden. Schließlich sei noch auf den oben genannnten Einfluß einer eventuellen Inkonstanz der Akkumulatorenspannung auf die Versuchsergebnisse hingewiesen. Diesen drei Fehlerquellen ist es wohl zuzuschreiben, daß keine noch bessere Übereinstimmung in den Ergebnissen gefunden wurde; immerhin hat dieser Mangel an Übereinstimmung eine eindeutige Beantwortung der beiden gestellten Fragen nicht verhindert.

Tabelle VI.

	Zeit der Beobachtung	Temperatur	Spannung	Elektrometergang in 5 Minuten	Elektrometerausschläge in 5 Minuten	Differenz	Auf 18,0° und gleiche Spannung reduz. Werte d. L. F. ($\lg \text{nat}\, c = 0{,}168$ f. Vers. 1 zu groß) mit Elektrometergangkorrektion	Auf 18,0° und gleiche Spannung reduz. Werte d. L. F. ($\lg \text{nat}\, c = 0{,}168$ f. Vers. 1 zu groß) ohne Elektrometergangkorrektion
1	22. I. $9^h\,30$	16,8°	1570	0,5 Skt.	2,0 Skt.	1,50 Skt.	1,83	2,45
2	24. I. $10^h\,0$	21,0°	1565	0,67 „	2,85 „	2,20 „	1,33	1,72
3	24. I. $5^h\,0$	21,7°	1565	0,75 „	3,25 „	2,50 „	1,34	1,75
4	25. I. $11^h\,0$	15,6°	1560	−0,07 „	0,77 „	0,80 „	1,20	1,15
5	26. I. $11^h\,0$	17,0°	1560	0,20 „	1,20 „	1,00 „	1,18	1,42
6	27. I. $4^h\,0$	15,8°	1570	0,83 „	1,45 „	0,60 „	0,87	2,10
7	28. I. $9^h\,30$	20,1°	1560	0,50 „	2,00 „	1,50 „	1,05	1,41
8	29. I. $6^h\,30$	27,0°	1560	1,35 „	5,94 „	4,60 „	1,02	1,31
9	30. I. $10^h\,30$	27,8°	1560	0,80 „	5,97 „	5,15 „	0,99	1,15
10	30. I. $6^h\,30$	18,3°	1560	0,55 „	1,58 „	1,05 „	1,00	1,50
11	31. I. $4^h\,30$	16,1°	1560	0,70 „	1,28 „	0,60 „	0,83	1,76
12	1. II. $4^h\,0$	21,3°	1560	0,97 „	2,53 „	1,55 „	0,89	1,45
13	11. II. $10^h\,0$	22,7°	1550	1,5 „	3,4 „	1,9 „	0,86	1,55
14	14. II. $5^h\,0$	27,8°	1545	1,35 „	5,18 „	3,83 „	0,74	1,00
15	19. II. $11^h\,30$	29,0—29,4°	1545	0,55 „	5,33 „	4,78 „	0,70	0,88
16	20. II. 4^h	28,05°	1540	1,04 „	5,10 „	4,06 „	0,73	0,81

In der Tab. VI sind unter dem 22. I. bis 20. II die Resultate dieser Versuche eingetragen. Der erste verzeichnete Versuch

(22. I.) fand 24 Stunden nach dem Anlegen der Spannung (vgl. S. 48 u. 49) statt. Jeder Wert der L.-F. ist das Mittel aus je vier voneinander um höchstens 0,2 Skalenteile abweichenden Einzelbeobachtungen, die bei einer Beobachtungsdauer von je 5 Minuten gleich nacheinander erhalten wurden. Ebenso oft wurde mit jenen Beobachtungen abwechselnd der Elektrometergang und auch die Temperatur gemessen.

Um nun auf die eine Frage — nach dem Betrage des Temperatureinflusses auf die L.-F. — eine Antwort zu finden, wird man aus dem vorliegenden Material die Ergebnisse von zeitlich möglichst nahegelegenen, bei möglichst verschiedenen Temperaturen angestellten Versuchen miteinander zu vergleichen haben und dabei seine Wahl wegen der bestehenden Unsicherheit nicht auf Versuche bei zu niedriger Temperatur, die so kleine Werte der L.-F. lieferten, ausdehnen. Ich habe für die Berechnung des Temperaturkoeffizienten folgende Versuchspaare zugrunde gelegt: Versuch 1 und 3, Versuch 7 und 8, Versuch 9 und 10, Versuch 9 und 12 und als Gesetzmäßigkeit für die Abhängigkeit von L.-F. und Temperatur, weil sich der mit der Temperatur steigernde Einfluß der Temperatur bemerkbar machte, wieder die Beziehung $\varkappa = a\,c^t$ gebraucht. Die unmittelbar gefundenen Werte der L.-F. sind vor ihrer Verwertung noch auf gleiche Spannung zu reduzieren und mit einer kleinen Korrektur zu versehen, die sich auf die soeben erwähnte zeitliche Abnahme der L.-F. bezieht und für die man aus dem zu besprechenden zeitlichen Verlauf der Versuche nach einiger Überlegung den benötigten ungefähren Betrag ableiten kann. Über die Frage, wie die Selbstaufladung zu berücksichtigen sei, habe ich mich in folgender Weise entscheiden können. Ich hatte die Wahl, als Ersatz für das „$V = 0$“ entweder den „Elektrometergang“ zu verwenden, oder gar keine Korrektion anzubringen. Um zu erfahren, was vorteilhafter war, leitete ich zuerst aus einigen für den Elektrometergang korrigierten Versuchsergebnissen (Kolumne 7 der Tab. VI) ungefähre Werte des Temperaturkoeffizienten ab und reduzierte dann alle so korrigierten Ergebnisse der ganzen Versuchsreihe auf die gleiche Temperatur von 18,0°. Die so erhaltene Wertreihe (Kolumne 8 der Tab. VI) verglich ich darauf in bezug auf die Gleichmäßigkeit ihres Verlaufs mit einer Reihe,

die die auch auf 18,0° reduzierten, aber nicht für den Elektrometergang korrigierten Werte enthält (Kolumne 9 der Tab. VI); dabei stellte sich heraus, daß die erstgenannte Reihe so wesentlich vorzuziehen war, daß ich annehmen durfte, es sei besser, diese Korrektion anzubringen als nicht, und außerdem, daß der verwendete Temperaturkoeffizient der ungefähr richtige ist. Das Verfahren ist natürlich keineswegs genau, lieferte aber doch für den vorliegenden Zweck brauchbare Resultate.

Folgende Werte wurden für den Temperaturkoeffizienten erhalten:

Tabelle VIa.

Datum	22.—24. I.	28.—29. I.	30. I.	30. I. u. 1. II.
$\varkappa \frac{d\varkappa}{dt}$	0,13	0,17	0,17	0,17

Stellt man diese nach *längerer* (eintägiger bzw. mehrtägiger) Ladungszeit erhaltenen Temperaturkoeffizienten zusammen mit dem, den wir *kurz nach Anfang* der Ladungszeit (16—331 Sekunden) bekamen — 0,08, vgl. S. 44 —, so erkennt man, daß das schon bei früheren Versuchen gefundene Ergebnis bestätigt worden ist: *Der Temperaturkoeffizient des unbestrahlten NaCl nimmt mit der Dauer der Ladung zu.* Nimmt man noch die aus der Tab. V leicht zu entnehmende Tatsache hinzu, daß die in der *allerersten* Beobachtungsperiode (1—16 Sekunden) erhaltenen Werte der Stromstärke noch weniger von der Temperatur beeinflußt sind, als die der folgenden Periode (16—331 Sekunden), so ist die Vermutung nicht von der Hand zu weisen, daß bei der Ladung — und ähnlich auch bei der Entladung — zwei gleichzeitig verlaufende Vorgänge in der Platte stattfinden, von denen der eine mit geringem Temperaturkoeffizienten im Anfang stärker hervortritt als später, während der zweite mit größerem Koeffizienten erst nach längerer Ladungszeit, besonders vorwiegend vorhanden ist. Als ersten Vorgang wird man geneigt sein, die sogenannte „Rückstandsbildung" — nach Maxwell eine Folge von dem Vorhandensein von Stellen im Körper mit verschiedenem Verhältnis von Dielektrizitätskonstante und Leitvermögen — anzunehmen, und den zweiten Vorgang[1]), dem also die größere

1) Von anderen Erfahrungen ausgehend, kamen wir schon früher zu der gleichen Vermutung.

Abhängigkeit von der Temperatur zukäme, als eine eigentliche Elektrizitätsleitung in der Platte, und zwar mit Rücksicht auf die Größe des Temperaturkoeffizienten vielleicht als eine elektrolytische Leitung, anzusehen.

Gegen diese Anschauung der Existenz zweier verschiedener Vorgänge lassen sich aus den vorliegenden Versuchen keine stichhaltigen Einwände ableiten. In der Tatsache, daß die kurz nach Anlegen der Spannung und die viel später bestimmten Temperaturkoeffizienten nicht unter genau denselben Verhältnissen gemessen wurden — indem erstere nach jedesmaliger längerer Ableitung der Platte zur Erde, während welcher Zeit die nötigen Temperaturveränderungen vorgenommen wurden, letztere dagegen bei immer fortdauernder, längerer Ladung der Platte gemessen wurden —, kann keine Erklärung für den beträchtlichen Unterschied in beiden gefunden werden. Ebenso halte ich es auch für unwahrscheinlich, daß eine Verschiedenheit in der Geschwindigkeit der den Strom darstellenden Bewegung von Elektrizitätsträgern der gleichen Art und Herkunft zu Anfang der Ladung und später die Ursache des erwähnten großen Unterschiedes sein könnte. Vielleicht wird man noch meinen, daß die Verwendung der Werte des Elektrometerganges und nicht der im vorliegenden Falle nicht meßbaren, sonst aber, wie gesagt, geeigneteren, bei einem Vorversuch mit $V = 0$ sich ergebenden Werte zur Korrektion der Elektrometerausschläge bei der Ladung die Ursache der Verschiedenheit der für den Temperaturkoeffizienten erhaltenen Werte sein könnte, weil im letzten Falle alle Werte etwas größer ausgefallen wären, und diese Vermehrung sich bei den nach längerer Ladungszeit erhaltenen kleinen Werten in der Berechnung des Koeffizienten natürlich mehr bemerkbar gemacht hätte, als bei den größeren der Anfangszeit. Indessen ist diese Vermutung nicht zutreffend, denn wenn man berechnet, wie groß diese Vermehrung hätte sein müssen, um für alle Zeiten den gleichen Temperaturkoeffizienten, etwa den Anfangswert (0,08) zu erhalten, so kommt man zu einem ganz unmöglichen Betrag dieser Korrektion.

Für die Beantwortung der anderen Frage von S. 66 genügt ein Blick auf die Fig. 9, die die reduzierten Werte der Stromstärken der Tab. VI in ihrer Abhängigkeit von der Ladungsdauer enthält. Man erkennt, daß die Stromstärken,

die L.-F., fortwährend, auch noch gegen das Ende der 29-tägigen Ladungsdauer abgenommen hat. Für ein Konstantwerden in dieser Zeit ist keine Andeutung vorhanden (vgl. S. 8).

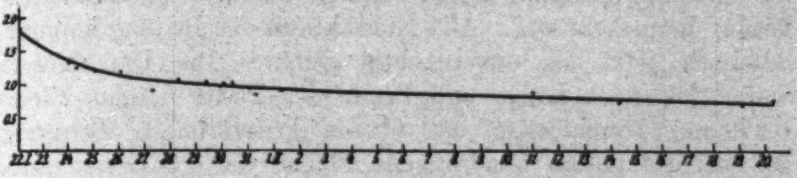


Fig. 3.

Die trotz Ersetzens der Graphitelektrode durch eine kathodisch niedergeschlagene Silberelektrode auch bei den Leitungsversuchen mit der „neuen" lichtunempfindlichen NaCl-Platte aufgetretenen sprungweisen kleinen Änderungen der L.-F., sowie die wieder beobachtete im Laufe einer längeren Zeit wahrgenommene Abnahme der L.-F., Erscheinungen, für die keine rechte Erklärung gegeben werden konnte, veranlaßten mich, noch eine neue, auch von Steeg und Reuter bezogene, anscheinend fehlerfreie, hochpolierte Platte zu untersuchen (vgl. S. 65). Ich hatte nämlich doch wieder Verdacht bekommen gegen die Zuverlässigkeit des Kontaktes der unteren Belegung mit der Elektrometerleitung und gegen die Anwendung der Glyzerinelektrode. Dieser Kontakt wurde bisher, wie mitgeteilt, durch eine mittelst Feder angedrückte, verplatinierte Metallkappe hergestellt. Solche Kontakte mit kleiner Berührungsfläche zeigen bekanntlich, wie z. B. beim Kohärer in seiner ursprünglichen Form, eigentümliche Eigenschaften in bezug auf ihre Güte, insbesondere, wenn sie vor einem Versuch von stärkeren Strömen durchflossen werden, und letzteres war ja bei den vorliegenden Versuchen jedesmal, wenn die hohe Ladung an die Platte angelegt oder von ihr entfernt wurde, der Fall.

Die neue senkrecht zur Würfelfläche geschliffene Platte wurde wieder kathodisch versilbert und in gleicher Weise wie die vorhergehende mit Elektrode und Schutzring versehen. An beide *lötete* ich (mit Woodmetall) aus dem angegebenen Grunde Spirälchen aus dünnem Platindraht, die

ihrerseits mit der Erdleitung, bzw. mit der Eektrometerleitung verlötet wurden. Auch die obere Elektrode bestand aus kathodisch niedergeschlagenem Silber, so daß das Glaströgchen mit der Salzglyzerinelektrode in Wegfall kam, und der Kontakt ebenfalls durch Anlöten an die Akkumulatorenleitung hergestellt war. Alle Kontakte in der Leitung konnten demnach jetzt als unverdächtig gelten. Die Dimensionen waren folgende: Länge und Breite der Platte 3,4 cm, Dicke 0,270 cm, Durchmesser der oberen kreisförmigen Belegung 2,9 cm; die untere quadratische Fläche war ganz, mit Ausnahme eines Ringes von 1,68 cm äußerem und 1,65 cm innerem Durchmesser belegt. Der schmale Isolierring funktionierte wieder in dem mit H_2SO_4 getrockneten Kästchen tadellos. Eine Bestimmung der durch Anlegen von 4 Volt an die obere Belegung auf der unteren Belegung influenzierten Elektrizitätsmenge gab durchaus normale Werte. Für die Aufstellung der Platte in ihrem Kästchen wurde eine etwas abgeänderte Einrichtung gewählt, deren Beschreibung wohl unterbleiben kann; nur muß mit Rücksicht auf folgendes noch erwähnt werden, daß diesmal, im Gegensatz zu früher, der äußere, nicht versilberte Rand der Platte von einem ziemlich dicht anschließenden, zur Erde abgeleiteten Metallrahmen umgeben war. Die Platte blieb nach ihrer Vorbereitung etwa 14 Tage am Tageslicht im Exsikkator liegen, wurde dann in ihr verdunkeltes Kästchen gesetzt und zur Erde abgeleitet; mit dem Ladungsversuch wurde etwa 10 Tage später angefangen.

Um einen Vergleich der mit dieser Platte, der „neuesten", zu erhaltenden L.-F. mit der bei der vorhergehenden „neuen" Platte gewonnenen zu bekommen, wurde auch die letztere, mitsamt ihrer Fassung unverändert aufbewahrte Platte in ein zweites Kästchen aufgestellt. Sie hatte seit ihrer letzten Prüfung größtenteils im Dunkeln im Exsikkator etwa $3^1/_2$ Monate gelegen. Um auch bei ihr einen etwas mehr zuverlässigeren Kontakt mit der Elektrometerleitung zu erhalten, wurde zwischen der unteren Plattenbelegung und der federnd angedrückten, verplatinierten Metallkappe ein faltiges Stückchen dünnster Platinfolie gelegt.

Es sei zunächst angegeben, wie diese letztere Platte sich bei ihrer erneuten Prüfung im Dunkeln verhielt.

Tabelle VII.

Datum	t	Reduzierte Elektrometer-Ausschläge ohne | mit Berücksichtigung der Temperatur 1—16 Sek.	16—121 Sek.	151—331 Sek.	Σ''
20. VII.	18,3°	15,8	13,1	7,0	20,1
21. VII.	18,2°	15,4	13,2	7,0	20,2
21. VII.	18,3°	14,7	13,2	7,8	21,0
25. VII.	17,1°	11,5	12,5	7,8	20,3
26. VII.	17,3°	11,1	12,4	8,25	20,6
26. VII.	18,2°	10,7	11,6	7,8	19,4
28. VII.	18,6°	10,0	10,35	7,6	17,9
29. VII.	17,6°	9,7	10,3	8,2	18,5
30. VII.	19,4°	8,7	9,4	7,4	16,8

Die 10 tägige Reihe von Versuchen mit der beschriebenen Anordnung lieferte im allgemeinen dasselbe Bild wie die oben ausführlich besprochene. Es zeigt sich trotz der auch jetzt aufgetretenen Unregelmäßigkeiten sehr deutlich wieder eine im Laufe der Zeit stattfindende Abnahme der reduzierten Stromstärken, und zwar bei der ersten Periode am auffallendsten. Die Werte der dritten Periode weisen keine solchen Veränderungen auf.[1]) Auch die Wahrnehmung, daß die gleich nach einer längeren Ruhepause der Platte erhaltenen Werte wesentlich größer sind, als die vor dieser Pause gefundenen — als hätte sich die Platte in der Pause erholt — entspricht dem, was auch die früheren Versuche ergeben hatten. Die Platte verhielt sich also jetzt wieder so ziemlich gleich wie zu Anfang (20. X. bis 30. X. Tab. V) der mitgeteilten langen Versuchsreihe, mit der etwa $^3/_4$ Jahre vorher angefangen wurde; die kleine Veränderung an dem Platinkontakt hatte an dem Verhalten der Platte nichts geändert. Da das Superpositionsgesetz nach Ableitung zur Erde immer in befriedigender Weise für die ersten Werte der Stromstärke von jedem Versuch zutraf, kann die Ursache dieser Erscheinungen auch diesmal keiner Inkonstanz der Ladebatterie zugeschrieben werden. Es gewann deshalb wieder der Gedanke die Oberhand, daß die Ursache

1) Die Werte der ersten Versuchsperiode sind in der Tab. VII auch jetzt nicht auf 18,0° reduziert, weil ihr Temperaturkoeffizient nicht bestimmt wurde und jedenfalls verhältnismäßig klein ist. Die Nichtberücksichtigung der geringen Temperaturverschiedenheiten beeinflußt die aus den Versuchen abgeleiteten Folgerungen nicht.

der langzeitigen Abnahme der L.-F. in zeitlichen Veränderungen der Beschaffenheit der Belegungen, und zwar dort, wo die Elektrizitätsleitung zwischen der Belegung und dem schlechtleitenden NaCl vermittelt wird, zu suchen sei. Der Vollständigkeit halber sei noch mitgeteilt, daß die Silberbelegung an der Stelle, wo die Elektrometerleitung anlag, ein klein wenig gelitten hatte.

An diese Versuchsreihe schloß sich ein dreitägiger Versuch mit Dauerladung an, wobei sich ergab, daß die L.-F. sich allmählich dem Werte näherte, der auch bei der zuerst besprochenen Platte (der „älteren") gefunden wurde, was sich übrigens auch schon aus der Tab. VII entnehmen läßt.

Von dem gleichzeitigen Verhalten der „neuesten" — auf beiden Seiten versilberten und mit angelöteten Elektroden versehenen — Platte gibt der erste Teil (20.—30. VII.) der Tab. VIII eine Anschauung.

Tabelle VIII.

Datum	t	Reduzierte Elektrometerausschläge ohne Berücksichtigung der Temperatur 1—16 Sek.	mit 16—121 Sek.	mit 151—331 Sek.	Σ''	
20. VII.	18,5°	1,1	3,26	3,15	6,4	Silberelektrode
21. VII.	18,3°	1,1	3,19	3,00	6,2	
21. VII.	18,2°	1,1	2,46	2,46	4,9	
24. VII.	17,6°	1,2	2,7	2,3	5,0	
25. VII.	17,5°	1,0	2,5	2,6	5,1	
26. VII.	17,2°	0,9	2,8	2,6	5,4	
26. VII.	18,0°	0,8	2,8	2,4	5,2	
28. VII.	18,4°	0,7	2,4	2,3	4,7	
29. VII.	17,7°	0,9	2,5	1,7	4,2	
30. VII.	19,1°	0,6	1,86	1,41	3,3	
7. VIII.	19,4°	4,7	5,34	3,44	8,8	Glyzerinsalzelektrode
9. VIII.	20,3°	3,3	4,75	2,95	7,7	
11. VIII.	21,2°	4,3	3,90	2,67	6,6	
12. VIII.	19,7°	3,9	4,76	2,88	7,6	
14. VIII.	23,8°	4,4	10,65	13,77	24,4*	
15. VIII.	22,4°	4,3	4,10	2,38	6,5	
15. VIII.	24,0°	4,4	3,28	2,07	5,3	
16. VIII.	20,4°	2,8?	4,29?	2,59	6,9?	
17. VIII.	22,0°	3,9	3,68	2,24	5,9	
18. VIII.	20,1°	4,2	3,27	1,76	5,0	
18. VIII.	22,2°	4,3	3,48	1,92	5,4	
19. VIII.	21,6°	3,9	3,44	1,95	5,4	

* Nachwirkung einer Lampenbeleuchtung.

Die Tabelle zeigt wieder das Auftreten einer „langzeitigen Abnahme der L.-F."; ich kann aber nicht mit voller Sicherheit schließen, daß die „neueste" Platte sich in dieser Beziehung so verhält, wie die anderen, weil in diesem Falle die Abnahme möglicherweise eine Folge sein könnte von der Beleuchtung, der die Platte bei und nach ihrer Aktivierung durch die Kathodenbestrahlung ausgesetzt war, d. h. von einer „Nachwirkung", die weiter unten noch besprochen werden soll, und von der wir in der Tabelle unter dem 14. VIII. ein gutes Beispiel finden. Was aber in der Tabelle am meisten auffällt, und was auch zunächst das Wichtigste ist, ist die Kleinheit der für die L.-F. gefundenen Werte: Keine bisher untersuchte Platte, weder die „alte" noch die „neuere" noch irgendeine andere hat so kleine Stromstärken geliefert. Verhältnismäßig am stärksten wurden die in der ersten Versuchsperiode 1 bis 16 Sekunden erhaltenen Werte von dieser Verkleinerung betroffen. Auch der zeitliche Verlauf der Stromstärke während eines Versuchs — der Charakter der einzelnen Versuche — ist ein anderer als bei der „neuen" Platte. Das Verlöten der Kontakte an der Platte, das diese Verbindungen nur verbessern konnte, kann natürlich nicht die Ursache der Verkleinerung sein; nur Materialverschiedenheiten der Platten, sowie das Ersetzen der Glyzerin-Salzelektrode durch eine Ag-Elektrode können dafür in Betracht kommen. Im letzteren Falle müßte eine Flüssigkeitselektrode sich für eine Maxwellsche Rückstandsbildung mehr geeignet erwiesen haben, als eine durch Kathodenbestäubung hergestellte Ag-Schicht; die erwähnte stärkere Verkleinerung der in der ersten Versuchsperiode beobachteten Elektrometerausschläge stünde mit dieser Ansicht in Einklang.

Um zu erfahren, ob das Verhalten der beiden genannten Belegungen in bezug auf Rückstandsbildung wirklich so verschieden sein kann, wurde[1]) die obere Ag-Belegung durch trockenes Abreiben entfernt und eine Glyzerinelektrode von

---

1) Die Platte war vor den im Folgenden besprochenen Versuchen noch einer dreitägigen Dauerladung ausgesetzt; dabei lieferte sie noch immer etwas kleinere Stromstärken als die gleichzeitig untersuchte „neue" Platte, was dafür spricht, daß zwischen den beiden Platten auch eine Materialverschiedenheit besteht.

gleicher Größe angebracht. Die untere Elektrode wurde der Einfachheit halber wieder mittels Druckkontakt mit der Elektrometerleitung verbunden. Die Platte blieb dann, um die Nachwirkung der zu diesen Operationen nötigen, möglichst schwachen Beleuchtung zum größten Teil verschwinden zu lassen, 4 Tage geerdet in ihrem verdunkelten Kästchen liegen.

Vergleicht man nun die in der folgenden Zeit vom 7. VIII. bis 19. VIII. (Tab. VIII) erhaltenen Werte mit den früheren, so erkennt man sofort, wie ganz der Vorstellung einer vermehrten Rückstandsbildung entsprechend, die Stromstärken, und namentlich die der ersten Versuchsperiode nach der Verwendung der Glyzerinelektrode größer geworden sind. Da nun die mit der unteren Kontaktstelle vorgenommene Änderung höchstens ihre Verschlechterung und deshalb keine Vergrößerung der Stromstärke zur Folge gehabt haben konnte, und da außerdem diese Vergrößerung aus verschiedenen triftigen Gründen sicher nicht etwa einer „Nachwirkung" der vorangegangenen Beleuchtung zugeschrieben werden kann, so muß aus allen mit der „neuesten" Platte vorgenommenen Versuchen in der Tat geschlossen werden, daß *eine Glyzerin-Salzelektrode eine wesentlich größere Rückstandsbildung zur Folge hat als eine Ag-Belegung.*[1]) Wie man sich diesen mir unerwarteten Einfluß der Flüssigkeitselektrode zu deuten hat, ist schwer zu sagen, wie schon auf S. 64 bemerkt wurde. Es scheint mir aber nunmehr doch etwas wahrscheinlicher geworden zu sein, daß auch die bisher rätselhafte Erscheinung der „langzeitigen Abnahme der L.-F." mit dem beobachteten Verhalten der Glyzerinelektrode zusammenhängt.

Um über diese Frage vielleicht etwas Näheres zu erfahren, beabsichtigte ich, die Platte noch zu weiteren Versuchen zu verwenden; sie wurde zum Teil neu versilbert; sie zeigte aber dann nachher ein so verändertes, bei keiner anderen Platte wahrgenommenes Verhalten, so z. B. unter Umständen Ströme von falscher Richtung, daß ich die Platte nicht zu dem angewendeten Zwecke verwenden konnte. Nach einer ziemlich langwierigen Prüfung gelangte ich zu der Ansicht, daß durch die neue Versilberung in der Platte feine Sprünge entstanden

1) Bei der folgenden Untersuchung von X-bestrahltem Material spielt diese Eigenschaft der Glyzerinelektrode keine störende Rolle.

waren; über diesen Teil der Arbeit brauche ich wohl kaum zu berichten. Weitere Versuche mit neuen Platten nach der angegebenen Richtung unternahm ich nicht und begnügte mich mit der vorläufigen Auskunft, die die letzte Platte in einer Hauptfrage geliefert hat.

Bisher hatten die verschiedenen Platten, deren L.-F. während einer längeren Versuchsreihe deutlich gesunken war, während der folgenden Ruhepause im Exsikkator gelegen; regelmäßig war bei einer sich daran anschließenden Prüfung die L.-F. vergrößert erschienen. Die gemachten, im Obigen mitgeteilten Erfahrungen gaben Veranlassung zu der Frage, ob diese Vergrößerung auch eingetreten wäre, wenn die Platte nach dem letzten Entladungsversuch in ihrem Kästchen geblieben wäre. Beide Fälle unterscheiden sich nämlich dadurch, daß die Platte im ersten Falle mit isolierten, im zweiten Falle dagegen mit geerdeten, untereinander verbundenen Belegungen ihre Ruhezeit zugebracht hätte. Ich ließ deshalb die „neue" Platte nach dem letzten mit ihr vorgenommenen Ladungs-Entladungsversuch (vgl. Fußnote S. 75) mehrere Monate in ihrem verdunkelten Kästchen mit beiden Belegungen zur Erde abgeleitet liegen und machte darauf einige Ladungs- und Entladungsversuche, deren Ergebnisse in der folgenden Tabelle enthalten sind.

Tabelle IX.

Datum	t	Reduzierte Elektrometerausschläge ohne Berücksichtigung der Temperatur	mit Temperatur		Σ''
		1—16 Sek.	16—121 Sek.	151—331 Sek.	
26. III.	18,7°	10,5	7,1	5,0	12,1
28. III.	18,2°	10,8	6,9	4,9	11,8
31. III.	18,8°	10,8	6,0	4,8	10,8
1. IV.	17,0°	9,7	8,0	5,1	13,1
2. IV.	16,8°	9,8	7,6	5,1	12,8
3. IV.	15,6°	9,5	8,4	5,0	13,4
4. IV.	16,6°	9,2	8,3	5,9	14,2
6. IV.	17,4°	8,8	8,3	5,8	14,1
8. IV.	17,3°	8,2	7,8	5,9	13,7

Wir erkennen folgendes:

1. Eine so bedeutende Zunahme der L.-F., wie wir sie vorher ohne Ausnahme dreimal bei der Platte wahrnahmen, ist jetzt in der Ruhepause nicht eingetreten.

2. Die Zunahme beschränkt sich auf die Werte der ersten Versuchsperiode, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich ist:

Die L.-F. der ersten Versuchsperiode hat während der Ruhezeit zugenommen (von 8,7 auf 10,5 Skalenteile); sie nahm während der Versuchszeit (26. III. bis 8. IV.) ab (von 10,5 auf 8,2 Skalenteile).

Die L.-F. der zweiten Versuchsperiode hat während der Ruhezeit abgenommen (von 9,4 auf 7,1 Skalenteile); sie nahm während der Versuchszeit (26. III. bis 8. IV.) zu (von 7,1 auf mehr als 7,9 Skalenteile).

Die L.-F. der dritten Versuchsperiode hat während der Ruhezeit abgenommen (von 7,4 auf 5,0 Skalenteile); sie nahm während der Versuchszeit (26. II. bis 8. IV.) zu (von 5,0 auf 5,9 Skalenteile).

3. Die gesamte in 5 Minuten beförderte Elektrizitätsmenge ist in der genannten Versuchszeit ungefähr gleich geblieben, während sie früher bedeutend abnahm.

Demnach wäre es für das Verhalten einer vorher zu Ladungs-Entladungsversuchen verwendeten Platte bei einem auf eine längere Ruhepause folgenden Ladungs-Entladungsversuch in der Tat keineswegs gleichgültig, ob sie diese Pause mit geerdeten oder mit isolierten Belegungen zugebracht hat. Falls weitere Versuche dieses Ergebnis bestätigen sollten, wird man bei einer Fortsetzung der Untersuchung von unbestrahltem NaCl natürlich auf diesen Umstand Rücksicht nehmen müssen; die aus der vorliegenden Arbeit gezogenen Schlüsse werden aber davon nicht wesentlich berührt.

Wir wollen uns nun der Beschreibung von Versuchen zuwenden, die zum größten Teil wesentlich sicherere und mehr eindeutige Ergebnisse geliefert haben, als die bisher besprochenen und die auch den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchung bilden.

Einfluß einer Beleuchtung mit Nernstlampenlicht auf die L.-F. des NaCl.

Die noch im weiteren Verlauf der Veröffentlichung mitzuteilende Beobachtung, daß die L.-F. von X-bestrahltem NaCl durch Beleuchtung vermehrt wird, gab Veranlassung, zu untersuchen, ob vielleicht auch die L.-F. von nicht bestrahltem NaCl im Lichte eine andere ist als im Dunkeln.

Anfängliche Versuche ließen keine Wirkung des Lichtes erkennen; nachdem aber die Beleuchtungsstärke bedeutend vermehrt, und das Beobachtungsverfahren verschärft worden war, wurden etwas andere Erfahrungen gemacht. Anknüpfend an das auf S. 9 Gesagte, teile ich von vielen Versuchen als Beispiel das Ergebnis von Versuchen mit, die mit der dort besprochenen „alten" Platte gemacht wurden. Am 11. Tage nach dem Anlegen der Ladung von etwa 1500 Volt, als die L.-F. der stets im Dunkeln gehaltenen Platte auf etwa 0,6 Skalenteile in 4 Minuten (vgl. Tab. I) heruntergegangen war, wurde sie plötzlich durch Wegziehen eines lichtdichten Schiebers von dem oberen Kästchenfensterchen der Beleuchtung eines in ungefähr 10 cm Entfernung aufgestellten 32kerzigen Nernststiftes ausgesetzt, nachdem kurz vorher die Erdleitung des Elektrometers aufgehoben worden war. Mit dieser Beleuchtung setzte dann sofort eine bedeutend stärkere Elektrometernadelbewegung ein (1,4 Skalenteile in 15 Sekunden), die allmählich wieder kleiner wurde, nach 19 Minuten aber immerhin noch 0,9 Skalenteile pro Minute betrug. Es mußte deshalb gefolgert werden, daß die Beleuchtung die L.-F. der Platte wenig, aber doch sehr bemerkbar beeinflußt hatte. Indessen, als nach der 19 Minuten lang dauernden Beleuchtung die Platte plötzlich verdunkelt wurde, trat eine Erscheinung auf, die Zweifel an dieser Schlußfolgerung aufkommen ließ. Beim Verdunkeln trat nämlich nicht die zu erwartende sofortige Verlangsamung der Elektrometernadelbewegung ein, sondern auffallenderweise wurde zuerst eine Zeitlang — etwa während $1^1/_2$ Minuten — ein kleiner, aber sichergestellter Rückgang des Zeigers von 0,2 Skalenteilen, dann von 0,1 Skalenteil und zuletzt (nach etwa 2—3 Minuten) 0,0 Skalenteil in 15 Sekunden wahrgenommen, eine Zufuhr von negativer Elektrizität zum Elektrometer trotz der dauernd vorhandenen positiven Ladung von 1500 Volt anzeigend. Noch später stellte sich wieder die

langsame Bewegung nach positiven Zahlen, die schon vor der Beleuchtung vorhanden war, ein. Das war offenbar eine Erscheinung, die mit einer durch Beleuchtung hervorgerufenen Vermehrung der L.-F. nichts zu tun hatte, die also einer anderen Ursache zuzuschreiben war. Diese Ursache hat sich dann auch bald nach weiteren Versuchen gefunden. Von der Nernstlampe geht eine intensive Strahlung aus, die, wenn auch durch das über dem Fensterchen des Kästchens angebrachte, mit Wasser gefüllte Glaströgchen vermindert, das NaCl-Präparat erwärmen muß, und zwar wegen der Diathermansie des NaCl hauptsächlich dessen untere Graphitbelegungen. Infolgedessen fängt die untere Elektrode an, sich zu vergrößern, sobald die Belichtung einsetzt, und nach dem Verdunkeln wird Abkühlung und deshalb eine Verkleinerung der Elektrode eintreten. Wenn nun die Platte, wie es bei dem beschriebenen Versuch der Fall war, positiv geladen ist, so müssen diese Größenveränderungen zur Folge haben, daß bei eintretender Beleuchtung positive Elektrizität und bei eintretender Verdunklung negative Elektrizität zum Elektrometer fließt.[1]) Das sind nun aber gerade wenigstens zunächst qualitativ die Vorgänge, die wir beim Versuch wahrgenommen haben. Es war deshalb gerechtfertigt, zunächst noch Zweifel zu hegen, ob es richtig war, aus dem beschriebenen Versuch zu folgern, daß Licht die L.-F. unserer Platte vermehrt hatte. Eine Überlegung der quantitativen Verhältnisse hat den gewünschten Aufschluß gebracht. Oben S. 21 wurde angegeben, daß eine Vergrößerung der Graphitelektrode, die von einem Grad Temperaturerhöhung bewirkt wird, bei etwa 1600 Volt Ladung eine Menge Influenzelektrizität zum Elektrometer führt, die sich dort durch einen Ausschlag von 0,64 Skalenteilen bemerkbar machen muß. Die bei vorgenommener Verdunklung erhaltenen Elektrometerausschläge führen nun zu Temperaturänderungen, die sehr gut möglich sein können. Dagegen sind die nach Eintreten der Beleuchtung gefundenen Werte wesentlich zu groß, um durch Temperaturzunahme der Elektrode allein erklärt werden zu können; denn die Annahme von Temperaturänderungen von 60° und mehr ist natürlich auszuschließen.

1) Bei ungeladener geerdeter Platte dürften dann natürlich Beleuchtung und Verdunklung keine Elektrometerausschläge bewirken, was der Versuch auch bestätigte.

Es muß also wohl endgültig zugestanden werden, daß eine die L.-F. der Platte vermehrende Wirkung des Lichtes, wenn auch nur in verhältnismäßig sehr schwachem Maße und bloß während der Beleuchtung, wahrgenommen wurde.

Ähnliche Resultate wurden auch bei anderen Platten gefunden; dagegen liegen auch Versuche vor, aus denen keine merkliche Lichtwirkung abgeleitet werden kann. Bezeichnenderweise sind das Versuche, die mit ausgeglühtem, d. h. vor dem betreffenden Versuch stark erhitztem (vgl. S. 35 u. 107) NaCl unternommen wurden, während zu den anderen nicht ausgeglühtes Material verwendet worden war. Nun wird im folgenden mitgeteilt werden, daß eine X- oder γ-Bestrahlung das NaCl lichtempfindlich macht, d. h. in einen Zustand versetzt, in dem Licht seine L.-F. unter Umständen ungemein stark vermehrt, und weiter werden wir erfahren, daß das in der Natur vorkommende gefärbte NaCl die Eigenschaft bei Beleuchtung verhältnismäßig gut leitend zu sein, schon ohne weiteres besitzt. Auch wird mitgeteilt werden, daß ein genügend lang fortgesetztes starkes Erhitzen von X-bestrahltem oder auch von gefärbtem NaCl diese erworbene Eigenschaft vernichtet. Ich halte es nun für so gut wie sicher, daß diejenigen Platten, die sich bei den oben beschriebenen Proben auf Lichtempfindlichkeit als schwach lichtempfindlich erwiesen — es waren das die nicht ausgeglühten —, diese Eigenschaft schon von Hause aus besaßen, sei es infolge der überall in der Natur verbreiteten γ-Strahlung oder einer, freilich nicht sichtbaren, natürlichen Färbung oder von diesen beiden Ursachen zusammen und gebe deshalb meiner auf Grund aller gemachten Erfahrungen gewonnenen Überzeugung Ausdruck, daß *das Licht der Nernstlampe oder auch das uns zur Verfügung stehende Sonnenlicht nicht imstande ist, die L.-F. von vorher nicht bestrahltem und gänzlich farblosem NaCl um einen mit den gebrauchten Mitteln nachweisbaren Betrag zu verändern.*

Einfluß einer X-Bestrahlung auf die L.-F. des NaCl.

Prüft man die L.-F. einer im Dunkeln aufgestellten, vorher nicht bestrahlten NaCl-Platte *während* einer X- oder Radiumbestrahlung, so findet man sie größer als vor der Bestrahlung. Bei Anwendung einer schwachen Bestrahlung konstanter Intensität (also von Radiumstrahlen) erreicht

diese Vergrößerung bald nach Anfang der Bestrahlung einen Wert, der bei fortgesetzter Bestrahlung, wenn überhaupt, nur noch wenig steigt (vgl. S. 109). Die letztere Tatsache erkläre ich mir namentlich mit Rücksicht auf das sogleich mitzuteilende Resultat, durch ein mit der Zeit eintretendes dynamisches Gleichgewicht zwischen der durch X-Strahlen bewirkten Erzeugung von Aktivität und ihrem Verschwinden. An anderer Stelle, S. 92, wird über diese Versuche noch etwas mehr berichtet werden.

Wird eine dauernd geladene Platte bald *nach* stattgefundener Bestrahlung auf ihre L.-F. untersucht, so findet man als Nachwirkung der Bestrahlung immer noch eine Erhöhung der ursprünglichen L.-F., die aber geringer ist als während der Bestrahlung und die allmählich mit der Zeit verschwindet. Einige von den vielen hierher gehörenden Versuchen mögen etwas ausführlicher beschrieben werden.

Auf S. 25 ist bereits kurz angegeben, daß Ladungs-Entladungsversuche mit der verdunkelten „älteren" Platte angestellt wurden, jedesmal nachdem die Platte vorher bestrahlt worden war. Das Ergebnis dieser Versuche und ihre Vorbereitung sei zunächst mitgeteilt. Die auf ihrem Rahmen befestigte NaCl-Platte wurde, nachdem das ganze in Aluminiumfolie eingewickelt worden war,[1]) in etwa 15 cm von der Antikathode einer gewöhnlichen, ziemlich weichen, von einem mittelgroßen, mit Turbinenunterbrecher versehenen Induktorium betriebenen Röhre 3 Sekunden lang bestrahlt, dann bei der schwachen Beleuchtung einer sonst zu photographischen Zwecken verwendeten roten Glühlampe aus ihrer Aluminiumhülle entfernt, wieder in ihr Kästchen eingesetzt und mit beiden Belegungen zur Erde abgeleitet. Etwa 5 Stunden später fand die Prüfung auf ihre L.-F. im Dunkeln in der früher beschriebenen Weise statt. Dabei ergaben sich Werte, die nur sehr wenig, d. h. gerade noch bemerkbar größer waren, als die vor der Bestrahlung gefundenen (die in der Tab. I auf S. 10 mitgeteilt sind). Auch bei der Entladung wurde im wesentlichen dasselbe gefunden wie vorher. Am 8. Tage

1) Diese Aluminiumumhüllung verhindert störende Ladungen, die bei der Bestrahlung entstehen können; es empfiehlt sich außerdem, während der Bestrahlung die Glyzerinelektrode mit der Graphitelektrode leitend zu verbinden.

nach Anfang dieser Versuche, in welcher Zwischenzeit Beleuchtungsversuche unternommen wurden, über die weiter unten berichtet werden soll, nahm ich mit der allmählich wieder in ihren Anfangszustand zurückgekehrten Platte eine zweite, 3 Sekunden dauernde X-Bestrahlung unter möglichst gleichen Verhältnissen wie im ersten Falle vor und schloß diesmal nicht erst nach 5 Stunden, sondern schon nach 15 Minuten, in denen die Platte geerdet war, einen Ladungsversuch daran an. Dabei zeigte die Platte nunmehr sehr deutlich eine erhöhte L.-F. Daß eine Erhöhung beim ersten Versuch kaum bemerkbar war, rührt daher, daß sie sich in den 5 Stunden, die damals zwischen Bestrahlung und Ladungsversuch vergingen, allmählich von selbst verloren hatte. Statt alle beim zweiten Versuch gemachten Beobachtungen hier mitzuteilen, genügt es wohl, folgende Angabe zu machen, die für das Verhalten der Platte charakteristisch ist. Vergleicht man die bei dem zuletzt angestellten Ladungsversuch in je 15 Sekunden erfolgten Elektrometerausschläge mit den entsprechenden, die die noch unbestrahlte Platte ergeben hatte, so zeigt sich, daß jene um den *gleichbleibenden* Betrag von im Mittel 2,3 Skalenteilen größer sind als diese. Diese Regel gilt mit kleinen Abweichungen, die auf Beobachtungsfehler zurückgeführt werden können, für die ersten 3 Minuten des Versuchs. Von da an fängt der Unterschied zwischen der L.-F. der bestrahlten und der der unbestrahlten Platte an abzunehmen, hauptsächlich wohl infolge des vorhin schon erwähnten allmählichen Verschwindens der Wirkung der vorangegangenen Bestrahlung.

Bevor ich auf dieses Ergebnis etwas näher eingehe, sei noch der Verlauf des dritten Versuchs mitgeteilt, der 4 Tage, in denen die Platte sich von der zweiten Bestrahlung erholte, nach dem zweiten angestellt wurde. Unter wieder möglichst gleichen Verhältnissen wie zuvor fand diesmal eine 15 Sekunden lange X-Bestrahlung statt, auf die wieder sofort ein Ladungsversuch bei ungefähr gleicher Temperatur folgte. Die dabei in je 15 Sekunden erhaltenen Elektrometerausschläge können wieder für die ersten 3 Minuten des Versuchs dargestellt werden, als die Summen von den entsprechenden Werten der Tab. I und einer konstanten Zahl, die diesmal im Mittel 5,7 Skalenteile beträgt. Die Tatsache, daß diese Differenz kleiner aus-

gefallen ist als der vielleicht vermutete fünffache Betrag von der beim zweiten, nach nur 3 Sekunden langer Bestrahlung gemachten Versuch gefundenen Differenz findet vielleicht ihre Erklärung in einer Verschiedenheit der Wirksamkeit der X-Strahlenröhre in den beiden Fällen, oder auch in den vorhin kurz erwähnten Versuchen mit der Platte *während* ihrer Bestrahlung, aus denen wir folgerten, daß die L.-F. wenigstens nach längerer Bestrahlung keineswegs proportional mit der Bestrahlungsdauer zunahm, sondern sehr wesentlich langsamer.

Die drei Versuche haben somit übereinstimmend die Existenz einer mit der Zeit von selbst abnehmenden Nachwirkung der X-Bestrahlung auf die stets dunkel gehaltene Platte nachgewiesen, die in einer Vermehrung der L.-F. besteht, die sich wenigstens für die ersten 3 Minuten der Ladung in *gleichbleibendem* Betrage zu der in dieser Versuchszeit so beträchtlich abnehmenden L.-F. der unbestrahlten Platte addiert. Letztere Tatsache sei noch durch eine etwas ausführliche Angabe der Ergebnisse des zuletzt erwähnten Versuchs bestätigt.

Ich fand bei der unbestrahlten Platte nach Tab. I auf S. 10:

in der Zeit 1—31 Sekunden nach Anlegen der Spannung einen Ausschlag von 22,8 Skalenteilen;

in der Zeit 121—181 Sekunden nach Anlegen der Spannung einen Ausschlag von 4,6 Skalenteilen.

Addiert man zu dem ersten Ausschlag $2 \cdot 5{,}7$, so ergeben sich 34,2 Skalenteile. Addiert man zu dem zweiten Ausschlag $4 \cdot 5{,}7$, so ergeben sich 27,4 Skalenteile, beides in Übereinstimmung mit folgenden, bei dem Versuch nach 15-sekundiger Bestrahlung gefundenen Werten: in der ersten Zeit 33,8 Skalenteile, in der zweiten Zeit 27,7 Skalenteile. Würden dagegen die zu verschiedenen Zeiten innerhalb der ersten 3 Minuten gefundenen Werte der L.-F. durch die Bestrahlung in *gleichem Verhältnis* gestiegen sein, in unserm Falle z. B. im Verhältnis von $27{,}7 : 4{,}6$, so hätten sich in der Zeit von 1—31 Sekunden $22{,}8 \cdot 27{,}4 = 137{,}3$, statt der gefundenen 33,8 Skalenteile ergeben müssen.

Es sei hier noch eines Versuchs mit der auf S. 37 beschriebenen, mit Silber belegten Platte gedacht, der zu dem

gleichen Ergebnis führte. Etwa 4 Stunden nach einer ziemlich weichen X-Bestrahlung von 10 Minuten Dauer wurde im Dunkeln ein Ladungsversuch mit etwa 1500 Volt gemacht. Die L.-F. fand sich dabei gegen die vor dieser Bestrahlung bestimmte erhöht und zwar auch wieder in der gleichen regelmäßigen Weise, wie bei den oben beschriebenen Versuchen mit der „älteren" Platte: Innerhalb der ersten 6 Minuten der Ladezeit waren, wie aus der Tab. X hervorgeht, die in den aufeinanderfolgenden Zeitintervallen von je 15 Sekunden beobachteten

Tabelle X.

Differenz bestr.-unbestr. Platte	1,7	2,3	2,2	1,9	4,2	4,0 Skt.
Versuchsperiode	1–16	16–31	31–46	46–61	61–91	91–121 Sek.
Differenz bestr.-unbestr. Platte	4,2	4,2	3,8	4,0	4,2	3,8 Skt.
Versuchsperiode	151–181	181–211	211–241	241–271	271–301	301–331 Sek.

Elektrometerausschläge um den gleichen Betrag von im Mittel 2,0 Skalenteilen größer als die, welche vorher bei der unbestrahlten Platte zu den entsprechenden Zeiten gefunden worden waren. Daß jetzt nach 4 Stunden eine so merkliche Nachwirkung vorhanden war, steht scheinbar im Gegensatz zu dem Ergebnis des ersten Versuchs und ist wohl der viel längeren Bestrahlungsdauer beim letzten Versuch zuzuschreiben. Am nächsten Tage (etwa 19 Stunden später) zeigte sich bei einem Ladungsversuch, wie nach dem oben Mitgeteilten zu erwarten ist, die Nachwirkung so gut wie verschwunden.[1])

1) Der an diesem Tage auch vorgenommene Entladungsversuch zeigte ebenfalls keine Andeutung von einer etwa noch vorhandenen Vermehrung der Leitfähigkeit. Es sei hier noch die allgemeine Bemerkung hinzugefügt, daß ein Entladungsversuch nicht unter allen Umständen eine vorhandene vermehrte Leitfähigkeit durch eine vergrößerte Stromstärke erkennen lassen muß. Das Superpositionsgesetz verlangt nämlich, daß ein Entladungsversuch erst dann von einer Vermehrung der Leitfähigkeit etwas anzeigen kann, wenn dieser Versuch zu einer Zeit vorgenommen wurde, wo der vorangegangene Ladungsversuch Werte geliefert hatte, die kleiner sind als die, für welche die oben mitgeteilte Additionsregel noch zutrifft.

Ein gleiches Verhalten kann man aus den in der Tab. V unter 25. VII. und 21. XII. aufgeführten Versuchen entnehmen.

Immer wurde bei den Versuchen dieses Abschnitts dafür gesorgt, daß die Platte während und nach der X-Bestrahlung keiner Beleuchtung, oder höchstens nur für die kurze Zeit, die zum Einsetzen der Platte in das Kästchen benötigt war, der Beleuchtung einer dunkelroten Lampe ausgesetzt war. Diese Maßregel ist durchaus nötig, denn wie später unten mitgeteilt werden wird, übt eine vorangegangene Beleuchtung auf die L.-F. im Dunkeln einer vorher bestrahlten Platte eine sehr beträchtliche, vermehrende Nachwirkung aus („Nachwirkung von hell auf dunkel"). Nicht zu vermeiden ist aber, daß die Platte während der X-Bestrahlung fluoresziert. Man muß deshalb mit der Möglichkeit rechnen, daß dieses Eigenlicht die beschriebene Nachwirkung der X-Bestrahlung — und vielleicht auch die erhöhte L.-F. *während* der Bestrahlung (vgl. S. 81) — bewirkt hat. Eine Entscheidung über diese Frage hat sich nicht herbeiführen lassen.

Wir kommen somit zu folgendem Ergebnis dieses Teiles der Untersuchung: *Die L.-F. des verdunkelten Steinsalzes wird infolge der X-Bestrahlung sowohl während der Bestrahlung, als auch nachher, dann aber in mit der Zeit abnehmender Stärke um ein Geringes* — im Vergleich zu der Erhöhung, die bei einer nachherigen Beleuchtung eintreten würde — *erhöht.* Möglicherweise ist diese Erhöhung nicht einer unmittelbaren Wirkung der X-Strahlen zuzuschreiben, sondern dem Fluoreszenzlicht, das bei der Bestrahlung im NaCl auftritt.

Besonders lebhaftes Interesse erweckte die Wahrnehmung, daß eine Beleuchtung von vorher X-bestrahltem NaCl, dessen L.-F. ungemein stark zu vermehren imstande ist. Im folgenden soll über die in dieser Beziehung erhaltenen Ergebnisse berichtet werden.

Um den Leser gleich bekannt zu machen mit einigen Hauptergebnissen dieses Teiles der Untersuchung, beschreibe ich wohl am besten die Fortsetzung des oben beschriebenen, nach der ersten, 3 Sekunden dauernden Bestrahlung gemachten Versuches mit der „älteren" Platte. Ich verzichte damit auf eine chronologische Darstellung der Untersuchung, denn sehr viele Versuche über den gleichen Gegenstand mit anderen NaCl-Platten waren bereits vorhergegangen.

a) Als die Messung der L.-F. der mit etwa 1500 Volt geladenen verdunkelten, vorher 3 Sekunden X-bestrahlten Platte stattgefunden hatte (vgl. S. 82) — sie ergab nach 21stündiger Ladung 0,6 Skalenteile pro Minute —, wurde bei dauernder Ladung durch Wegziehen des das obere Kästchenfensterchen bedeckenden Schiebers plötzlich das durch 3 cm Wasser gesiebte Licht der einige Zeit vorher angezündeten 32kerzigen, in etwa 10 cm über der Platte aufgestellten Nernstlampe — ohne Glasschutz — der mit dem isolierten Quadrantenpaar verbundenen Platte dauernd zugeleitet.[1]) Sofort setzte eine äußerst rasche Bewegung des Lichtzeigers ein, die diesen innerhalb eines Bruchteils von einer Sekunde über die Skala hinausbrachte, so daß von einer Messung der enorm gesteigerten L.-F. noch nicht die Rede sein konnte. Ähnliches, wenn auch mit geringerer Vehemenz, trat bei einer erneuerten Probe noch 1 Minute später ein und erst nach einer $3^1/_2$ Minuten langen Beleuchtung — bei immer fortgesetzter Ladung — konnte mit einer ungefähren Messung der L.-F. begonnen werden. Folgende Werte wurden dabei erhalten.[2])

Tabelle XI.

Anfang der Beleuchtung 3 Uhr 22 Minuten.

Zeit	Elektrometerausschlag in 5 Sek.	
3h 22,0 Min.	1620 Skt.	aus dem zweiten Bestrahlungsversuch S. 90
23,0 „	540 „	
25,5 „	130 „	
26,5 „	90 „	
27,5 „	70 „	
28,5 „	60 „	
29,5 „	55 „	
30,5 „	45 „	
31,5 „	35 „	
32,5 „	33 „	
33,5 „	29 „	
34,5 „	25 „	
35,5 „	23 „	
36,5 „	22 „	
37,5 „	20 „	
38,5 „	20 „	

1) Die Beobachtung der zu messenden Ausschläge fing also nicht wie bisher eine Sekunde nach Anlegen der Spannung, sondern mehrere Stunden später an, was für die Beurteilung der Ergebnisse von Bedeutung ist.

2) Auf möglichst genaue Bestimmung der Ausschläge wurde, weil zunächst zwecklos, kein Gewicht gelegt. Die Tabelle ist eine abgekürzte Wiedergabe der Ergebnisse.

Der Versuch ergab somit folgende bemerkenswerte Tatsache: *Die Beleuchtung einer vorher* — im vorliegenden Fall 3 Sek. lang — *X-bestrahlten Steinsalzplatte mit dem Licht einer Nernstlampe vermehrt ihre L.-F. sehr bedeutend.* Die Platte ist durch X-Bestrahlung stark lichtempfindlich („aktiv") geworden. In diesem speziellen Fall wurde — wenn wir von der vor der Beleuchtung zuletzt bestimmten Stromstärke 0,6 Skalenteile pro Minute und von dem Resultat eines bald folgenden Versuches ausgehen — die Stromstärke im Augenblick der eintretenden Beleuchtung mehr als 40000 mal vergrößert. Aus der Tabelle ist noch zu entnehmen, daß die in je 5 Sekunden erhaltenen Elektrometerausschläge bei dauernder Beleuchtung und Ladung, ähnlich wie bei dem unbestrahlten NaCl, beträchtlich mit der Zeit abnehmen.

b) Nach der letzten dieser Messungen der L.-F. blieb die Platte noch eine Minute beleuchtet, dann wurde sie plötzlich verdunkelt und bei ununterbrochener Ladung auf ihre L.-F. im Dunkeln geprüft. Es ergaben sich etwa 3 Skalenteile in 15 Sek. Vergleicht man diesen Wert mit dem kurz vor Anfang der Beleuchtung, also auch im Dunkeln erhaltenen — 0,6 Skalenteile in einer Minute —, so erkennt man, daß eine „Nachwirkung" und zwar von beträchtlicher Größe aufgetreten war, *eine vermehrende Nachwirkung der vorangegangenen Beleuchtung auf die L.-F. der verdunkelten X-bestrahlten Platte*[1]) — kurz ausgedrückt eine „Nachwirkung von hell und dunkel". Dieser neue Dunkelwert sank während einer Beobachtungszeit von 33 Minuten auf etwa 5,8 Skalenteile pro Minute.

c) Nach dieser Feststellung wurde die Platte nochmals plötzlich beleuchtet. Der sofort nach Beleuchtung eingetretene Elektrometerausschlag betrug etwa 42 Skalenteile in 5 Sek. Da die Platte zuletzt bei „hell", also unmittelbar vor „dunkel", 20 Skalenteile in 5 Sek. geliefert hatte, so war die L.-F. jetzt um etwa 22 Skalenteile in 5 Sek. größer als vorher. Es war also *während der Verdunklung* — die Ladung blieb fortwährend bestehen — *eine „Erholung" der Platte eingetreten.* Einige Minuten später lieferte die Platte wieder die gleiche

1) Der häufig zu verwendende Ausdruck X-bestrahlte Platte bezieht sich auf eine Platte, die *vorher* X-bestrahlt wurde und nicht etwa auf eine Platte *während* einer solchen Bestrahlung.

Stromstärke wie vor der Verdunklung, die dann natürlich im weiteren Verlauf der Zeit noch weiter abnahm.

d) Auf diesen Teil des Versuches folgte ein Entladungsversuch mit der andauernd beleuchteten Platte, d. h. also ein Versuch mit geerdeter Platte. Der Elektrometerausschlag in den ersten 5 Sek. betrug etwa 170 Skalenteile. Das Superpositionsgesetz traf also nicht zu; der jetzt gefundene Ausschlag ist ersichtlich viel zu klein. Daraus ist zu entnehmen, was auch mit anderweitigen Beobachtungen übereinstimmt, daß *die Lichtempfindlichkeit der Platte in der vorangegangenen Zeit von einer guten Stunde, während sie beleuchtet und geladen war, sehr merklich abgenommen hatte.* Dasselbe zeigte sich im Verlauf der folgenden Woche, in der die Platte teilweise im Dunkeln, teilweise beleuchtet einige Male auf ihre L.-F. untersucht wurde und sonst zur Erde abgeleitet blieb, so daß sich schließlich die Platte nur noch wenig lichtempfindlich erwies und für die zweite oben erwähnte dreisekundige X-Bestrahlung verwendet werden konnte (vgl. S. 88).

Ich möchte nun das unter a) b) c) und d) Gesagte durch Mitteilungen von weiteren Tatsachen und Überlegungen noch ergänzen. Zunächst sei aber noch die allgemeine Bemerkung gestattet, daß schon aus dem bereits Erwähnten deutlich hervorgeht, wie sehr die L.-F. des beleuchteten, vorher bestrahlten NaCl von dem, was vor der Bestimmung der L.-F. mit der Platte etwa vorgenommen wurde, abhängig ist. Polarisation, Nachwirkung, Erholung, selbständige zeitliche Abnahme der Lichtempfindlichkeit sind schon als Faktoren erkannt, die das Ergebnis einer L.-F.-Bestimmung einer solchen Platte unter Umständen sehr beeinflussen können und noch andere werden im Laufe der Mitteilung bekannt gegeben werden. Diese Abhängigkeit der L.-F. von der „Vorgeschichte" hat in der Tat die Untersuchung in mancher Beziehung erschwert, in die Länge gezogen und über verschiedene Fragen noch Unsicherheit bestehen lassen. Auf diesen Umstand muß bei der Beurteilung des Folgenden Rücksicht genommen werden.

ad a) Weil bei dem beschriebenen, nach der ersten Bestrahlung unternommenen Versuch die in der ersten Versuchszeit auftretenden Elektrometerausschläge zu groß waren, um gemessen werden zu können, und weil es von Interesse war, zu erfahren, inwieweit zwei unter gleichen Verhältnissen von

Bestrahlungsdauer, Spannung und Temperatur mit der Platte ausgeführte Bestimmungen der L.-F. untereinander übereinstimmende Werte lieferten, wurde die Platte nach diesem ersten Versuch, als sie ihre Aktivität genügend verloren hatte, nochmals 3 Sek. lang bestrahlt und dann unter genau gleichen Umständen wie das erstemal auf ihre L.-F. untersucht. Nur war um die L.-F. auch in der ersten Zeit nach Eintritt der Beleuchtung messen zu können, diesmal ein Kondensator von 0,01529 M.-F. während dieser Zeit zugeschaltet, und dadurch die Kapazität der Plattenleitung gegen vorher auf das 60fache vergrößert.

Von den in je 15 Sekunden erhaltenen Werten sind einige in Kol. 2 der Tab. XII wiedergegeben, und zwar sind alle auf gleiche, nicht vermehrte Kapazität bezogen.

Tabelle XII.

Elektrometerausschläge in 15 Sekunden.

I Beobachtungszeit	II 3 Sek. X-bestrahlte Platte	III 15 Sek. X-bestrahlte Platte	IV 7 Min. X-bestrahlte Platte *)	III/II	IV/II
0 Sek. bis 15 Sek.	4140	18400	25500	4,4	6,1
15 „ „ 30 „	2880	12400	17000	4,3	5,9
30 „ „ 45 „	2100	10000	12600	4,8	6,0
45 „ „ 60 „	1680	8600	10100	5,1	6,0
1 Min. 30 „ „ 1 Min. 45 „	—	4300	5300	—	—
1 „ 45 „ „ 2 „ 0 „	750	3650	4500	4,9	6,0
2 „ 0 „ „ 2 „ 15 „	630	3400	—	5,4	—
2 „ 15 „ „ 2 „ 30 „	600	2950	—	4,9	—
2 „ 30 „ „ 2 „ 45 „	510	2500	—	4,9	—
3 „ 30 „ „ 3 „ 45 „	380	1890	1700	5,0	4,5
4 „ 30 „ „ 4 „ 45 „	260	1400	—	5,4	—
5 „ 30 „ „ 5 „ 45 „	200	—	850	—	4,3
6 „ 30 „ „ 6 „ 45 „	170	810	—	4,8	—
7 „ 30 „ „ 7 „ 45 „	140	700	—	5,0	—
8 „ 30 „ „ 8 „ 45 „	120	540	560	4,5	4,7
9 „ 30 „ „ 9 „ 45 „	110	—	—	—	—
10 „ 30 „ „ 10 „ 45 „	95	480	—	5,1	—
11 „ 30 „ „ 11 „ 45 „	85	410	—	4,8	—
12 „ 30 „ „ 12 „ 45 „	80	390	—	4,9	—
13 „ 30 „ „ 13 „ 45 „	75	—	—	—	—
14 „ 30 „ „ 14 „ 45 „	65	320	—	5,0	—
15 „ 30 „ „ 15 „ 45 „	60	310	—	5,2	—
16 „ 30 „ „ 16 „ 45 „	60	270	—	4,5	—
17 „ 30 „ „ 17 „ 45 „	54	260	—	4,8	—

*) Bezüglich der Zeitangabe bei diesem Versuch vgl. S. 94.

Aus einem Vergleich dieser Werte mit denen der Tab. XI geht hervor, daß die beiden Versuche recht gut untereinander übereinstimmende Resultate geliefert haben, besser als in Anbetracht der so sehr kurzen Bestrahlungsdauer zu erwarten war. Ein Vergleich mit den an der unbestrahlten Platte erhaltenen Werten (Tab. I) hat kaum eine Bedeutung, weil die Versuchsbedingungen in bezug auf die Zeit des Anlegens der Spannung nicht dieselben sind: die Beobachtung der Elektrometerablenkungen fing bei der unbestrahlten Platte 1 Sek., bei der bestrahlten mit dem Anfang der Beleuchtung, d. h. etwa 24 Stunden nach Anlegen der Spannung an. Hier nicht mitgeteilte Versuche, sowie der auf S. 94 zu erwähnende, bei denen das Einsetzen der Beleuchtung kurz dem Anlegen der Spannung voranging, und bei denen die Elektrometerausschläge wieder 1 Sek. nach Anlegen der Spannung anfingen, ließen erkennen, daß der bei der ebenfalls mit Glyzerin belegten, nicht bestrahlten Platte gefundene rasche Abfall der Stromstärke am Anfang eines Versuches (vgl. Tab. I) nicht so rasch bei einer beleuchteten X-bestrahlten Platte stattfand; demnach muß in diesem Fall der Einfluß der Rückstandsbildung auf die Stromstärke weit geringer oder in anderer Weise auf die Versuchszeit verteilt gewesen sein als in jenem. Die ganze durch X-Bestrahlung und Beleuchtung bewirkte Vermehrung der Stromstärken etwa als eine Vermehrung der Rückstandsbildung in Maxwellscher Auffassung anzusehen, halte ich nicht für angängig.

Das Superpositionsgesetz traf bei der auf den Ladungsversuch folgenden Erdung wieder nicht zu; wenn es bei einer beleuchteten X-bestrahlten Platte zutreffen soll, so darf der Ladungsversuch nur so lange dauern, daß die Lichtempfindlichkeit der Platte während dessen nicht merklich abgenommen hat.

Es ist wohl zu erwarten, daß mit der Dauer der X-Bestrahlung die der Platte mitgeteilte Lichtempfindlichkeit zunehmen wird, und man wird schon auf Grund der mitgeteilten Beobachtung, daß die Lichtempfindlichkeit des X-bestrahlten NaCl von selbst mit der Zeit abnimmt — auch im Dunkeln, wie weiter unten noch näher erwähnt werden soll — vermuten, daß die auf gleiche Zeiten bezogene Zunahme der Lichtempfindlichkeit bei andauernder Fortsetzung der X-Bestrahlung im Laufe dieser Bestrahlungszeit immer kleiner wird, so daß

dabei einem dynamischen Gleichgewicht zwischen neu erzeugter und verschwindender Lichtempfindlichkeit zugestrebt wird; diese Vermutung hat sich bestätigt. Beiträge zur Beantwortung dieser Frage finden sich in den Ergebnissen von vielen Versuchen, die während der langen Zeit der Untersuchung angestellt wurden; es war z. B. schon lange bemerkt worden, daß die Verlängerung der Bestrahlungsdauer über eine gewisse Grenze hinaus die Lichtempfindlichkeit jedenfalls in nicht besonders bemerkbarem Betrage weiter vergrößert. Ob auch die Haltbarkeit der mit der Zeit von selbst verschwindenden Lichtempfindlichkeit bzw. der zeitliche Verlauf eines Ladungsversuches ebensowenig von der Dauer der Bestrahlung beeinflußt wird, darüber bin ich nicht in der Lage Angaben machen zu können.[1])

Von den Versuchen, die ich u. a. auch mit der „älteren" Platte anstellte, um die erwähnte Frage zu beantworten, mögen hier folgende mitgeteilt werden. Nachdem die Platte die beschriebene zweite dreisekundige Bestrahlung und die sich daran anschließenden Ladungs- und Entladungsversuche durchgemacht, und nachdem sie sich von diesem Bestrahlungseinfluß wieder genügend befreit hatte, wurde sie unter möglichst gleichen Verhältnissen wie zuvor einer 15sekundigen, also einer 5mal längeren Bestrahlung als vorher ausgesetzt und sehr bald darauf zuerst wieder etwa 24 Stunden im Dunkeln geladen und dann auch wieder bei fortgesetzter Ladung plötzlich mit der Nernstlampe beleuchtet. Um die zu erwartende noch größere L.-F. messen zu können, war diesmal für die erste Versuchszeit ein Kondensator von 0,07 M.-F. zu der Elektrometerleitung zugeschaltet, wodurch die Gesamtkapazität gegen die letzte Versuchsreihe auf das 4,6 fache erhöht war (also gegen die des ersten Versuches auf das 270fache).[2]) Von den

1) Eine so dunkle Gelbfärbung des NaCl, wie sie durch Ra-Bestrahlung erreicht werden kann, mit X-Strahlen zu erhalten, ist mir nicht gelungen.

2) Die Kapazität der verwendeten Kondensatoren war derart, daß wenigstens die im Anfang der drei Versuchsreihen zu je einer Versuchszeit gehörigen tatsächlich beobachteten Ausschläge untereinander nicht so sehr verschieden waren, was für einen gegenseitigen Vergleich ja recht günstig ist. Bei den im späteren Verlauf der Versuche gemessenen Ausschlägen war das nicht mehr der Fall, so daß bei einem Vergleich dieser Werte untereinander nicht außer Acht gelassen werden darf, daß die Messung am bewegten Lichtzeiger vor-

Ergebnissen dieser Versuche sind einige und zwar solche, die sich auf die gleichen Versuchszeiten, die sich auch beim letzten Versuch vorfanden, beziehen und deshalb zu einem Vergleich dienen können, in Kolumne 3, Tab. XII mitgeteilt.

Man erkennt aus Kolumne 2 und 3, daß die Lichtempfindlichkeit der 15 Sek. lang bestrahlten Platte bedeutend größer war als die der 3 Sek. bestrahlten und weiter aus der Kolumne 3 : 2, die die Verhältnisse zusammengehöriger Werte der Kolumnen 3 und 2 enthält, daß die durch Strahlung erworbene L.-F. annähernd in gleichem Verhältnis wie die Bestrahlungsdauer zugenommen hat, und zwar gilt dies so ziemlich für alle Versuchszeiten vom Anfang an bis zur Zeit 17 Min. 30 Sek. nach Anfang der Beleuchtung. Diese Proportionalität überrascht einigermaßen, weil nach S. 91 wohl eine langsamere Zunahme der L.-F. zu erwarten war, und ich glaube auch, daß das fast genaue Zutreffen der Proportionalität (das Mittel aller Zahlen der Kolumne 3 : 2 ist 4,9) mehr einem Zufall zuzuschreiben ist. Es ist nämlich ein genaues Einhalten der Bestrahlungszeit — insbesondere der dreisekundigen — sowie ein gleiches Funktionieren der X-Strahlenröhre, als auch eine genaue Gleichheit der Intensität der Nernstlampe in beiden Versuchen zu wenig gewährleistet, um zu der Folgerung, daß die erwähnte Proportionalität in dem beobachteten Maße wirklich bestehe, berechtigt sein zu können.[1]) Ich möchte nach näherer Überlegung und in Verbindung mit dem folgenden (Kolumne 4) in diesen Versuchen keinen Widerspruch erblicken gegen die auch bei anderer Gelegenheit mehrfach gebildeten Ansicht, daß die Zunahme der Lichtempfindlichkeit während einer X-Bestrahlung anfänglich rascher ist als später.

---

genommen wurde, und deshalb eine genaue Proportionalität von Ausschlägen und zu messender Elektrizitätszufuhr nicht angenommen werden darf (vgl. S. 13).

1) Dagegen läßt sich der gleiche Einwand nicht erheben gegen die zweite aus den Versuchen gezogene bemerkenswerte Schlußfolgerung: ungefähres Gleichbleiben während des ganzen Versuchsverlaufs von dem Verhältnis der bei beiden Versuchen zu gleichen Zeiten aufgetretenen Stromstärken. Ausdrücklich muß hervorgehoben werden, daß diese Regelmäßigkeit nur dann eintreten kann, wenn die Platte unter genau gleichen Bedingungen, namentlich was ihre Vorgeschichte anbetrifft, einer verschieden langen Bestrahlung ausgesetzt war; eine weitere Prüfung dieser Regelmäßigkeit erscheint mir sehr erwünscht zu sein.

Eine dritte Versuchsreihe mit derselben Platte wurde etwa 3 Monate nach der zuletzt beschriebenen erhalten, nachdem die Platte sich von der Wirkung der letzten 15sekundigen Bestrahlung befreit hatte und darauf einer 7 Minuten langen Bestrahlung ausgesetzt worden war. Von den beobachteten Werten sind in der Kolumne 4 der Tab. XII wieder nur diejenigen aufgeführt, die sich wegen der Gleichzeitigkeit ihres Eintreffens in der Versuchszeit mit denen der anderen Versuchsreihen vergleichen lassen. Man erkennt sofort und besonders aber auch aus der Kolumne 4 : 2, daß die Zunahme der L.-F. weit hinter der Steigerung der Bestrahlungsdauer zurückgeblieben ist: das Verhältnis der L.-F. beträgt für die erste Versuchszeit ungefähr 6, das der Bestrahlungszeiten 140. Nun darf aber schon mit Rücksicht auf einen eventuell gehegten Wunsch, diese Zahlen zu weitergehenden Zwecken zu verwenden, nicht unerwähnt bleiben, 1. was schon oben beim Vergleich der Versuche nach 3, bzw. 15sekundiger Bestrahlung gesagt wurde, daß nämlich für eine genaue Gleichheit von Bestrahlungs- und Beleuchtungsverhältnissen bei allen Versuchen keine Gewähr übernommen werden kann, und 2. daß die Vorgeschichte der letzten Versuchsreihe nicht dieselbe war, wie bei den beiden vorangegangenen, indem nämlich zu einem gleich nachher zu besprechenden Zweck die 7 Minuten lang bestrahlte Platte vor dem Eintreten der Beleuchtung anders behandelt worden war als bei den Versuchen nach 3 bzw. 15sekundiger Bestrahlung. In den zuletzt genannten Fällen wurde, wie oben mitgeteilt, die etwa 24 Stunden im Dunkeln mit 1500 Volt geladene Platte bei fortgesetzter Ladung plötzlich der Beleuchtung ausgesetzt und mit der Messung der Stromstärke gleichzeitig mit dem Eintreten dieser Beleuchtung angefangen. Jetzt dagegen setzte die Beleuchtung der Platte sehr bald nach ihrer Bestrahlung ein und zwar während die Platte zur Erde abgeleitet war, dann fand unter Fortsetzung der Beleuchtung ein kurz dauernder Ladungs-Entladungsversuch mit 2 Volt statt und darauf folgte erst — immer ohne Dunkelpause — der Ladungsversuch mit 1580 Volt, so daß mit der Beobachtung der Stromstärke, wie bei dem Versuch mit der unbestrahlten Platte eine Sekunde nach Anlegen der Spannung an die schon etwas längere Zeit beleuchtete Platte angefangen wurde. Diese Umstände können aber nach

näherer Überlegung und nach anderweitig gemachten Erfahrungen bei weitem keine so große Verminderung der beim erwähnten Ladungsversuch aufgetretenen Stromstärken bewirkt haben, daß ihnen die erwähnte Abweichung vom Proportionalitätsgesetz zugeschrieben werden könnte. Ich darf somit als Ergebnis aller dahin gerichteten Versuche angeben, *daß die Lichtempfindlichkeit des* NaCl *mit der Dauer der sie erzeugenden X-Bestrahlung nicht proportional, sondern in einem mit der Zeit abnehmenden Maße zunimmt.*

Von einigem Interesse ist eine Untersuchung des zeitlichen Verlaufes der Stromstärken in den vier in der Tabelle aufgenommenen Versuchsreihen. Zunächst erkennt man bei allen, daß die Abnahme zu Anfang des Versuches am stärksten ist, und daß nach einiger Zeit diese Werte sich nur noch verhältnismäßig wenig ändern. Wenn ich noch die Ergebnisse von manchen anderen, hier nicht aufgeführten, sowie von einem Versuch berücksichtige, der später ausführlicher erwähnt werden soll, und bei dem die Ladung und die Beleuchtung 17 Stunden ununterbrochen anhielten, so kann ich angeben, daß die absolute und die relative Abnahme der noch recht beträchtlichen Stromstärke bei einer lang X-bestrahlten Platte nach genügend langer Ladungs- und Beleuchtungszeit so gering wird, daß davon etwa in einer halben Stunde nichts mehr zu bemerken ist: womit natürlich keineswegs gesagt sein soll, daß dauernd ein konstanter Strom erreicht worden wäre. Dies könnte schon deshalb nicht der Fall sein, weil erfahrungsgemäß die Lichtempfindlichkeit der Platte stetig abnimmt. In Fällen, wo eine verhältnismäßig gute zeitliche Konstanz der von einer noch gut leitenden NaCl-Platte gelieferten Stromstärke erwünscht sein sollte, wird es sich nach dem Vorhergehenden empfehlen, die betreffende Platte so vorzubereiten, wie es bei dem letzten Versuch geschehen ist, d. h. mit den betreffenden Versuchen erst anzufangen, nachdem die lang bestrahlte Platte längere Zeit geladen und gleichzeitig beleuchtet war.

Vergleicht man nochmals die einzelnen Versuchsreihen miteinander (vgl. Tab. XII), so erkennt man weiter folgendes. Zunächst ergibt sich, wie auch schon angedeutet, von kleinen Abweichungen abgesehen, ein paralleler Verlauf der beiden nach 8 bzw. nach 15sekundiger Bestrahlung erhaltenen Ver-

suchsreihen in der Weise, daß während der ganzen Beobachtungszeit von $17^1/_2$ Minuten alle für die Stromstärke bei der zweiten Versuchsreihe gefundenen Werte durchgehend im Mittel, 4,9mal größer sind als bei der ersten. Alle Werte der zweiten Reihe wurden somit von der Verlängerung der Bestrahlungsdauer in gleichem Maße betroffen. Für den Versuch nach 7 Minuten Bestrahlung gilt das Gleiche, aber nur für die erste Versuchszeit von 1 Sek. bis 1 Minute 46 Sek.; später zwischen 1 Minute 46 Sek. und 3 Minuten 30 Sek., nimmt dann die Stromstärke verhältnismäßig rascher ab als bei den vorhergehend erwähnten Versuchen, um dann bis 8 Minuten 30 Sek. wieder in verhältnismäßig gleicher Weise abzunehmen (vgl. Kolonne 4:2). Einen Grund für dieses Verhalten kann ich nicht angeben, der keinen Widerspruch mit den in der Kolonne 3:2 niedergelegten Erfahrungen hervorrufen würde. Die naheliegende Vermutung, daß während des Versuches, etwa 1 Min. 46 Sek. nach dessen Anfang eine Intensitätsabnahme der beleuchtenden Nernstlampe eingetreten wäre, die nicht berücksichtigt werden konnte, weil eine Kontrolle dieser Lampe nicht stattfand, muß zurückgewiesen werden, weil diese Abnahme unwahrscheinlich stark hätte gewesen sein müssen, um die besprochene Abweichung bewirken zu können. Dagegen muß erwähnt werden, daß, wie oben schon mitgeteilt wurde, die Vorgeschichte der beiden Versuchsreihen nicht dieselbe war, und daß sich aus anderen, nicht mitgeteilten Versuchen leicht der Nachweis führen läßt, daß diese Vorgeschichte auch den *Verlauf* eines Entladungsversuches sehr wesentlich beeinflussen kann; wenn z. B. die Platte sich in dem Zustand der „Erholung" oder der „Nachwirkung" befindet, so ist die anfängliche Abnahme der Stromstärke während eines Ladungsversuches deutlich rascher als sonst. Auch halte ich es für sehr wohl möglich, daß dieser Verlauf noch mit der Härte der angewendeten X-Bestrahlung zusammenhängt; die bestrahlte Platte ist ja erfahrungsgemäß keineswegs in ihrer ganzen Dicke gleichmäßig, sondern wegen der stattgefundenen Absorption der X-Strahlen in der Richtung der Bestrahlung in abnehmender Stärke lichtempfindlich. Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Verlauf eines Ladungsversuches und all den verschiedenen ihn beeinflussenden Faktoren hat mich nicht wenig aufgehalten; zu einer eindeutigen, klaren

Lösung bin ich jedoch nicht gelangt. Ich möchte deshalb auf eine weitere Besprechung dieses Gegenstandes verzichten.

Es wurde auch das beleuchtete X-bestrahlte NaCl auf sein *Verhalten zum Ohmschen Gesetz* geprüft. Von den mehrfachen, zum gleichen Resultat führenden Versuchen sei nur der eine von zwei mit der „älteren" Platte nach ihrer 7 Minuten Bestrahlung ausgeführten hier erwähnt und zwar wieder nur die Ergebnisse des Ladungsversuches. Er ging unmittelbar dem oben auf S. 99 mitgeteilten mit 1580 Volt Spannung unternommenen voran und wurde mit 2,00 Volt Spannung und natürlich ohne Zusatzkondensator gemacht. Bei so geringer Spannung mußte bei der Auswertung der Beobachtungen darauf Rücksicht genommen werden, daß die zum Elektrometer geführte Ladung eine Gegenspannung erzeugt, deren Einfluß in diesem Fall nicht übersehen werden durfte. Die Elektrometerausschläge mußten deshalb unter Annahme von Proportionalität zwischen Spannung und Stromstärke von diesem Einfluß durch Rechnung befreit werden. In der folgenden Tab. XIII sind einige dieser korrigierten in je 15 Sek. beobachteten bzw. auf diesen Zeitraum reduzierten Werte mit den zeitlich zugehörigen des oben besprochenen, in der Tab. XII mitgeteilten Versuches

Tabelle XIII.

Zeit	1—16 Sek.	16—31 Sek.	31—46 Sek.	46—61 Sek.
2,00 V	32,8	23,2	19,0	17,9
1580 V	25500	17000	12600	10100
Verhältnis	770	730	660	510

Zeit	76—91 Sek.	181—196 Sek.	301—316 Sek.	481—496 Sek.
2,00 V	12,5	9,1	6,6	4,3
1580 V	5900	1700	850	560
Verhältnis	470	190	130	130

zusammengestellt. Beachtet man nun das Verhältnis der bei den Versuchen angewendeten Spannungen $\frac{1580}{2} = 790$, so erkennt man daß für die Anfangswerte beider Versuche innerhalb dieses Spannungsgebietes *zwischen Spannungen und Stromstärken Proportionalität* besteht. Eine Andeutung für das eventuelle Vorhandensein eines Sättigungsstromes geben die erhaltenen Werte nicht.

Die Verhältniswerte für spätere Versuchszeiten zeigen, daß die Stromstärke in der mit hoher Spannung geladenen Platte im Verlauf des Versuches verhältnismäßig wesentlich rascher abnahm als bei niederer Spannung. Zeitliche Abnahme der Lichtempfindlichkeit oder Zunahme der Polarisation müssen demnach im ersten Fall stärker gewesen sein als im zweiten, oder im Verlauf der längeren Ladungszeit sind in der Platte Verhältnisse entstanden, die das Zustandekommen eines Sättigungsstromes, für dessen Existenz zu Anfang des Versuches keine Andeutung vorhanden war, bedingen. Eine direkte Entscheidung, welcher dieser drei Faktoren im vorliegenden Fall maßgebend wirksam war, habe ich nicht beibringen können; doch kommt mir die zuletzt angeführte Erklärung als die viel weniger wahrscheinliche vor. Jedenfalls hat sich auch bei keinem der hier nicht besonders angeführten Versuche der ganzen Untersuchung von bestrahltem NaCl ein unzweifelhaft sicheres Anzeichen für das Vorhandensein von einem Sättigungsstrom innerhalb der verwendeten Spannungsgrenzen gezeigt, wohl aber mehrmals, wie oben, ein für das Fehlen eines solchen.

Ob auch die weitere Forderung des Ohmschen Gesetzes, nach der die Stromstärke der Länge der Strombahn umgekehrt proportional sein muß, für die beleuchtete X-bestrahlte Platte eintrifft, hätte kaum genau geprüft werden können, weil die Lichtempfindlichkeit einer Platte in der Richtung ihrer Dickendimension, die auch die Richtung der benutzten X-Strahlung ist, keineswegs überall gleich, sondern wegen stattgefundener Absorption an den Stellen, die der X-Strahlenquelle näher lagen, größer ist als an den entfernter gelegenen. Besondere L.-F.-Bestimmungsversuche mit zwei aus dem gleichen Stück gespalteten Platten, die bei der X-Bestrahlung übereinander lagen, bestätigte noch diese an und für sich schon plausibele Ansicht.[1])

---

1) Nach dem oben S. 91 über den Einfluß der Dauer der X-Bestrahlung auf die von ihr erzeugte Lichtempfindlichkeit Gesagten ist zu erwarten, daß die Homogenität einer Platte um so größer sein wird, je länger die X-Bestrahlung fortgesetzt wurde.

Im Anschluß an das Mitgeteilte möchte ich noch bemerken, daß es bei Beurteilung der besprochenen und noch weiter mitzuteilenden Versuchsergebnisse gut ist, nicht aus dem Auge zu verlieren, daß das

Welche Strahlen von dem Gemisch, das die Röhre liefert, *die wirksamsten sind*, wurde nicht untersucht; weiche Röhren erwiesen sich im allgemeinen wirksamer als harte. Die bedeutende Lichtempfindlichkeit, die die bereits oben kurz erwähnte durch Kathodenbestäubung versilberte NaCl-Platte eine Zeitlang nach ihrer Versilberung besaß, ist wohl weniger einer direkten Wirkung von Kathodenstrahlen zuzuschreiben, als von sehr weichen X-Strahlen, die in dem verhältnismäßig geringen Vakuum, das bei der Versilberung zur Verwendung kam, erzeugt wurden. Über das Absorptionsspektrum der durch Steinsalz hindurchgegangenen X-Strahlen ist für unsere Frage Ausreichendes noch nicht bekannt.

Über die *Abhängigkeit der L.-F. von der Intensität des die Platte beleuchtenden Lichtes* sind nur wenige und nicht besonders eingehende Versuche gemacht worden. Bei einer exakten Verfolgung dieser Frage wird natürlich mit der von selbst eintretenden und durch eine Beleuchtung beschleunigten Abnahme der Lichtempfindlichkeit zu rechnen sein. Bei einem Versuch mehr orientierender Art geschah die Änderung der Lichtintensität durch Änderung der Entfernung der Nernstlampe von der Platte, und es konnte erkannt werden, daß die beobachteten Stromstärken sich genügend in das Gesetz von Proportionalität von Stromstärke und Lichtintensität einfügten. Unter Anwendung dieses Gesetzes leitet sich aus der Angabe von S. 90 ab, daß die 7 Minuten lang X-bestrahlte Platte sofort nach Eintreten der Beleuchtung bei 1580 Volt Ladung einen Elektrometerausschlag von einem Skalenteile in 5 Sekunden ergeben hätte, wenn die 32kerzige Nernstlampe in etwa 10 m Entfernung aufgestellt gewesen wäre, was einer Beleuchtung von etwa 0,32 Lux entsprochen haben würde. Ein später ausgeführter Versuch mit einer andern, von einer 10 m entfernten Nernstlampe beleuchteten Platte bestätigte dieses Resultat. Genauere Versuche über die Beziehung zwischen Stromstärke und Lichtintensität wären sehr erwünscht.

X-bestrahlte NaCl jedenfalls in den meisten Fällen, wenn nicht immer, in der eben besprochenen Art inhomogen ist. Auch dieser Umstand trägt natürlich nicht dazu bei, die Wirkung der einzelnen Faktoren auf die L.F. klarer erkennen zu können.

Über die *Abhängigkeit der L.-F. von der Wellenlänge des beleuchtenden Lichtes* wird weiter unten ausführlich berichtet werden.

Die Kenntnis des Einflusses der Temperatur auf die L.-F. des beleuchteten, vorher X-bestrahlten NaCl ist von Wichtigkeit, weil ein Vergleich dieser Größe mit der für unbestrahltes NaCl gefundenen vielleicht einen Unterschied in der Natur der Vorgänge bei der Elektrizitätsbewegung in unbestrahltem und in bestrahltem NaCl erkennen läßt, was selbstverständlich sehr erwünscht wäre. Nun wird zwar eine genaue Bestimmung dieses Temperatureinflusses recht erschwert durch den uns bekannt gewordenen Umstand, daß die Aktivität des bestrahlten NaCl mit der Zeit abnimmt, und außerdem durch die Tatsache, daß diese Abnahme von der Temperatur mitunter stark abhängig ist; es ist mir aber doch gelungen, einen Wert des Temperaturkoeffizienten zu erhalten, der sicher genug ist, um in genannter Beziehung eine zuverlässige Angabe machen zu können.

Es ergab sich aus einem bei aufsteigender und absteigender Temperatur mit einer nur schwach X-bestrahlten und wenig beleuchteten Platte — ihre L.-F. war etwa 60mal größer als vor der Bestrahlung — angestellten Versuch in dem bei tiefer Zimmertemperatur anfangenden Intervall von etwa 40°, der Temperaturkoeffizient $\varkappa\, d\varkappa/dt$ im Mittel zu 0,011. Dieser Wert wurde erhalten einige Minuten, nachdem die Ladung angelegt war; eine Andeutung für eine Änderung des Koeffizienten mit der Ladungsdauer fand sich nicht. Die Bestimmung des Koeffizienten bei unbestrahltem NaCl hatte ergeben (S. 68): nach etwas längerer Ladungsdauer 0,17, nach kürzerer Ladungsdauer 0,08 und nach sehr kurzer Dauer ein sicher noch wesentlich kleinerer Wert. Nach diesen und den bei andern Versuchen damit übereinstimmend gefundenen Ergebnissen *beeinflußt die Temperatur die L.-F. des beleuchteten, bestrahlten NaCl und die des unbestrahlten, farblosen NaCl sicher in sehr verschiedener Weise*, und damit erhält die im Verlauf der Untersuchung gewonnene Ansicht, daß die beobachtete Elektrizitätszufuhr zum Elektrometer von der unbestrahlten Platte in anderer Art vermittelt wird, als in der beleuchteten, X-bestrahlten eine wesentliche Stütze.[1])

ad b) In dem vorhergehenden fand sich einige Male Gelegenheit, die Erscheinung der Nachwirkung einer Be-

1) Vgl. das ähnliche Resultat für blaues NaCl S. 151.

leuchtung auf die L.-F. des verdunkelten X-bestrahlten NaCl zu erwähnen; eine Zusammenstellung von dem, was über diese Nachwirkung gefunden wurde, erscheint angezeigt.

1. Wenn eine anfänglich verdunkelte, andauernd geladene X-bestrahlte Platte eine gewisse Zeit lang beleuchtet war, so zeigt sie nach wiedereingetretener Verdunklung eine größere L.-F. als vor der Beleuchtung.

2. Wenn eine längere Zeit dunkel gehaltene, nicht geladene, X-bestrahlte Platte beleuchtet wird, so hat das zur Folge, daß sie bei einer folgenden Prüfung im Dunkeln eine größere L.-F. aufweist als vor der Beleuchtung.

Beispiele für beide Fälle finden sich S. 88 und in der Tab. V. Aus dieser Tabelle ist auch zu ersehen, daß die erzeugte Vermehrung der L.-F. rasch mit der Zeit abnimmt; so war z. B. die nach einem Tag seit stattgefundener Beleuchtung noch sehr deutliche Vermehrung schon am nächstfolgenden Tag nicht mehr mit Sicherheit wahrzunehmen, während die Aktivität der Platte nicht merklich abgenommen hatte. Über den zeitlichen Verlauf dieser Abnahme wurden keine besonderen Versuche gemacht.

Wie zu erwarten, üben Intensität und Dauer der Beleuchtung, sowie die Aktivität der Platte und auch wohl die Temperatur und vielleicht auch der „Strom" ihren Einfluß auf die Größe und auf das Verschwinden der Nachwirkung aus. Selbstverständlich darf die Beleuchtung, wenn ihr Einfluß bemerkbar sein soll, nicht so lange dauern, daß die Aktivität unterdessen zu sehr abgenommen hat.

3. Ob auch die bei Beleuchtung gemessene L.-F. größer ist, wenn die Platte kurz vorher beleuchtet war, wurde bei den bisherigen Versuchen nicht untersucht; es ergab sich aber eine solche Nachwirkung bei den im folgenden mitgeteilten Versuchen, bei denen spektral zerlegtes Licht zur Verwendung kam.

4. Auch die nach einer im Dunkeln vorgenommenen X-Bestrahlung beobachtete, mehrmals erwähnte Vermehrung der L.-F. einer andauernd verdunkelten Platte, die wir als möglicherweise durch das bei der Bestrahlung auftretende Fluoreszenzlicht verursacht ansahen, verschwindet verhältnismäßig rasch, ohne daß die Aktivität in gleichem Maße, wie z. B. auch aus der Tab. V ersichtlich ist, abnimmt.

Abgesehen von dem Interesse, das diese Erscheinungen an und für sich bieten, sind sie zu der das Verhalten einer Platte bei einem Ladungsversuch so sehr beeinflussenden Vorgeschichte gehörende Tatsachen, auf die bei derartigen Versuchen sehr Rücksicht genommen werden muß.

Ich gestatte mir an dieser Stelle noch über einige Nachwirkungen andrer Art kurz zu berichten. Manchmal findet man in den Elektrometerausschlägen eines Entladungsversuches nicht nur die Spuren, die eine dem Versuch unmittelbar vorangehende Behandlung der Platte hinterlassen hat, sondern auch solche von Prozessen, die ihrerseits dieser Behandlung wieder vorangingen. Ein für die Beurteilung dieses Verhaltens der Platte bezeichnendes Beispiel ist, daß man es an dem Verlauf eines Entladungsversuches unter Umständen sehr deutlich bemerken kann, wenn einer kurz dauernden Ladung etwa mit *positiver* Elektrizität eine längere Zeit dauernde Ladung mit *negativer* Elektrizität vorangegangen war. Die Untersuchung des blauen NaCl, über die noch zu berichten sein wird, bot Gelegenheit zu einem Versuch, der das soeben Gesagte besonders deutlich zur Anschauung brachte (vgl. S. 165). Selbstverständlich erschweren solche Erscheinungen manchmal sehr die Deutung der Ergebnisse eines Ladungsversuchs und es gibt, wie mir scheint, nur ein Mittel, das freilich ein recht umständliches ist, um die Platte von dem Einfluß solcher Vorgeschichte zu befreien, nämlich, daß man die Platte vor jedem Versuch einer recht hohen Temperatur (etwa 350°) längere Zeit (über 1 Stunde) aussetzt; dadurch verliert sie vollständig ihre erworbene Lichtempfindlichkeit.

Auch die folgende Wahrnehmung mag hier Erwähnung finden. Sie wurde mit einer Platte gemacht, die ich aus einem Vorratsstück abgespaltet, dann hoch erhitzt und darauf in der bekannten Weise für Ladungsversuche hergerichtet hatte. Sie zeigte, sofort im Dunkeln untersucht, eine etwa zweifache L.-F. und ein verhältnismäßig langsameres Ansteigen der Polarisation im Vergleich zu der „älteren" Platte, sonst aber nichts Auffälliges. An den folgenden Tagen wurden mit der Platte noch einige Ladungsproben gemacht, deren Mitteilung überflüssig ist, weil sie auf das Folgende nach an anderen Platten gemachten Erfahrungen keinen Einfluß ausgeübt haben können. Der uns hier interessierende Versuch begann

mit einer X-Bestrahlung von einer Minute Dauer und einer sofort folgenden 3 Minuten lang dauernden Ladung mit +900 Volt im Dunkeln. Nach Ablauf dieser Zeit setzte bei fortgesetzter Ladung eine höchstens 2 Sekunden dauernde Beleuchtung mit der etwa 70 cm entfernten Nernstlampe ein, die, wie zu erwarten war, den Lichtzeiger rasch über die Skala hinausführte, d. h. für diese kurze Zeit einen sehr kräftigen Strom zustande brachte. Verdunklung und Erdung folgten, und 3 Minuten später wurden, in der Absicht etwas über den Polarisationszustand der Platte zu erfahren, +100 Volt im Dunkeln angelegt. Es ergaben sich in der folgenden Beobachtungszeit von 3 Minuten *im Dunkeln* geringe, aber unzweifelhaft *positive* Ausschläge, aus denen auf das Vorhandensein einer Polarisation von weniger als −100 Volt geschlossen werden mußte. Als nun aber bei fortgesetzter Ladung mit +100 Volt plötzlich das *Licht* der Nernstlampe zugelassen wurde, bekam ich unerwarteterweise anfangs sehr kräftige, mit der Zeit aber an Stärke abnehmende *negative* Ausschläge, die nach etwa 45 Sekunden in positive übergingen, deren Stärke innerhalb von 4 Minuten zuerst zu, dann aber abnahm. Bei folgender Erdung ergaben sich sowohl im Dunkeln, als auch bei Beleuchtung negative Ausschläge und später bei nochmaliger Ladung mit +100 Volt in normalerweise bei hell und dunkel positive Ausschläge. Das Auffallende an diesem Versuch ist nun offenbar, daß ich bei der Probe auf Polarisation mit +100 Volt *im Dunkeln positive, bei Beleuchtung aber negative, allmählich in positive übergehende Ausschläge* erhielt, und es entsteht die Frage, weshalb zeigte sich die von dem kurz dauernden mit +900 Volt in der beleuchteten Platte erzeugten Strom herrührende Polarisation bei der Probe mit +100 Volt im *Dunkeln* kleiner als −100 Volt, in der *beleuchteten* Platte dagegen viel größer, so daß die angelegte Spannung leicht von ihr überwunden wurde. Daß unbekannt gebliebene Fehler in der Versuchsanordnung nicht die Ursache gewesen sind, bewies ein später mit der gleichen Platte wiederholter Versuch, der dasselbe Resultat sogar in noch mehr ausgeprägter Weise lieferte, was wohl dem Umstand zuzuschreiben ist, daß vor dem Ladungsversuch mit geringer Spannung durch eine längere Ladungsdauer eine noch kräftigere Polarisation erzeugt worden war als beim ersten Versuch.

Das vorhin S. 100 mitgeteilte Ergebnis von Versuchen über den Einfluß der Temperatur auf die L.-F. des beleuchteten, vorher X-bestrahlten NaCl führt zu der Anschauung, daß die Beleuchtung in der Platte Elektrizitätsträger frei oder jedenfalls beweglicher macht, die nicht der gleichen Art sind, oder die nicht der gleichen Verbindung angehörten, wie diejenigen, welche in einer nicht bestrahlten Platte bei der Elektrizitätsbewegung eine Rolle spielen. Der zuletzt besprochene Versuch hat mich in dieser Anschauung bestärkt, indem es mir möglich erscheint, mit ihrer Hilfe das obige Ergebnis zu verstehen. In dem verdunkelten NaCl wurden von der angelegten Spannung Elektrizitätsträger von anscheinend anderer Beschaffenheit oder Herkunft in Bewegung versetzt als in dem beleuchteten.

ad c) Unter c) ist die auch an vielen anderen Platten beobachtete Erscheinung der Erholung, die eine beleuchtete, vorher X-bestrahlte Platte bei fortgesetzter Ladung erfährt, wenn sie eine Zeitlang verdunkelt wird, an einem Beispiel beschrieben. Ich möchte noch einen zweiten Versuch mit der gleichen Platte hier anführen, bei dem die Erscheinung etwas eingehender untersucht wurde. Auf S. 92 ist mitgeteilt, daß die Platte 15 Sekunden lang bestrahlt und gleich darauf im Dunkeln mit etwa 1500 Volt und erst nach etwa 24 Stunden mit einer Nernstlampe beleuchtet wurde. Sie hatte mit zugeschaltetem Kondensator von 0,07 M.-F. in den ersten 5 Sekunden nach Eintritt der Beleuchtung einen Ausschlag von 25 Skalenteilen (dem ein Auschlag von etwa 6750 Skalenteilen ohne Kondensator entsprechen würde), gegeben, der bei dauernder Ladung und Beleuchtung im Verlauf von 28 Minuten allmählich auf 1,2 Skalenteile in 30 Sekunden gesunken war. Darauf wurde die Platte immer bei dauernd angelegter Ladung während 48,5 Minuten verdunkelt, und als nun wieder plötzlich die Beleuchtung einsetzte, lieferte sie zu Anfang nicht etwa den zuletzt gefundenen Ausschlag von 1,2 Skalenteilen, sondern einen beträchtlich größeren, nämlich 12 Skalenteilen in 30 Sekunden. Sie hatte sich somit in der 48,5 Minuten währenden Dunkelheit bei unveränderter angelegter Spannung wesentlich „erholt“; erst nach etwa 10 Minuten fortgesetzter Beleuchtung und Ladung war sie wieder bei 1,2 Skalenteilen Ausschlag angelangt. Zu Anfang

dieser 10 Minuten war die Abnahme der Stromstärke rascher als in dem Augenblick, wo die Stromstärke vor der Verdunklung beim Ladungsversuch auch 12 Skalenteile in 30 Sekunden betrug, so daß auch in dieser Beziehung der zeitliche Verlauf der Stromstärke sich nicht direkt an den zuletzt bei Beleuchtung beobachteten anschloß. Eine Erholung zeigte sich nicht mehr merklich (nicht einige Zehntel Skalenteile), nachdem die Platte bei Fortsetzung des besprochenen Versuchs 14 Tage lang dauernd beleuchtet und mit etwa 1600 Volt Spannung versehen geblieben war und ihre Aktivität dadurch wieder verloren hatte. (Sie lieferte bei „hell" und „dunkel" gleichviel, etwa 1,5 Skalenteile in 7 Minuten ohne Zusatzkondensator). Da ich bei andern Versuchen fand, daß die Erholung ebenfalls kaum merklich auftrat nach einer verhältnismäßig kurz vorangegangenen Beleuchtung der geladenen Platte, so ist zu schließen, daß in jedem Fall bei einer gewissen Dauer von Ladung und Beleuchtung die Erscheinung am stärksten hervortreten wird, was auch mehrfach bestätigt werden konnte.

Zu vermuten ist, daß die Erscheinung der Erholung auch bei einer Entladung eintreten wird, d. h. nach Verdunklung einer X-bestrahlten NaCl-Platte, die eine Zeitlang bei Beleuchtung einen Polarisationsstrom geliefert hatte. Das traf in der Tat auch in recht merklicher Weise zu, wenn die Lichtempfindlichkeit der Platte nicht durch zu lang vorhergehende Beleuchtung zu stark herabgesetzt worden war.

Wenn eine Erholung im Dunkeln eintritt, so wird man wohl erwarten, aber nicht mit voller Sicherheit ohne weiteres angeben können, daß eine „Ermüdung" der geladenen Platte während der vorhergehenden Beleuchtung stattgefunden hat und es fragt sich, ob eine solche Erscheinung direkt nachweisbar ist. Sie müßte sich natürlich in einer zeitlichen Abnahme der Stromstärke äußern; eine solche Abnahme ist, wie bekannt, auch immer vorhanden, sie wurde aber bisher einer wachsenden Polarisation zugeschrieben und wenigstens zum Teil mit Recht, denn sonst hätte eine folgende Erdung keinen Entladungsstrom ergeben können. Es könnte aber immerhin ein Teil dieser Abnahme auf Rechnung einer Ermüdung zu setzen sein und es ist zu überlegen, ob beide voneinander getrennt wahrzunehmen sind. Man könnte vielleicht denken, daß das Superpositionsgesetz zu diesem Zweck zu

verwenden sei, indem man sich sagt, wenn Ladungs-Entladungsversuche mit einer beleuchteten X-bestrahlten Platte ergeben, daß die Summe der Anfangsstromstärke nach der Erdung und der zuletzt bei der Ladung erhaltenen Stromstärke kleiner ist, als die Anfangsstromstärke bei der Ladung, so ist das ein Beweis für eine während der Ladung stattgehabte Ermüdung. Diese Schlußfolgerung wäre aber nicht erlaubt, denn eine Abweichung vom Superpositionsgesetz wird infolge der mehrfach erwähnten Eigenschaft des X-bestrahlten NaCl seine Lichtempfindlichkeit mit der Zeit von selbst und durch Beleuchtung beschleunigt zu verlieren, schon sowieso je nach der Ladungsdauer mehr oder weniger stark auftreten, und da wir diesen nicht rückgängig zu machenden Verlust nicht mit dem Namen „Ermüdung" belegen wollen, so wird es unentschieden bleiben müssen, ob eine wirkliche Ermüdung an dem Kleinerwerden der Stromstärken während der Ladung und Beleuchtung teilgenommen hat oder nicht. Anderseits kann auch ein Versuch, bei dem das Gesetz, von kleinen, durch Versuchsfehler leicht zu erklärenden Abweichungen abgesehen, zutrifft — beide Fälle kommen vor — kein Beweis dafür sein, daß es überhaupt keine Ermüdung gibt, denn wenn das Gesetz sich in der angegebenen Weise als gültig erweisen soll, so darf wieder wegen der Abnahme der Lichtempfindlichkeit der Ladungsversuch nur kurz dauern und dann ist, wie oben mitgeteilt wurde, die Erholung, folglich auch wohl die gesuchte Ermüdung so gering, daß sie leicht der Wahrnehmung entgehen könnte. Auch fand ich keinen andern Weg, um bei X-bestrahltem NaCl zu einer Entscheidung über diese Frage zu gelangen; um so erfreulicher ist es, daß sich bei blauem NaCl mit Gewißheit das *Bestehen der vermuteten Ermüdung während der Beleuchtung* hat nachweisen lassen (vgl. S. 159).

ad d) Auf S. 89 wurde aus dem in einem bestimmten Falle beobachteten Nichteintreffen des Superpositionsgesetzes gefolgert, daß die Lichtempfindlichkeit einer X-bestrahlten Platte während der stattgefundenen Beleuchtung abnimmt. Dieses Mittel zur Erkennung einer solchen Abnahme ist aber keineswegs das einzige, es ist sogar nicht einmal das sicherste, und dessen Erwähnung geschah nur deshalb, weil sich die betreffende Beobachtung an die Reihe der übrigen mit der „älteren" Platte gemachten zeitlich anschloß. Die von

selbst stattfindende zeitliche Abnahme der Lichtempfindlichkeit zeigte sich am einfachsten an Platten, die längere Zeit nach ihrer X-Bestrahlung unbenutzt geblieben waren. Wurden die Platten im Dunkeln aufbewahrt, so konnte der Einfluß einer X-Bestrahlung noch nach Jahren durch ihr Verhalten bei einem Ladeversuch, d. h. durch die Reste ihrer Lichtempfindlichkeit, nachgewiesen werden; waren die Platten während ihrer Ruhepause dem Licht, z. B. dem Tageslicht, ausgesetzt, so verschwand ihre Lichtempfindlichkeit in kürzerer Zeit. *Beleuchtung beschleunigt somit die von selbst verlaufende Abnahme der Lichtempfindlichkeit.* Ob auch der „Strom" eine beschleunigende Wirkung ausübt, muß vorläufig noch unentschieden bleiben. Sicher aber ist, daß eine *Temperaturerhöhung die Abnahme der Lichtempfindlichkeit beschleunigt.* Zu einer raschen Vernichtung der Lichtempfindlichkeit, gleichzeitig zur Beseitigung von Nachwirkungen, von Polarisation usw., gibt es deshalb, wie schon oben kurz erwähnt, ein sicheres Mittel: starke, nicht zu kurz dauernde Erhitzung des NaCl. Nach den gemachten Erfahrungen wird dadurch das Material jedesmal wieder in den gleichen — sagen wir natürlichen — Zustand zurückversetzt. Einige Einzelheiten über dieses Verfahren mögen hier angegeben werden. Zum Zwecke der Erhitzung auf etwa 350°, die klares Steinsalz gut verträgt, wurde die Platte in Aluminiumfolie eingewickelt und von trockenem Sand umgeben, in einen Heräusofen gebracht. Man ließ die Temperatur langsam bis zur angegebenen Höhe steigen, hielt sie darauf etwa eine gute Stunde lang unverändert und schaltete dann den Heizstrom aus, so daß eine langsame Abkühlung auf Zimmertemperatur eintrat. Um die Platte für folgende Ladungsversuche verwendbar zu machen, muß sie natürlich frisch graphitiert und mit der Glyzerinsalzlösungelektrode versehen werden; das Abschleifen mit Alkohol und Bimsstein geschieht zweckmäßig vor der Erhitzung. Zur Anwendung kam das Verfahren nur in verhältnismäßig wenigen Fällen; es ist etwas umständlich, weil die Belegungen dabei, wie gesagt, immer wieder neu hergestellt werden müssen.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, daß der Zustand der X-bestrahlten Platte, den wir wiederholt „Polarisation" nannten, sich erfahrungsgemäß ebenfalls sehr lange Zeit erhalten kann, wenn die Platte im Dunkeln, wenn auch mit beiderseits zur

Erde abgeleiteten Elektroden, aufbewahrt bleibt. Ob eine X-bestrahlte Platte ganz polarisationsfrei geworden ist, ist nicht immer mit Sicherheit zu entscheiden. Es kann z. B. ein geringer Betrag von bei Beleuchtung erworbener Polarisation nach längerer Zeit noch vorhanden sein, auch wenn das Elektrometer davon sogar bei Beleuchtung der Platte nichts, wenigstens innerhalb von wenigen Minuten anzeigt; denn das Fehlen eines entsprechenden Ausschlages kann leicht daher kommen, daß die Lichtempfindlichkeit unterdessen verschwunden ist. Eine solche, gewissermaßen „versteckte" Polarisation kann sich dann aber bei einem folgenden Ladungsversuch, der mit der nachträglich nochmals X-bestrahlten Platte während ihrer Beleuchtung vorgenommen wird, dadurch bemerkbar machen, daß dieser Versuch auffallend kleine Stromstärken liefert; wenigstens kann ich nur in dieser Weise einige auffallende und störende Unstimmigkeiten, die während der Untersuchung vorkamen, deuten. Durch einen besonderen, zu diesem Zwecke angestellten Versuch konnte ich jedenfalls nachweisen, daß eine kräftige X-Bestrahlung eine nachweisbar noch vorhandene Polarisation nicht etwa vernichtete. (Vgl. auch den auf S. 103 mitgeteilten Versuch.)

Einfluß einer Ra-Bestrahlung auf die L.-F. des Steinsalzes.

Es war zu erwarten, daß *die γ-Strahlung des Ra ähnlich wirken würde wie eine X-Strahlung.* Da jene sich vorteilhaft von dieser durch ihre Konstanz unterscheidet, bestand anfänglich die Hoffnung, mit der Ra-Strahlung über einzelne Erscheinungen, die sich wegen der Inkonstanz der X-Strahlung der eingehenden Beobachtung bisher entzogen, etwas mehr Aufschluß zu erhalten. Zunächst wurden einige Probeversuche mit einigen Milligrammen RaBr gemacht, das in einem Glasröhrchen eingeschmolzen war. Das Röhrchen wurde mit seinem unteren Ende, in dem das Ra-Präparat angesammelt war, einfach in die Salzglyzerinlösung der oberen Elektrode der zu untersuchenden Steinsalzplatte eingelegt. Um während der Bestrahlung überhaupt beobachten zu können, war der dem Ra am meisten benachbarte Teil der Elektrometerleitung gegen Strahlung durch einen Bleiklotz folgender Konstruktion möglichst geschützt. Ein runder, oben und unten mit angelötetem Platinblech versehener Bleikonus war in eine 1 cm

dicke, 4 : 4 cm große Bleiplatte mittels Paraffin isoliert eingesetzt. Auf ihm lag mit ihrer Graphitelektrode die Steinsalzplatte; die untere Konusfläche stand in der früher angegebenen Weise mit der Elektrometerleitung, die, so weit wie möglich, in Paraffin eingegossen war, in Verbindung; auch war die untere Fläche der NaCl-Platte bis auf die Elektrode mit Paraffin überzogen, um namentlich den Isolierstreifen gegen ionisierte Luft zu schützen. Trotz dieser Vorkehrungen war die Isolation der Leitung und der damit verbundenen Teile sehr wenig befriedigend; auch schützte die Bleiverkleidung des großen Blechkastens die Elektrometernadelladung nicht genügend gegen die durchdringende Ra-Strahlung, so daß das Elektrometer unliebsam davon beeinflußt wurde.[1]) Infolgedessen wurden mit Ra-Strahlen nur wenig Versuche angestellt, und ging die gehegte Hoffnung nicht in Erfüllung; die Versuche reichten aber gerade aus, um die Ergebnisse einiger Versuche mit X-Strahlen zu bestätigen und etwas zu ergänzen. Auf eine ausführliche Mitteilung darf ich wohl verzichten und mich auf folgende kurze Angaben der Ergebnisse beschränken.

Die Ra-Strahlung vermehrt die L.-F. des NaCl auch im Dunkeln, und zwar konnte jetzt leicht nachgewiesen werden, daß diese Vermehrung sowohl während der Bestrahlung, als auch nachher (als „Nachwirkung") vorhanden ist. Von Zeit zu Zeit durch kurzes Anlegen der Ladung gemachte Proben zeigten, daß die L.-F. im Dunkeln sich bei fortgesetzter Bestrahlung im Verlaufe der Zeit zuerst rasch, dann aber immer langsamer vermehrt, so daß ich zuletzt ihr Anwachsen während 24 Stunden nicht mehr wahrnehmen konnte. Nach Entfernung des Ra verschwand die erworbene L.-F. allmählich sowohl im Dunkeln, als auch bei Beleuchtung; im letzten Falle aber rascher.

Bei andauernder Bestrahlung und Ladung im Dunkeln nimmt, wie bei der X-Bestrahlung, die Stromstärke allmählich ab. Dementsprechend bildet sich auch während der Bestrahlung eine Polarisation, die sich bei folgender Erdung als Polarisationsstrom bemerkbar macht und dem Super-

1) Eine Verbesserung dieser Versuchsanordnung, die ja möglich gewesen wäre, hätte eine wesentlich andere Aufstellung benötigt, und dazu konnte ich mich bis jetzt noch nicht entschließen.

positionsgesetz zu folgen scheint. Eine weitere Untersuchung der Verhältnisse, die unter den angeführten Bedingungen — fortgesetzter Bestrahlung und Ladung — eintreten, wäre m. E. sehr erwünscht.

Durch die Ra-Strahlung wird das NaCl für eine Zeitlang lichtempfindlich. Eine Beleuchtung mit dem Licht der Nernstlampe vermehrte sowohl während der Ra-Bestrahlung, als auch nachher die L.-F. sehr bedeutend. Daß sich bei einem Versuch die Stromstärke im ersten Falle wesentlich kleiner als im zweiten Falle, d. h. nach Entfernung des Ra-Röhrchens von der Platte ergab, hat wohl seinen Grund darin, daß das Röhrchen die nächstliegenden und deshalb am stärksten lichtempfindlich gemachten Stellen während der Beleuchtung beschattete, und daß die Isolation nach Entfernung des Ra wesentlich besser war als vorher. Die für die Auffassung der Vorgänge während des Stromdurchganges bedeutsame Frage, ob die Stromträger, die im Dunkeln, bzw. bei Beleuchtung tätig sind, qualitativ dieselben sind oder nicht, konnte ich wegen der durch die schlechte Isolation bedingten Unsicherheit in den Messungen leider einer Beantwortung nicht näher bringen. Natürlich darf man die Tatsache, daß, wie erwähnt, die im Dunkeln anfänglich stattfindende Vermehrung der L.-F. nach einiger Zeit allmählich aufhört, während eine dann einsetzende Beleuchtung einen kräftigen Strom zustande bringen kann, nicht als eine endgültig bejahende Antwort auf diese Frage ansehen. Eine genügend genaue Messung des Temperatureinflusses konnte aus den angegebenen Gründen ebenfalls nicht ausgeführt werden.

Einfluß von Quecksilberlicht auf die L.-F. des Steinsalzes.

Daß das Licht einer Nernstlampe nicht merklich auf unbestrahltes NaCl wirkt, ist bereits oben erwähnt; auch von dem Sonnenlicht, wie es uns zur Verfügung stand, konnte keine die Platte empfindlich machende Wirkung beobachtet werden; dagegen übt nach dem Vorangehenden eine X- und γ-Bestrahlung eine solche Wirkung aus. Es sollte nun die Frage beantwortet werden, ob nicht vielleicht auch die kurzwellige Strahlung, die von einer Quarzglas-Quecksilberlampe ausgeht, in ähnlicher Weise wie die X-Strahlung imstande ist, auf das NaCl zu wirken. Ich gebe zunächst das Ergebnis

von Versuchen an, die mit den beiden oben mehrmals erwähnten gleich geformten, aus einem Stück Steinsalz abgespaltenen Platten gewonnen wurden. Die eine davon — sie sei mit Nr. V bezeichnet, die andere mit Nr. IV — war vor ihrer Belegung in der oben angegebenen Weise stark erhitzt worden. Nachdem das Verhalten beider, in je einem Kästchen aufgestellten Platten sich im Laufe von ein paar Tagen sowohl im Dunkeln, als mit Nernstlampen- und Sonnenbeleuchtung bei 900 Volt Ladung im wesentlichen gleich gezeigt und ihre Anfangs-L.-F. sich etwa doppelt so groß als die der „älteren" Platte erwiesen hatte (vgl. S. 35), wurde nach einer Ruhepause von etwa 2 Tagen, während denen die Belegungen beider Platten geerdet waren, mit der Quecksilberbeleuchtung angefangen. Die Heräuslampe stand zunächst seitlich vom Kästchen, das die Platte Nr. V enthielt, so daß das Licht mittelst eines auf die obere, von dem Glasverschluß befreite Kästchenöffnung gesetzten, total reflektierenden Quarzprismas zu dieser Platte geführt werden konnte. Die Entfernung zwischen Lampe und Platte betrug etwa 30 cm; die möglichst dünne Glyzerinkochsalzelektrode ist für einen großen Teil der Quecksilberbestrahlung durchlässig.

Ein erster Vorversuch fand mit geerdeter Platte statt; ein der Hg-Beleuchtung zuzuschreibender Ausschlag des Elektrometers war innerhalb einer Minute nicht zu erkennen. Bei einem zweiten Vorversuch war die obere Plattenbelegung durch Herausnehmen des Bügels aus dem Kommutator, der die Verbindung der Belegung mit der Erde, bzw. mit der Hochspannung vermittelt, isoliert: Es ergab sich ein Elektrometerausschlag von 1,0 Skalenteilen in einer Minute, eine Aufladung mit positiver Elektrizität andeutend. Die Ursache dieser Aufladung ist wohl in der von Elster und Geitel bei NaCl beobachteten, vielleicht auch dem Glyzerin oder anderen benachbarten Teilen der Leitung zukommenden lichtelektrischen Erregbarkeit zu suchen.

Nun folgten zwei in gewohnter Weise ausgeführte Ladungs-Entladungsversuche von geringer (einige Minuten) Versuchsdauer. Der erste mit Hg-Beleuchtung, der zweite im Dunkeln. Beide verliefen ganz regelmäßig und in ihren Ergebnissen untereinander vollständig übereinstimmend, so daß ich aus diesen Versuchen schließen mußte, daß eine Hg-Beleuchtung

ebenso wie Nernst- und Sonnenlicht nicht imstande ist, NaCl merklich zu aktivieren. Eine Nachprobe mit Nernstbeleuchtung schloß sich nicht an, weil anzunehmen war, daß eine Lichtempfindlichkeit, wenn vorhanden, sich schon bei der Hg-Beleuchtung gezeigt haben würde.

Auf diese Versuche folgten ein paar Tage später Versuche mit der Schwesterplatte Nr. IV, die nicht vorher erhitzt worden war. Ein Ladungs- und Entladungsversuch im Dunkeln verlief wieder wie bei der anderen Platte[1]), als aber an die *beleuchtete* Platte die Spannung von 900 Volt angelegt wurde, erhielt ich bei fortgesetzter Beleuchtung wesentlich größere Stromstärken als vorher und als mit der Platte Nr. V unter gleichen Umständen, und die zeitliche Abnahme der Stromstärke während des Versuchs war verhältnismäßig viel geringer als vor der Hg-Beleuchtung. Folgende Tabelle enthält einige der beobachteten Werte.

Tabelle XIV.

	Zeit	1–16 Sek.	16–31 Sek.	31–46 Sek.	46–61 Sek.
Ausschläge	Vor der Hg-Belichtung . . .	6,9	2,5	1,7	1,3
	Während der Hg-Belichtung	17,5	11,8	11,7	11,3
	Differenz	10,6	9,3	10,0	10,0

	Zeit	61–76 Sek.	106–121 Sek.	121–136 Sek.	136–151 Sek.
Ausschläge	Vor der Hg-Belichtung . . .	1,0	0,6	0,6	0,5
	Während der Hg-Belichtung	10,7	9,5	9,0	9,0
	Differenz	9,7	8,9	8,4	8,4

Wir treffen somit eine ähnliche Veränderung im zeitlichen Verlauf der Stromstärke an, wie die, die die verdunkelte „ältere“ Platte kurz nach ihrer X-Bestrahlung zeigte, d. h. die Quecksilberbeleuchtung vermehrte die L.-F. nicht in der Weise, daß jeder in 15 Sekunden bei der unbelichteten Platte beobachtete Elektrometerausschlag in einem für alle Ausschläge gleich bleibenden Verhältnis vermehrt wurde, sondern so, daß zu diesen Ausschlägen ein nur langsam mit der Zeit abnehmender Betrag sich addierte (vgl. S. 84).

---

1) Auch diese Platte gab bei isolierter oberer Belegung und Hg-Beleuchtung eine schwach positive Aufladung des Elektrometers.

Bei der bald folgenden Erdung der oberen Plattenbelegung ergab sich ein Polarisationsstrom rasch abnehmender Stärke, und zwar von einem um ein paar Skaltenteile geringeren Betrag als dem Superpositionsgesetz entsprochen haben würde, was auf eine Verminderung der Empfindlichkeit der Platte schließen läßt. Ein folgender Versuch mit Beleuchtung mit Nernstlicht ließ eine durch das Hg-Licht erworbene Lichtempfindlichkeit nicht mit ganzer Sicherheit erkennen. Nach diesem Befund wäre nun *diese* Schwesterplatte im Gegensatz zur ersten — vorher erhitzten — als etwas empfänglich für Hg-Beleuchtung zu bezeichnen.

Dieses Ergebnis veranlaßte eine sofortige Wiederholung und Fortsetzung der Versuche mit den in ihren Kästchen verbliebenen Platten. Dabei zeigte die erste Platte (Nr. V) genau dasselbe Verhalten wie vorher. Auch bei einer jetzt nach der Hg-Beleuchtung angestellten Probe auf ihre Lichtempfindlichkeit mit Hilfe der Nernstlampe ergab sich, wie zu erwarten war, keine Aktivität. Ebenfalls ergab sich etwa eine Woche später, in welcher Zwischenzeit die Platte zu einem bestimmten Zweck einmal aus ihrem Kästchen und aus ihrer Fassung entfernt worden war, unter den gleichen Umständen dasselbe Resultat. Später wurde (mit negativer Ladung von — 900 Volt) ein Versuch gemacht, der eine noch schärfere Probe abgeben sollte; diesmal setzte nämlich die Beleuchtung erst einige Tage nach dem Anlegen der Spannung ein, als die Stromstärke im Dunkeln sehr klein geworden war und deshalb eventuell kleine Änderungen besser erkennen ließ. Es wurde zuerst, wie gesagt, mit verdunkelter Platte, dann bei andauernder Ladung mit beleuchteter Platte, aber nach Siebung der Strahlen durch eine eingeschaltete, etwa 0,2 cm dicke Glasplatte und schließlich nach Entfernung dieser Glasplatte beobachtet. Die erhaltenen Elektrometerausschläge sind:

Im Dunkeln:	1,2 Skt.	} in je 4 Min.
Bei gesiebter Hg-Beleuchtung:	1,7 „	
Bei ungesiebter Hg-Beleuchtung:	2,8 „	

Diese sehr geringen Stromstärken und insbesondere ihre Differenzen liegen zwar nahe an der Grenze der Meßmöglichkeit, aber ich bezweifle doch nicht, daß diesen Differenzen zwischen den Werten mit und ohne Glasplatte eine reelle Bedeutung zukommt und daß sie keineswegs Beobachtungsfehlern zuzu-

schreiben sind; ein weiterer Versuch ergab nämlich im wesentlichen das Gleiche. Deshalb aber aus diesem Versuch zu schließen, daß die von Glas absorbierbare Hg-Strahlung sich nun doch in ähnlicher Weise aktivierend wie eine X-Bestrahlung, wenn auch in äußerst verkleinertem Maße erwiesen hat, halte ich noch nicht für erlaubt. Denn erstens ließ sich bei einer folgenden Probe das für die Wirkung der X-Strahlung so charakteristische Merkmal nicht nachweisen, daß sie nämlich das NaCl für eine folgende Beleuchtung mit Nernstlicht empfindlich macht; zweitens sind die Differenzen der Ausschläge mit und ohne Siebung der Beleuchtung so gering (1,1 Skalenteil in 4 Minuten), daß man wieder wie bei den Versuchen mit Nernstlicht annehmen kann, daß dieser Ausschlag von der mehrmals erwähnten (S. 80) und nachgewiesenen, durch die zugesandte Strahlung bewirkten Erwärmung der unteren Graphitelektrode herrührt.

Es folgt jetzt die Mitteilung der weiteren Untersuchung der anderen Schwesterplatte Nr. IV, die im Gegensatz zur Platte Nr. V verhältnismäßig größere Ausschläge während der Hg-Beleuchtung ergeben hatte. Nochmals wurden während einer nun etwas länger dauernden Hg-Beleuchtung (14 Min.) bei anhaltender Spannung von 900 Volt, die in je 15 Sek. erfolgenden Elektrometerausschläge gemessen. Sie betrugen zu Anfang 13,5 und am Schluß 2,9 Skalenteile. Nach Erdung der Platte erhielt ich einen rasch an Stärke abnehmenden Polarisationsstrom von 6,5 Skalenteilen Anfangsstärke. Das Superpositionsgesetz traf somit nicht zu, was wieder einer Abnahme der Aktivität zuzuschreiben ist. Ein folgender Versuch mit verdunkelter Platte ergab dasselbe wie die vorhergenden. Ein Versuch mit Nernstlicht ließ diesmal einen sehr geringen Einfluß dieser Beleuchtung erkennen. Qualitativ lieferte dieser neue Versuch somit dasselbe wie der erste, quantitativ etwas weniger. Am folgenden Tag wurden dann noch zwei Versuche gemacht, bei denen ich die Beleuchtung in gleicher Weise änderte wie bei dem letzten Versuch mit der Platte Nr. V, d. h. abwechselnd dunkel, Quecksilberlicht mit Glas, Quecksilberlicht frei. Das Ergebnis war das nach dem Vorhergehenden zu erwartende. Es zeigte sich aber noch deutlicher wie vorher, daß die Hg-Beleuchtung, wohl infolge ihrer häufigeren intensiven Verwendung und der dadurch verursachten Abnahme

der Aktivität, immer weniger wirksam geworden war. Jetzt am Schluß betrugen die Elektrometerausschläge in der Zeit 1—16 Sekunden: 9,5, in der Zeit 16—121 Sekunden: 4,2 Skalenteile, also ungefähr die Hälfte von denen beim allerersten Versuch.

Es war also keine Frage, daß die Platte Nr. IV sich wesentlich anders als die Platte Nr. V verhielt. Da diese vor dem Ladungsversuch, wie schon bemerkt, stark erhitzt worden war, jene aber nicht, so lag es nahe, wieder wie bei den früheren Versuchen mit Nernstbeleuchtung (von S. 81) in dieser Verschiedenheit der Behandlung die Ursache des verschiedenen Verhaltens zu suchen, und es wurde deshalb zur Prüfung dieser Ansicht nun auch die Platte Nr. IV einer starken Erwärmung unterworfen und nachher wieder auf ihr elektrisches Verhalten bei Quecksilberbeleuchtung untersucht. Dabei ergab sich eine Bestätigung der geäußerten Vermutung: der Einfluß der Hg-Beleuchtung auf die L.-F. der Platte Nr. IV zeigte sich sehr stark verringert, wie aus den Elektrometerausschlägen hervorgeht, die wieder nach etwas längerer Ladung mit — 900 Volt erhalten wurden.

Im Dunkeln:	4,8	Skt.	} in je 4 Min.
Bei gesiebter Hg-Beleuchtung:	4,6	„	
Bei ungesiebter Hg-Beleuchtung:	7,4	„	

Wenn die Werte etwas größer erschienen sind als bei der Platte Nr. V, so mag das daran liegen, daß das Erhitzen der Platte Nr. IV nicht so intensiv oder so lang andauernd gewesen ist als bei der anderen, und deshalb ihre Aktivität noch nicht ganz verschwunden war. Ihre ursprüngliche Aktivität verdankte die Platte wohl einer überall verbreiteten Ra-Strahlung oder dem Vorhandensein von sehr wenigen und deshalb nicht an der Farbe des Präparates erkennbaren wirksamen Teilchen, wie sie in deutlich gefärbtem Steinsalz vorkommen.

Aus den beschriebenen Versuchen mit beiden Platten gewann ich die bestimmte Ansicht, *daß auch eine Hg-Beleuchtung ebensowenig wie das Licht der Nernstlampe imstande ist, die L.-F. des vorher nicht einer X- oder γ-Strahlung ausgesetzten und nicht mit natürlicher Färbung versehenen Steinsalzes in einem mit dem in der Arbeit gebrauchten Mitteln sicher nachweisbaren Betrag während der Beleuchtung zu verändern oder*

dasselbe für eine folgende Beleuchtung empfindlicher zu machen. Die Eigenart der Wirkung der X- und Ra-Bestrahlung im Gegensatz zu der Bestrahlung mit Licht oder mit den ultravioletten Strahlen der Hg-Lampe besteht somit darin, daß erstere das NaCl für eine Beleuchtung mit sichtbarem Licht so vorbereitet (dasselbe lichtempfindlich macht, aktiviert), daß diese für sich allein nicht wirksame Beleuchtung die L.-F. nunmehr sehr stark zu vermehren imstande ist.

Untersuchung der L.-F. des X-bestrahlten NaCl im spektral zerlegten Licht.

Die Frage bietet Interesse, welche Bestandteile des weißen Lichtes sich an der Vermehrung der L.-F. des X-bestrahlten Steinsalzes beteiligen. Zur Beantwortung dieser Frage wurde bei einer Anzahl von Versuchen die Beleuchtung mit spektral zerlegtem Licht vorgenommen und zwar meist mit Sonnenlicht.

Ungefähr in gleicher Höhe wie die seitliche schlitzförmige Öffnung des Zinkkästchens[1]) hinter der die vorher X-bestrahlte Steinsalzplatte in gewohnter Weise aufgestellt war, befand sich im Fensterladen des verdunkelten Zimmers ein horizontal liegender, 0,1—0,2 cm weiter und 2—3 cm langer Spektralspalt, der das von einem Heliostaten kommende Sonnenlicht in horizontaler Richtung durchließ. Dieses unweit vom Kästchen verlaufende Lichtbündel fiel auf ein in einem Abstand von ca. 370 cm aufgestelltes großes Rowlandsches Konkavgitter (800 Linien auf das Zentimeter, Krümmungsradius 310 cm), das ein vertikales, von *A*—*H* etwa 80 cm langes Spektrum erster Ordnung am Ort der mit einem Schieber verschließbaren seitlichen Kästchenöffnung so entwarf, daß das durch diese Öffnung hindurchgehende Licht die gut eben geschliffene und polierte Randfläche der NaCl-Platte senkrecht traf und letztere somit parallel ihrer größten Ausdehnung durchdrang. Durch Drehen des Gitters um eine horizontale, den Gitterfurchen möglichst parallel gerichtete Achse konnten alle Spektralfarben zur Verwendung kommen.[2]) Die genaue Bestimmung der jeweils benutzten Strahlenart geschah mit Hilfe der hauptsächlichsten Fraunhoferschen Linien, die auf einem weißen über

1) a. a. O., 41. S. 454. 1913. Figur.

2) Die Verwendung von Spektralbezirken mit breiteren Fraunhoferschen Linien wurde vermieden.

und unter der Kästchenöffnung angebrachten vertikalen Millimeterstab deutlich genug, wenn auch infolge der Spaltweite nicht in vollkommenster Schärfe, sichtbar waren. Es hatte sich ergeben, daß der auf diesen Maßstab gemessene Abstand dieser Linien voneinander genügend genau dem Unterschied ihrer Wellenlängen proportional war, um aus der jeweils beobachteten Lage einer Fraunhoferschen Linie auf der Teilung mit einer für unsere Zwecke hinreichenden Sicherheit die Wellenlänge der das NaCl beleuchtenden Strahlung entnehmen zu können. Einer Wellenlängendifferenz von 100 $\mu\mu$ entsprachen 26,5 cm auf dem Maßstab.

Die Messung der Stromstärke geschah wieder durch Beobachtung der eine Sekunde nach Anlegen der Ladung auftretenden 10 bzw. 15 Sekunden dauernden Elektrometerausschläge bei geladener NaCl-Platte. Die gewünschte jedesmalige Beleuchtung wurde von einem Gehilfen durch Einstellen des Gitters erhalten; sie dauerte nur wenige Sekunden länger als der Elektrometerausschlag, so daß die Platte sich im Dunkeln befand, während die Beleuchtung wechselte, wozu auch nur einige Sekunden Zeit nötig waren. Infolgedessen folgten die einzelnen Bestimmungen rasch aufeinander, was in Anbetracht der leicht vorkommenden Veränderungen der Sonnenintensität usw. erwünscht war. Über den Verlauf jedes einzelnen Versuches sei folgendes mitgeteilt. Zu Anfang des Versuches befand sich die geerdete Platte in ihrem verdunkelten Kästchen. Dann wurden der Reihe nach folgende Operationen ausgeführt: Einstellen des Gitters für die gewünschte Beleuchtung und Bestimmung der Lage einer Fraunhoferschen Linie auf der Millimeterteilung. — Freimachen der Kästchenöffnung. — Ablesen des Elektrometers und Anlegen der Spannung an die Platte. Eine Sekunde später Abtrennen der Erdleitung von der Quadranten-Plattenleitung. — 10 bzw. 15 Sek. nachher zweites Ablesen des Elektrometers. — Anlegen der Erdleitung an die Quadranten-Plattenleitung und an die obere Plattenbelegung. — Verdunkelung der Platte.[1]) Am Anfang und am Ende einer Beobachtungsreihe oder auch manchmal zwischendurch wurden Bestimmungen des Polarisationsstromes mit beleuchteter Platte

1) Bei späteren Versuchen wurde etwas anders verfahren (vgl. S. 181).

und ebenso des bei geladener, verdunkelter Platte sich ergebenden „Dunkelstromes" gemacht.

Von solchen Versuchsreihen sei zunächst zur Orientierung eine mit etwas größerer Sorgfalt angestellte mitgeteilt. Die benutzte Platte hatte eine Dicke von 0,5 cm und eine Größe von 8 : 8 cm; über die Größe ihrer aus Graphit bestehenden Belegungen fand ich nichts Genaues mitgeteilt. Sie war bereits zu einigen Vorversuchen verwendet, wurde aber ein Tag vor dem in Rede stehenden Versuch nochmals 15 Minuten lang einer X-Bestrahlung ausgesetzt und gleich darauf in ihrem verdunkelten Kästchen untergebracht. Die Ladung betrug bloß ungefähr 200 Volt. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse dieses Versuches enthalten.

Tabelle XV.

Wellenlg. λ in $\mu\mu$	716	693	670	647	624	597	577	558	549	538	530	519
Elektrom.-Ausschl. in 15 Sek.	1,3	1,5	1,8	2,3	2,4	4,4	9,2	18,2	27,2	42,2	70	80
Polarisationsstrom	—	0,0	—	—	—	0,2	—	0,6	—	—	2,5	—
Dunkelstrom	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Wellenlg. λ in $\mu\mu$	511	500	491	481	473	462	454	443	424	405	367	348
Elektrom.-Ausschl. in 15 Sek.	102	122	132	137	120	117	113	77	50	24	5	2
Polarisationsstrom	—	5	4	3	4	5,5	3,5	—	—	—	—	5
Dunkelstrom	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,4

Die Werte der Wellenlängen λ und der Stromstärken S, letztere nach Korrektion für Polarisations- und Dunkelstrom, wurden auf Koordinatenpapier eingetragen und durch die so erhaltenen Punkte eine glatte Kurve gelegt, was nicht ohne einige Willkür geschehen konnte; in der Fig. 11 auf S. 171 findet man ein verkleinertes Bild dieser Kurve. Aus dieser Darstellung und aus der Tabelle konnten folgende Tatsachen entnommen werden. 1. Das X-bestrahlte Steinsalz ist für einen großen Bereich der Strahlen des Sonnenspektrums empfindlich. Wegen des verhältnismäßig großen Betrages von Polarisationsstrom und Dunkelstrom bei $\lambda = 367\,\mu\mu$ bzw. $348\,\mu\mu$ kann über das Verhalten des ultravioletten Lichtes keine weitere Angabe gemacht werden, als daß dessen Wirkung jedenfalls sehr gering ist. Vom Gitter wird etwas weißes Licht diffus reflektiert; die Menge, die davon zu der Platte gelangte, war jedenfalls

sehr gering. Immerhin wäre es möglich, daß die bei den größten und bei den kleinsten Wellenlängen erhaltenen kleinen Ausschläge dadurch verhältnismäßig stark beeinflußt worden sind. Ob die mit dem dunkelroten Teil des Spektrums erhaltenen kleinen Werte von den ultravioletten Strahlen des Spektrums zweiter Ordnung eventuell beeinflußt sind, muß unentschieden bleiben. 2. Eine besonders stark ausgesprochene maximale Wirkung auf die L.-F. üben Strahlen aus, deren Wellenlänge in der Nähe von 480 $\mu\mu$ liegt.

Es müssen nun insbesondere mit Rücksicht auf das Folgende zunächst die Fehlerquellen und Störungen angegeben werden, welche das Resultat dieser Versuche beeinflussen können, damit man sich über die Ursache der in der Figur hervortretenden Unregelmäßigkeiten, sowie über den Grad der Zuverlässigkeit und Verwendbarkeit einer einzelnen Versuchsreihe ein Urteil bilden kann.

Gegen die Verwendung von Sonnenlicht in der angegebenen Weise lassen sich manche Bedenken erheben, die sich auch im Laufe der Untersuchung, als sich die Ansprüche an die Genauigkeit der Ergebnisse gesteigert hatten, geltend gemacht haben. Vor allen Dingen ist in dieser Beziehung die zeitliche Veränderlichkeit der Intensität der Strahlung zu erwähnen, die nicht allein durch die Verschiedenheit der Sonnenhöhe zu verschiedenen Tages- und Jahreszeiten und durch den entsprechend verschiedenen Einfallswinkel des Lichtes am Heliostatenspiegel bedingt ist, sondern namentlich auch herrührt von Veränderungen in dem Zustand der Atmosphäre. Wenn Wolken am Himmel standen, wurden natürlich keine Versuche gemacht, aber auch leichte, kaum oder nicht sichtbare Schleier, sei es von Rauchteilchen oder von Nebel, übten häufig einen sehr störenden Einfluß aus. Und nicht nur die gesamte Intensität der Strahlung, sondern auch das Verhältnis der Intensitäten der einzelnen Spektralbezirke untereinander ist infolge der angegebenen Ursachen einem möglichen Wechsel unterworfen. Schließlich dürfte man, wenn der Wunsch vorliegen sollte, genauere Bestimmungen als die hier gebotenen anzustellen, nicht übersehen, daß die Zusammensetzung des Sonnenlichtes bei der Reflexion am Heliostatenspiegel eine Veränderung erfährt.

Nun hätte diesen Übelständen wenigstens bis zu einem gewissen Grade wohl abgeholfen werden können durch die Kon-

struktion und Aufstellung von Apparaten zur zeitlichen Verfolgung der Intensität und der Zusammensetzung der auf die Platte fallenden Sonnenstrahlung; allein zu diesem immerhin etwas umständlichen Mittel haben wir uns vorläufig noch nicht entschließen können. Ein anderer gangbarer Weg wäre gewesen, die Sonne durch eine konstante Strahlenquelle zu ersetzen, und im folgenden wird auch das Ergebnis einer Versuchsreihe mitgeteilt, die mit einer Nernstlampe und einem Rutherfordprisma angestellt wurde und zur Kontrolle der anderen Versuche sehr nützlich war; aber die überwiegende Anzahl von Versuchen wurde doch mit Sonnenlicht ausgeführt. Zu den Unvollkommenheiten in der Versuchsanordnung gehört noch, daß unser Heliostat trotz guter Vorbereitung manchmal nicht so tadellos arbeitete, daß die Richtung des das Gitter treffenden Strahlenbündels während einer Versuchsreihe ganz unverändert blieb, was dann leicht eine so beträchtliche Änderung der Intensität des Spektrums zur Folge hatte, daß die angefangene Versuchsreihe als unbrauchbar verworfen werden mußte. Die Breite des Spektrums am Ort der NaCl-Platte betrug wenigstens bei den letzten Versuchen ungefähr 2,5 cm, die Breite des wirksamen, beleuchteten Teiles der Platte schwankte zwischen etwa 1,0—1,3 cm und da nun die Intensität in der Querrichtung des Spektrums nicht überall die gleiche war, mußte darauf achtgegeben werden, daß die durch Drehung des Gitters bewirkte Verschiebung des Spektrums möglichst genau parallel seiner Längsausdehnung geschah. Ob auch das Intensitätsverhältnis der verschiedenen Wellenlängen untereinander durch die Drehung des Gitters keine Veränderung erlitt, mußte unentschieden bleiben. Auch muß noch erwähnt werden, daß bei der bei später zu beschreibenden Versuchen mehrmals stattgefundenen Verwendung der Glyzerinelektrode die Beleuchtung der darunter liegenden NaCl-Platte infolge der kapillaren Erhebungen an der Wand des Glaströgchens und an dem in der Mitte eingetauchten Platindraht keineswegs eine gleichförmige sein konnte, was zwar für eine Vergleichung der Ergebnisse einer Versuchsreihe untereinander von keiner wesentlichen Bedeutung war, was aber nicht übersehen werden dürfte, wenn Vergleiche über die Größe der bei verschiedenen Versuchsreihen beobachteten lichtelektrischen Wirkungen gemacht werden sollten.

Die durch die Umstände gebotene, nicht ganz einwandfreie Aufstellung des Rowlandschen Gitters und die Weite des Spaltes verhinderten das Zustandekommen eines möglichst reinen Spektrums, doch halte ich den hieraus entspringenden Fehler wenigstens mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck der Arbeit für unbedenklich. Die Hauptlinien des Spektrums waren, wie oben erwähnt, wenn auch nicht von erreichbarer Schärfe, so doch immer sehr deutlich erkennbar. Bei einer eventuellen Fortsetzung der Untersuchung würde es sich aber doch gewiß lohnen mit vollkommeneren Mitteln überhaupt, namentlich was die Beleuchtung anbetrifft, zu arbeiten. Die bei der vorliegenden Arbeit angewendete Versuchsanordnung hat aber, trotz ihrer Mängel, genügt, um einige bemerkenswerte Tatsachen festzustellen.

Eine weitere, unter Umständen recht bedeutende Unsicherheit wird in die Resultate hineingebracht durch folgende, zum Teil schon früher besprochene Erscheinungen.

1. Oben wurde bereits erwähnt, daß die Lichtempfindlichkeit des X-bestrahlten NaCl mit der Zeit abnimmt und zwar in beschleunigtem Maße, wenn eine Beleuchtung stattfindet. Infolgedessen werden bei einer Versuchsreihe die späteren Werte der L.-F. gegen die früheren zu klein gefunden werden müssen. Diesen Einfluß der Zeit haben wir zu verringern gesucht durch möglichste Abkürzung der Beleuchtungszeit und der Versuchszeit überhaupt, sowie durch sofortige Wiederholung einer Versuchsreihe aber in umgekehrter Richtung, was die Reihenfolge der benutzten Lichtarten anbetrifft. Auch schien es vorteilhaft, eine kräftig X-bestrahlte Platte und zwar etwa ein oder zwei Tage nach ihrer Bestrahlung zu benutzen.

2. Es hat sich, wie noch an anderer Stelle mitgeteilt werden wird, bei vielen Versuchen ergeben, daß eine Beleuchtung mit Licht kleinerer Wellenlänge nachträglich auf die L.-F. des X-bestrahlten NaCl bei nachfolgender Beleuchtung mit Licht größerer Wellenlänge sehr merklich erhöhend wirkt.[1]) Auch diese Erhöhung verliert sich wieder mit der Zeit, ist aber unter Umständen noch viele Stunden nach jener Belichtung zu spüren. Bei den Versuchen über die Abhängigkeit der Licht-

1) Ob auch Wellen größerer Länge die Wirkung einer nachfolgenden Beleuchtung mit kleinerer Wellenlänge beeinflussen, konnte nicht mit Sicherheit festgestellt werden.

empfindlichkeit von der Wellenlänge wird man somit mit Licht größter Wellenlänge den Anfang machen.

Man wird aber auch wegen der mit der Zeit bald verschwindenden „Nachwirkung von hell auf dunkel" (vgl. S. 88) darauf achten müssen, daß die NaCl-Platte in der Zwischenzeit zwischen ihrer X-Bestrahlung und dem ersten Beleuchtungsversuch möglichst wenig dem Licht ausgesetzt und längere Zeit dunkel gehalten wird. Da diese vermehrende Wirkung hauptsächlich dem wirksamsten, also bei NaCl den blaugrünen Strahlen zukommt, wurde wenigstens bei den späteren Versuchen bei dem auf die X-Bestrahlung folgenden Einsetzen der Platte in das Kästchen eine rote Lampe, wie sie zu photographischen Zwecken gebraucht wird, verwendet. Auch sei noch bemerkt, daß, wenn zwei Versuchsreihen der angegebenen Art kurz hintereinander gemacht wurden, die zweite sicher von der bei der ersten verwendeten Beleuchtung mehr oder weniger beeinflußt war.

3. Es hatte sich, wie schon oben bemerkt, herausgestellt, daß nicht nur eine vorhergegangene Beleuchtung auf die L.-F. einer verdunkelten X-bestrahlten Platte in mit der Zeit abnehmendem Maße verstärkend nachwirkt, sondern, daß eine NaCl-Platte auch schon allein infolge einer stattgefundenen X-Bestrahlung eine zeitlich ähnlich verlaufende Vermehrung ihrer L.-F. im Dunkeln aufweist. Diese Einflüsse, die sich im „Dunkelstrom" äußern, bleiben nun während eines Versuches mit aufeinanderfolgender Beleuchtung mit Licht verschiedener Wellenlänge nicht unverändert, weil sie, abgesehen von der eben erwähnten zeitlichen Abnahme, durch jede neue Beleuchtung geändert werden. Es fragt sich nun, wie dieser nach jeder bei einer mit Licht einer gewissen Wellenlänge angestellten Strommessung bestimmte Dunkelwert verwendet werden muß, um den Einfluß der betreffenden Lichtart auf die L.-F. zu erhalten. Bei der Unkenntnis des Vorganges, den wir Strom nannten, ist es nicht ohne weiteres sicher, daß man, um diesen alleinigen Einfluß richtig zu erhalten, einfach den als Dunkelwert erhaltenen Elektrometerausschlag von dem bei der folgenden Beleuchtung erhaltenen subtrahiert. In Ermangelung eines besseren wurde aber doch sehr häufig in dieser Weise verfahren.

4. Aus dem im Vorhergehenden Besprochenen ist zu entnehmen, daß jeder Strom eine Polarisation zur Folge hat. Man

wird deshalb bei den in Rede stehenden Versuchen von Zeit zu Zeit oder auch jedesmal einem Versuch mit bestimmter Lichtart eine Bestimmung der Polarisation während der Beleuchtung folgen lassen. Dazu wurde bei manchen Versuchen in früher angegebener Weise 1 Sek. nach der vorgenommenen Entfernung der Ladespannung die Erdleitung des Elektrometers aufgehoben und der darauf in 15 Sek. entstehende Ausschlag beobachtet. Nun fragt sich ja wieder, wie ist dieser Einfluß in Rechnung zu ziehen, um den richtigen Lichteinfluß auf die L.-F. zu erhalten; das Superpositionsgesetz veranlaßt dazu den Polarisationsstrom zu dem Ladestrom einfach zu addieren, um den gewünschten Betrag der Lichtwirkung wenigstens einigermaßen richtig zu erhalten. Bei anderen Versuchen wurde der Polarisationsfehler in etwas anderer Weise berücksichtigt (vgl. S. 171 u. 181, blaues NaCl). Auch der Dunkelstrom ist von etwas Polarisation begleitet und deshalb wurde in einigen Fällen auch seine Polarisation gemessen und berücksichtigt.

5. Mit „Erholung" wurde die oben gefundene Tatsache bezeichnet, daß eine Verdunklung einer dauernd geladenen Platte die L.-F. wieder heraufsetzt. Kurz dauernde Verdunklungen wirken entsprechend nur wenig und deshalb wollen wir ohne Bedenken annehmen, daß die bei den in Rede stehenden Versuchen zur Bestimmung des Dunkelstromes während 15 Sek. vorgenommene Abblendung der Beleuchtung keinen wesentlichen Einfluß auf das Resultat einer Versuchsreihe ausgeübt haben wird, wenn in der gleich unten anzugebenden Weise verfahren wurde, und wenn, was der Fall ist, die einzelnen bei einer solchen Reihe erhaltenen Ergebnisse nur untereinander verglichen werden sollen.

Ebenso konnte die „Ermüdung", die bei Beleuchtung der stromliefernden Platte auftritt, nicht besonders beobachtet werden. Der Fehler, den „Erholung" und „Ermüdung" in das Gesamtergebnis einer Versuchsreihe hineinbringt, wird jedenfalls sehr vermindert werden, wenn man bei einer solchen Reihe die Spektralfarben einmal in der Folge von größeren zu kleineren Wellenlängen und gleich darauf in der umgekehrten Folge verwendet und nachher die auf beiden Wegen gefundenen Werte miteinander kombiniert, ein Verfahren, das wir schon unter 1. aus anderen Gründen als nützlich erkannten, und das

natürlich dazu beiträgt, auch den Einfluß der übrigen Fehlerquellen zu vermindern.

6. Schließlich muß wiederholt noch als Quelle von Unsicherheiten angegeben werden, daß die Elektrometerablenkungen wieder meistens am bewegten Lichtzeiger der Nadel beobachtet wurden, und weiter, daß die genau einzuhaltende Dauer eines solchen Ausschlages nur 10 bzw. 15 Sek. betrug.

In Anbetracht aller dieser Fehlerquellen wird man gut tun, das gewonnene Beobachtungsmaterial wenigstens hauptsächlich nur *zur Erledigung der meines Erachtens zunächst auch wichtigsten Frage nach der Lage der maximalen lichtelektrischen Wirkung im Gebiet der Wellenlängen* zu verwenden. Diese Aufgabe dürfte, wie wir sehen werden, auch eine befriedigende Lösung gefunden haben.

Es folgt die Mitteilung von Versuchen, bei denen die Steinsalzplatte mit Rücksicht auf eine andere noch zu erledigende Aufgabe, von der später die Rede sein wird, etwas anders vorbereitet war als bisher beschrieben. Die 1,6 : 1,7 : 0,24 cm große, 60 Minuten lang X-bestrahlte Platte war auf ihrer oberen Seite ganz mit Graphit bedeckt, auf ihrer unteren Seite dagegen an zwei in der Richtung der Beleuchtung hintereinander gelegenen Stellen (I, II der nebenstehenden Fig. 4) mit 1,2 : 0,7 cm großen Graphitbelegungen und Schutzringen versehen. In der früher beschriebenen Weise wurde sie in einem der an der Blechkammer befestigtem Kästchen aufgestellt; ihre obere Belegung konnte eine Ladung von 500 Volt erhalten, und je eine der unteren Belegungen stand, mit der anderen abwechselnd, mit der Elektrometerleitung bzw. mit der Erde in Verbindung, so daß jede der beiden Stellen rasch nacheinander auf ihre L.-F. bei Beleuchtung mit einer bestimmten Lichtart geprüft werden konnte. Die dabei eingehaltene Reihenfolge der Benützung der beiden Teile war: I, II, I; als Stromstärke (S_1) in I galt das Mittel aus der ersten und der dritten dieser Messungen. Die folgende Tab. XVI enthält diese Werte.

Fig. 4.

Nachdem die Aufstellung der Platte in der Weise geändert worden war, daß nunmehr das wirksame Licht in der umgekehrten Richtung (von II nach I) verlief, erhielt man mit ihr die Resultate der Tab. XVII.

Tabelle XVI.

Wellenlänge λ	550	512	493	473	454	434	415	395	376	395	415	434	454	473	493	512	531	550	567
Dunkelstrom	1,7	2,0	3,0	3,0	4,0	4,0	4,1	4,2	4,2	4,4	4,6	4,6	4,6	4,7	4,7	4,8	4,8	5,0	5,0
Polarisationsstrom	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,9	3,3	3,7	4,1	4,5	4,5	4,5	4,5
beob. Stromstärke S_I	9,7	42,5	81,0	93	81,5	55	28	16,7	6,4	16,2	27,3	46,2	70,3	77,8	73,3	51,5	34,0	21,4	14,7
korrig. Stromstärke S_I'	8,0	41,0	79,0	91,5	79,5	53,5	26,4	15,0	4,7	14,3	25,4	44,5	69	76,8	72,7	51,2	33,7	20,9	14,2
Dunkelstrom	1,7	2,0	3,0	3,0	4,0	4,0	4,1	4,2	4,2	4,4	4,5	4,6	4,6	4,7	4,7	4,8	4,8	5,0	5,0
Polarisationsstrom	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,0	3,0	3,0
beob. Stromstärke S_{II}	9,0	34,5	57	61	55	40	22,5	15	6,3	14,5	22,5	34,5	50	56	59,5	47	32,5	21,0	14,7
korrig. Stromstärke S_{II}'	7,3	32,8	54,6	58,9	52,2	37,5	19,9	12,3	3,6	11,6	19,5	31,7	47,5	53,7	57,5	45,2	30,7	19,0	12,7
$100 \cdot \frac{S_I' - S_{II}'}{S_I'}$	9	18	31	36	34	30	25	18	23(!)	19	23	29	31	30	21	12	9	9	11(!)
E	72	66	61	55	48	38	29	20	12	20	29	38	48	55	61	66	70	72	72
$100 \cdot \frac{S_I'}{E}$	11	62	130	166	166	141	91	75	39	72	88	117	144	140	118	78	48	29	20

Tabelle XVII.

Wellenlänge λ	586	544	501	459	416	374	395	416	438	459	480	501	523	544	566
Dunkelstrom	1,2	2,1	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,6	3,6
Polarisationsstrom	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,5	1,6	1,9	2,2	2,3	2,5	2,8	3,0	3,0
beob. Stromstärke S_{II}	4,0	14,6	59,0	71,0	21,0	4,0	9,2	20,3	43,3	62,5	52,0	44	28	15,7	8,8
korrig. Stromstärke S_{II}'	2,8	12,8	56,6	68,9	19,1	2,3	7,5	18,6	41,9	61,3	50,9(!)	43	27,3	15,1	8,2
Dunkel- und Polarisationsstrom wie oben															
beob. Stromstärke S_I	4,5	13,8	48	51	17,7	4	8,8	18,2	33,7	47	36	38	25,5	15,1	8,9
korr. Stromstärke S_I'	3,3	12,0	45,6	48,9	15,8	2,3	7,1	16,5	32,3	45,8	34,9[1])	37	24,8	14,5	8,3
$100 \cdot \frac{S_{II}' - S_I'}{S_{II}'}$	0	6	20	30	17	0	5	11	23	25	31 (!)	14	9	4	0

1) Wohl infolge eines Versehens beim Versuch fallen die beiden S-Werte dieser Kolumne, wie insbesondere die Kurven zeigen, ganz aus der Reihe der andern heraus; sie werden im folgenden nicht weiter berücksichtigt.

Zu diesen Tabellen sei zunächst folgendes kurz bemerkt: Die verschiedenen Lichtarten kamen in der Reihenfolge zur Verwendung, wie sie in den Tabellen von links nach rechts gelesen, angegeben ist. Die Bestimmung des Dunkelstroms wurde nicht regelmäßig vor jedem Beleuchtungsversuch, sondern nur von Zeit zu Zeit vorgenommen und die übrigen Werte durch Interpolation berechnet; gleiches ist von dem Polarisationsstrom zu sagen. Die in dieser Beziehung verbleibende Unsicherheit hat aber für die Beantwortung der Frage nach der Lage der maximalen L.-F. auf die Wellenlängenskala keine wesentliche Bedeutung gehabt. Natürlich sind wieder die kleineren Werte der Stromstärke mit Vorsicht zu verwenden.

Die Werte der von den vier Beobachtungsreihen gelieferten korrigierten Stromstärken (S_1', S_{11}' der Tabelle) wurden wieder mit den zugehörigen Wellenlängen auf Koordinatenpapier eingetragen und zur Konstruktion von λ,S-Kurven verwendet. Sie sind mit diesen

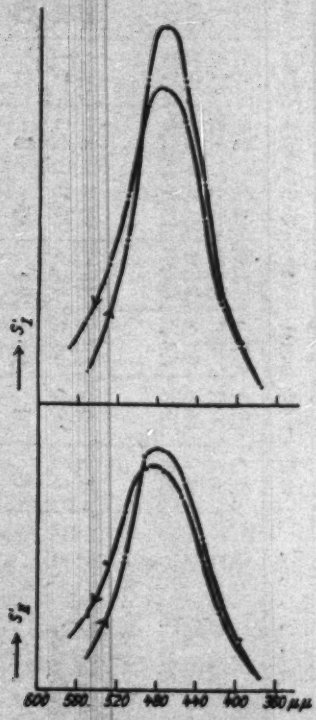


Fig. 5a u. b.

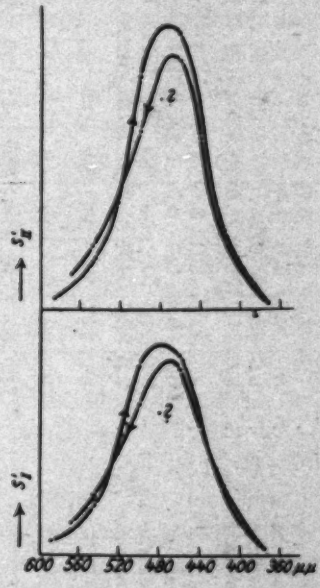


Fig. 6a u. b.

Kurven zur Veranschaulichung des Versuchverlaufes in kleinerem Maßstab als die wirklich gebrauchten in den Figg. 5a, b

und 6a, b dargestellt; für die Beantwortung der Frage nach der Lage der maximalen Lichtwirkung wurden drei- bis vierfach größere Darstellungen verwendet.

Nehmen wir nun noch die Kurve der Fig. 11, die die Ergebnisse des beschriebenen ersten Versuchs mit spektralzerlegtem Licht enthält, hinzu, so erkennt man trotz einzelner aus der Zeichnung am besten zu entnehmenden Unregelmäßigkeiten, daß in allen neun Fällen ein ausgeprägtes, nahezu an der gleichen Stelle auf der Wellenlängenachse gelegenes Maximum der lichtelektrischen Wirkung gefunden wurde. Die Kurven sind freilich, namentlich in ihrem obersten Teil, nicht ohne einige Willkür gezogen, doch konnte ich den wegen Raumersparnis hier nicht wiedergegebenen, in größerem Maßstab ausgeführten Zeichnungen mit genügender Sicherheit entnehmen, daß die Maxima bei folgenden Wellenlängen liegen.

Aus der Kurve nach:

Tab. XV	Tab. XVI	Tab. XVII
$\lambda_{max.} = 480$	477, 473·477, 485	474, 465·479, 472 $\mu\mu$

Es ist noch zu beachten, daß die beiden extremen Werte den in ihren obersten Teilen unsichersten Kurven entnommen wurden.

Eine weitere, zu dem gleichen Zweck ausgeführte Versuchsreihe verdient noch mitgeteilt zu werden. Bei ihr kam das prismatisch zerlegte Licht einer Nernstlampe zur Verwendung und waren auch sonst noch einige andere Versuchsanordnungen getroffen. So fand z. B. die Beleuchtung der Platte nicht von der Seite, sondern durch eine Glyzerin-Salzelektrode von oben statt. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle enthalten und wieder in kleinerem Maßstab in der Fig. 7 dargestellt.

Bei einem Vergleich mit den vorhin besprochenen Kurven fällt die Form und die Lage der Kurve, insbesondere die des im Gebiet der kleineren Wellenlängen gelegenen Teiles auf. Dieser Unterschied kann seinen Grund vielleicht in einer Verschiedenheit der Versuchsanordnungen haben; jedenfalls aber ist er mitbedingt durch die Verschiedenheit der Energieverteilung im prismatischen Spektrum des Nernstlichtes und

Tabelle XVIII.

Wellenlänge λ in $\mu\mu$	430	435	445	455	470	490	525	570	625	695	785
Elektrometerausschlag in 10 Sek. Stromstärke S	8,0	11,8	22,8	50	98	152	169	106	36,2	18,0	10,3
Polarisationsstrom P	0,6	0,4	0,8	2,5	6,0	12,0	11,8	7,2	1,7	0,8	0,2
Dunkelstrom D	7,0	9,8	8,7	8,0	9,0	13,0	13,5	9,1	8,1	10,7	8,4
Dunkelstrompolarisationsstrom p	—	—	—	—	—	—	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4
$S+P-D-p=S'$	1,6	2,4	14,9	44,5	95	151	166,7	108,8	24,4	7,7	1,7
E	0,9	1,35	2,1	3,8	7,1	14,5	31,8	74,3	189	210	—
$\frac{S+P-D-p}{E}=\frac{S'}{E}$	1,8	1,8	7,1	12,0	13,3	10,4	5,1	1,4	0,15	0,015	—

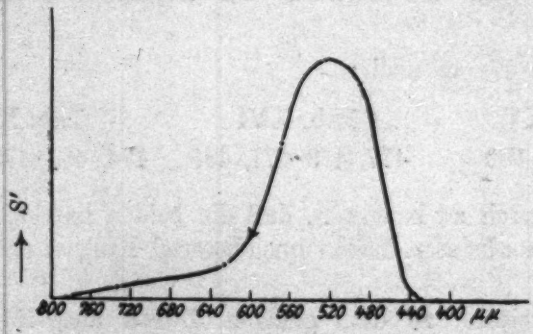


Fig. 7.

im Gitterspektrum des Sonnenlichtes. Eine Gelegenheit den erstgenannten Einfluß zu prüfen, war bis jetzt nicht vorhanden; dagegen ist über den Einfluß der verschiedenen Energieverteilung folgendes mitzuteilen.

Aus den Werten der Tab. XVIII und aus der entsprechenden Kurve ist zu entnehmen, daß das Maximum der Lichtwirkung bei $\lambda = \pm 510\ \mu\mu$ liegt, während es bei den Versuchen mit dem Gitterspektrum in der Nähe von $\lambda = 475\ \mu\mu$ gefunden wurde. Um zu erfahren, inwieweit diese beiden Ergebnisse miteinander in Übereinstimmung sind, ist es nötig, daß man vorher die in beiden Fällen gefundenen Stromstärken auf gleiche Energiemengen reduziert. Für die relative Verteilung im Sonnenspektrum wurden dazu die Werte

Langleys (vgl. die zweitunterste Reihe der Tab. XVI) benutzt.[1]) Die relative Energieverteilung im prismatischen Spektrum wurde mit einer Thermosäule gemessen und dafür die in der vorletzten Reihe der Tab. XVIII angeführten Werte gefunden. Die letzten Reihen der Tabellen enthalten die gewünschten reduzierten Werte der Stromstärken ($S_1:E$); mit ihrer Hilfe wurden die für eine Übersicht geeigneten Figg. 8a und 8b erhalten. Aus den in größerem Maßstab angefertigten Kurven entnahm ich nun folgende Werte der Wellenlänge für die maximale auf gleiche zugeführte Energie bezogene lichtelektrische Wirkung:

Für das prismatisch zerlegte Nernstlicht etwa 462 $\mu\mu$.

Für das normale Sonnenspektrum etwa 460 bzw. 464 $\mu\mu$.

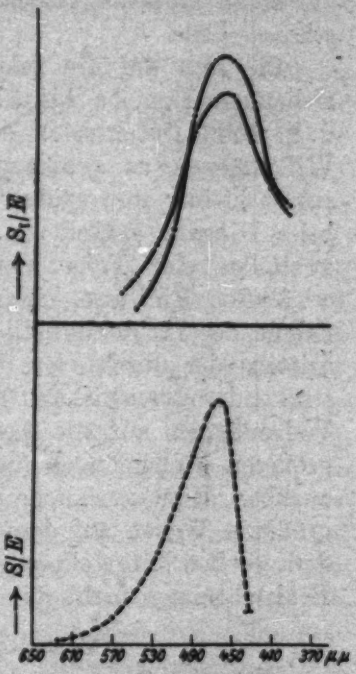


Fig. 8a u. b.

Somit stehen trotz der etwas verschiedenen Kurvenform auch die Ergebnisse der Versuche mit prismatisch zerlegtem Licht in sehr befriedigender Übereinstimmung mit den übrigen, und wenn ich noch angebe, daß auch spätere Versuche (vgl. S. 172) zu demselben Wert für $\lambda_{max.}$ führten, so darf ich es wohl als eine recht erfreuliche Errungenschaft bezeichnen, daß sich trotz aller vorhandenen Nebeneinflüsse und Fehlerquellen, die einem die Arbeit manchmal verleidet haben, aus den mit Zwischenräumen von manchen Jahren mit den verschiedensten Steinsalzpräparaten und mit verschiedenen Anordnungen angestellten Versuchen doch das übereinstimmende Resultat ergeben hat, daß *die maximale lichtelektrische Wirkung*

1) Angenommen wurde, was freilich nicht ohne weiteres einwandfrei ist, daß die Energieverteilung in dem auf die Platte fallenden Sonnenlicht dieselbe war, wie in dem von Langley untersuchten (vgl. das auf S. 119 Gesagte). Die Versuche wurden im Monat Juli gegen die Mittagstunde gemacht.

auf X-bestrahltes Steinsalz in einem ziemlich eng begrenzten, bei 475 μμ gelegenen Wellengebiet des Gitterspektrums des Sonnenlichtes zu suchen ist. Auf Grund des Ergebnisses der soeben ausgeführten Reduktion der Stromstärken auf gleiche zugeführte Lichtenergiemengen läßt sich noch weiter aussagen, *daß man die größte Wirkung bei λ = etwa 463 μμ finden würde, wenn man bei einem gedachten Versuch alle im Sonnenlicht, oder auch in dem Licht der Nernstlampe vorhandene Lichtarten durch eine passende Änderung ihrer Intensität auf gleiche Energie gebracht hätte.*

Die sich auf die zuletzt mitgeteilten Versuchsreihen beziehenden Figg. 4a bis 5b zeigen, daß die beim Rückgang, d. h. beim Durchlaufen der Wellenlängenreihe von kleineren Wellenlängen zu größeren für die L.-F. erhaltenen Werte zuerst kleiner und später größer sind als die entsprechenden beim Hingang gefundenen. Diese auffallende Erscheinung ist zweifellos eine Folge von dem Zusammenwirken der oben erwähnten Einflüsse, einmal der selbständigen zeitlichen Abnahme der Lichtempfindlichkeit, zweitens der Ermüdung und drittens der durch viele Versuche besonders bestätigten verstärkenden Nachwirkung[1]), die die Beleuchtung mit kleineren Wellenlängen auf die L.-F. bei folgender Beleuchtung mit größeren Wellenlängen (und auch auf die L.-F. im Dunkeln) ausübt. Eine merkliche Verschiebung des Maximums nach größeren Wellen auf dem Rückgang, die man vielleicht nach dem soeben Mitgeteilten erwarten könnte, läßt sich aus den Beobachtungen nicht mit Sicherheit entnehmen.

Verhalten anderer Körper.

Bei der Prüfung einer Anzahl von festen Substanzen ergaben sich einige, die sich ähnlich wie NaCl verhielten, d. h. nach stattgefundener X-Bestrahlung bei Beleuchtung eine größere L.-F. aufwiesen als im Dunkeln. Es sind dies Sylvin, Flußspat und gewöhnliches Geräteglas. Die nicht mit

1) Es wurde von Goldstein (Berl. Ak. 1895, S. 469) beobachtet, daß die Färbung von kathodenbestrahltem NaCl durch Licht verändert werden kann; ob diese Erscheinung mit der oben erwähnten zusammenhängt, muß vorläufig unerörtert bleiben. Eigene Versuche über diese „Bleichfarben", sowie über das Verhalten von Gieselpräparaten und über Thermoluminiszenz haben noch zu wenig abschließende Ergebnisse geliefert. um veröffentlicht werden zu können.

gleicher Ausführlichkeit wie beim NaCl gemachten Versuche ergaben für X-bestrahlten Flußspat ein Maximum der Lichtempfindlichkeit bei ungefähr 500 $\mu\mu$, für X-bestrahltes Sylvin bei ungefähr 560 $\mu\mu$, wenn die Beleuchtung mit dem Gitterspektrum des Sonnenlichtes vorgenommen wurde. Die einzelnen Beobachtungen hier wiederzugeben, halte ich nicht für erforderlich, und gebe statt dessen in Fig. 11 nur ein Bild von dem Verlauf der mit Sonnenlicht bei Sylvin erhaltenen λ,S-Kurve, das unten zu einer weiteren Besprechung noch verwendet werden soll.

Von den Körpern, die nach vorläufiger Untersuchung die Eigenschaft des NaCl nicht merklich zeigten, nenne ich nur Kalkspat und Quarz. Das so verschiedene Verhalten von den beiden Kalziumverbindungen regt besonders dazu an, nach Beziehungen zwischen chemischer Konstitution und der Eigenschaft durch X-Bestrahlung aktiv werden zu können, zu suchen. Ob der Angriff der X-Strahlen, der die Bildung von lichtempfindlichen Na- oder Cl-Teilchen im NaCl zur Folge hat, sich primär gegen die Na- oder gegen die Cl-Atome richtet, ist fraglich; daß sie sich dazu beigemengte, gelöste fremde Substanzen wählen sollte, halte ich nach allem, was man an X- oder Ra-bestrahltem NaCl beobachten kann, für unwahrscheinlich, aber nicht für ganz ausgeschlossen. Von Interesse wäre es gewesen, zu erfahren, wie sich kolloidale Na-Lösungen in nicht leitenden, flüssigen Medien verhalten. Zur Erledigung der angeregten Untersuchungen habe ich bis jetzt keine Gelegenheit gehabt; es liegen nur Vorversuche vor, die keine Entscheidung gebracht haben. Dagegen fand eine ausführliche Untersuchung über das Verhalten von natürlich blau gefärbtem NaCl statt, über die weiter unten berichtet wird.

Über einen einfachen Demonstrationsapparat.

Für eine bloße Demonstration der aufgefundenen Wirkung der X- und Lichtstrahlen und auch für eine weniger eingehende Prüfung von Substanzen auf ihr Verhalten genügt folgende, wesentlich einfachere Vorrichtung. Auf die die Aluminiumblättchen tragende Stange eines Exnerschen Elektroskopes, wie es zu luftelektrischen Messungen verwendet wird, ist eine etwas federnde Klemme aus Metall angebracht, in die ein Plättchen oder Stäbchen — es genügen oft Stückchen von wenigen Millimeter Größe — der zu untersuchenden Substanz

befestigt wird. Mittels einer zweiten Klemme wird über der ersten eine Erdleitung an das Plättchen befestigt, so daß zwischen beiden Klemmen ein schmaler Streifen des Körpers für eine intensive, von der Seite einzuleitende Beleuchtung frei bleibt. Das Ganze wird in einer zur Erde abgeleiteten lichtdichten, kleinen Hülle untergebracht, deren Luftinhalt durch das im Elektroskop angebrachte Trockenmittel von Feuchtigkeit befreit wird. Man beobachtet nun die Zeiten, die für einen bestimmten Spannungsabfall des Elektroskops nötig sind, einmal bei verdunkelter und dann bei beleuchteter Substanz. Mit dieser Vorrichtung läßt sich z. B. die Lichtempfindlichkeit von X-bestrahltem und von gefärbtem NaCl sehr deutlich demonstrieren, namentlich nach plötzlich eingetretener Beleuchtung, wo aus begreiflichen Gründen die Bewegung der Elektroskopblättchen am raschesten ist.

Mit diesem einfachen Apparat habe ich sogar einige Tatsachen gefunden, die die mitgeteilten Beobachtungen etwas ergänzen können. Es ließ sich z. B. feststellen, daß alle nach Giesel und Siedentopf hergestellten, künstlich gefärbten NaCl-Stückchen verschiedenster Farbe während einer Beleuchtung mit weißem Licht bedeutend besser leitend sind, als im Dunkeln. Dieses Ergebnis ist insoweit von besonderem Interesse, als es zeigt, daß eine Aktivierung des Steinsalzes und anderer Körper nicht bloß durch eine X-Bestrahlung zu geschehen braucht: es ist nur erforderlich und ausreichend, daß in diese Körper bestimmte Teilchen eingeführt oder darin gebildet werden, die auf die Wirkung einer Beleuchtung reagieren.

Auch fand sich mit diesem Apparat entsprechend dem, was vorher schon bei natürlich gefärbtem NaCl bemerkt worden war, daß die Abnahme der Ladung bei den manchmal sehr dunkel gefärbten Gieselpräparaten keineswegs viel, etwa der bedeutend intensiveren Farbe entsprechend, rascher war, als bei X-bestrahltem NaCl, an dem die Bestrahlung noch nicht einmal eine sichtbare Färbung erzeugt hatte. Weiter konnte festgestellt werden, daß ein Gieselpräparat nach einer an freier Luft bis zu fast vollständiger Entfärbung (schwacher Gelbfärbung) vorgenommenen Erhitzung, bei der sogar Schmelzspuren eingetreten waren, sich doch noch deutlich als lichtempfindlich erwies, was das oben bereits Gesagte: eine NaCl-

Platte müsse lange und genügend hoch genug erhitzt werden, um ihre Aktivität ganz zu verlieren, bestätigt. Schließlich kann ich noch in bezug auf die gleiche Frage angeben, daß ein besonders dunkel, natürlich gefärbtes Stückchen Steinsalz nach einem schwachen Erhitzen, das gerade zur sichtbaren Entfärbung genügte, eine raschere Entladung des Elektroskops bewirkte als vorher. Als Gegenprobe diente dabei ein Versuch mit einem aus dem gleichen großen Steinsalzblock gesprengtes, farbloses Stückchen, das sich als nicht lichtempfindlich erwies. Bei einer Beurteilung dieses Ergebnisses und bei einer eventuellen Verwendung desselben zu weiteren Schlüssen ist zu berücksichtigen, daß die Vermehrung der L.-F. der sehr intensiv gefärbten NaCl-Präparate sich nur auf die erste vom Licht getroffene, eventuell sehr dünne Schicht beschränken muß.

Mit dem Exnerschen Elektroskop konnte ich auch die Lichtempfindlichkeit von Ra-bestrahltem Glas nachweisen. Dazu diente ein Weinkelchglas, das zufälligerweise lange Zeit in einem Schranke in einiger Entfernung von Radium und Mesothorium gestanden und infolgedessen eine schwache Bernsteinfarbe erhalten hatte. H_2SO_4 bildete die eine mit dem Elektroskop verbundene, aufgeklebtes Stanniol die geerdete Belegung.

Versuche mit natürlich blaugefärbtem Steinsalz.

Durch X- und Radiumbestrahlung erhalten, wie bekannt, Steinsalz, Sylvin, Flußspat und Glas eine charakteristische Färbung und nach dem obigen Befund die Eigenschaft lichtempfindlich — in dem mehrfach gebrauchtem Sinn — zu sein. Es lag deshalb nahe, zu versuchen, ob vielleicht die in der Natur vorkommenden farbigen Varietäten dieser Körper schon ohne vorhergegangene X-Bestrahlung diese Eigenschaft besitzen. Als Versuchsmaterial bot sich vorhandenes blaues Steinsalz dar. Schon das erste in der Form einer etwa 1,5 zu 1,5 cm großen und etwa 0,3 cm dicken, parallel der Würfelfläche geschliffenen Platte verwendete, mit Glyzerinbelegung versehene und von oben durch eine Nernstlampe beleuchtete, sehr dunkle Präparat zeigte bei Ladungsversuchen erstens, daß es, ohne einer X-Strahlung ausgesetzt gewesen zu sein, recht lichtempfindlich war und unausgesetzt lichtempfindlich

blieb und zweitens, daß es für rotes Licht wesentlich empfindlicher war als eine sich sonst ähnlich verhaltende, vorher nicht beleuchtete X-bestrahlte Platte. Im wesentlichen aber verhielt sich das neue Präparat wie X-bestrahltes Steinsalz, so daß wir also in dem natürlich blau gefärbten NaCl ein Material besitzen, das ohne weitere Vorbereitung zu unsern lichtelektrischen Versuchen verwendet werden kann und vor dem X-bestrahlten den Vorzug hat, seine Lichtempfindlichkeit nicht, oder wenn überhaupt dann nur äußerst langsam mit der Zeit zu verlieren.

Es bestand also die willkommene Möglichkeit, mit diesem Material einige Ergebnisse, die beim X-bestrahlten gefunden waren, noch mehr zu sichern und die Untersuchung zu ergänzen. Zuerst kam hier die Frage nach der Temperaturabhängigkeit der L.-F. und nach den Erscheinungen der „Erholung" und der „Ermüdung" in Betracht.

Es wurde deshalb eine Platte aus hellblauem NaCl in der üblichen Weise mit Belegungen versehen — unten Graphit, oben Glyzerinsalzlösung — und für die Beobachtung der L.-F. in einem der Kästchen aufgestellt. Die hier in Betracht kommenden Dimensionen sind: Größe der Platte 1,6:1,7 cm, Dicke 0,80 cm, Durchmesser der inneren Graphitbelegung 1,19 cm, Breite des Isolierringes 0,03 cm, Weite des Glyzerintrögchens 1,5 cm. 104 Volt angelegter Spannung erzeugten auf der Graphitbelegung eine Menge Influenzelektrizität, die sich durch einen Ausschlag am Elektrometer von 130 Skalenteilen bemerkbar machte.

Es kam nun zunächst darauf an, Versuchsbedingungen zu erhalten, unter denen die Platte imstande war, in einer Reihe von aufeinanderfolgenden L.-F.-Bestimmungen möglichst gleichbleibende Ergebnisse zu liefern, wenn sie bei derselben Temperatur immer mit der gleichen Ladung und Beleuchtung versehen wurde. Die nunmehr in dieser Beziehung zu stellenden Anforderungen sollten wesentlich höhere sein als bisher. Nach vielen zeitraubenden Vorversuchen haben sich folgende Versuchsanordnungen als die zweckmäßigsten herausgestellt, und sie wurden deshalb bei den meisten Versuchen angewendet (vgl. S. 151 u. ff., wo eine nähere Begründung gegeben wird).

Von den eigentlichen Versuchen zur Bestimmung der L.-F.

konnte an einer Reihe von aufeinander folgenden Tagen jedesmal nur je einer gemacht werden. Die Zwischenzeit war nötig, damit sich die Platte von dem vorangegangenen Versuch in genügendem Maße erholen konnte. Der betreffende Versuch verlief im wesentlichen in folgender Weise. Zwischen 4 und 5 Uhr nachmittags wurde die in ca. 50 cm Entfernung aufgestellte Nernstlampe, die die zunächst sorgfältig verdunkelte Platte nachher zu beleuchten hatte, angezündet. 10 Minuten später wurde an die bis dahin mit beiden Belegungen zur Erde abgeleitete Platte eine Spannung von etwa 105 Volt angelegt; der schwache Dunkelstrom verschwand, wie bei vorhergehenden Proben festgestellt war, in wenigen Sekunden. Die Platte blieb dann, immer geladen, noch weitere 6 Minuten im Dunkeln, während welcher Zeit die Bestimmung von Spannung und Stromstärke der Nernstlampe und von der Plattentemperatur stattfand; zu allerletzt, kurz vor Ablauf der 6 Minuten, wurde die Elektrometer-Plattenverbindung von der Erde getrennt und das Elektrometer abgelesen. Darauf setzte nach Wegziehen des das Kästchenfensterchen bedeckenden Schiebers[1]) plötzlich die durch Wasser gesiebte Beleuchtung der Nernstlampe und damit auch gleichzeitig die Bewegung des Lichtzeigers auf der Elektrometerskala ein. Der Beobachter las in den folgenden 30 Sekunden regelmäßig alle 5 Sekunden das Elektrometer ab, erdete dann auf 30 Sekunden die Elektrometer-Plattenverbindung und wiederholte nach Isolierung dieser Leitung seine regelmäßigen Ablesungen wie vorher. In dieser Weise kam jedesmal eine Gruppe von je sechs Bestimmungen der unmittelbar aufeinander folgenden Elektrometerablenkungen zustande. Im ganzen wurden sechs solche um je 30 Sekunden zeitlich voneinander entfernte Gruppen beobachtet. An die letzte Ablesung schlossen sich dann der Reihe nach folgende Operationen an: Erdung beider Plattenbelegungen, nochmalige Bestimmung der Spannung und Stromstärke der Nernstlampe, außerdem auch der Ladespannung der Platte, Auslöschen der Nernstlampe, Prüfung der Isolation von Elektrometerleitung und verdunkelter Platte, nochmalige Ablesung der Plattentemperatur. Zu allerletzt wurde eine 50kerzige Metallfadenlampe in etwa 60 cm Entfernung von der Platte so aufgestellt, daß mittels eines auf das Kästchenfensterchen

1) Bei geöffnetem Fensterchen war das Zimmer stets verdunkelt.

inzwischen aufgesetzten Prismas total reflektiertes Licht die geerdete Platte mit bei allen Versuchen möglichst gleichbleibender Intensität beleuchtete. Diese Beleuchtung blieb bis gegen 8 Uhr morgens des folgenden Tages bestehen, dann aber wurde das Fensterchen durch Auflegen des erwähnten Schiebers verschlossen und damit die geerdete Platte bis etwa gegen 5 Uhr, d. h. bis zum nächsten gleich verlaufenden Versuch, verdunkelt. Eine Beobachtung des in ähnlicher Weise wie der Ladungsstrom verlaufenden Entladungsstromes fand nur einige Male in sofortigem Anschluß an einen Ladungsversuch statt.

Die erste der folgenden Tabellen enthält nun die Widergabe *eines* Versuchs in ausführlicher Darstellung und die zweite von einer Anzahl von Versuchen nur die Gruppenwerte (Kolonne 7—12) d. h. die ganzen, in je 30 Sekunden erhaltenen Ablenkungen; außerdem die Summe dieser Gruppenwerte (Kolonne 13) und einige andere Daten.

Tabelle XIX.

28. Febr. 5^h 25 Min. 0 Sek.: Nernstlampe angezündet.
Elektrometerempfindlichkeit: 162,0 Skt. pro Volt.
5^h 35 Min. 0 Sek.: 105,3 Volt angelegt.
5^h 35 „ 1 „ Dunkelstrommessung angefangen:
0,5 Skt. in 5 Sek.
0,2 Skt. in folgenden 10 Sek.
unmerklich in folgenden Minuten.
Nernstlampenspannung: 99,8 Volt.
Nernstlampenstromstärke: 0,433 Amp.
Plattentemperatur: 20,0°.
5^h 41 Min. 0 Sek.: Anfang der Plattenbeleuchtung.

5^h 41 Min.	0 Sek.	Elektrom.	Nullpunkt:	14,5	Ablenkung in 5 Sek.
5^h 41 „	5 „	„	Stand:	86	71,5 Skt.
5^h 41 „	10 „	„	„	126	40 „
5^h 41 „	15 „	„	„	161	35 „
5^h 41 „	20 „	„	„	191	30 „
5^h 41 „	25 „	„	„	220	29 „
5^h 41 „	30 „	„	„	247,5	27,5 „
				1. Gruppenwert:	233 Skt.

5^h 42 Min.	0 Sek.	Elektrom.	Nullpunkt:	15	Ablenkung in 5 Sek.
5^h 42 „	5 „	„	Stand:	35	20 Skt.
5^h 42 „	10 „	„	„	44	19 „
5^h 42 „	15 „	„	„	70,5	16,5 „
5^h 42 „	20 „	„	„	89	18,5 „
5^h 42 „	25 „	„	„	105	16 „
5^h 42 „	30 „	„	„	121,5	16,5 „
				2. Gruppenwert:	106,5 Skt.

Tabelle XIX (Fortsetzung).

5h 43 Min.	0 Sek.	Elektrom. Nullpunkt:	15	Ablenkung in 5 Sek.	
5h 43 „	5 „	„ Stand:	30	15	Skt.
5h 43 „	10 „	„ „	45	15	„
5h 43 „	15 „	„ „	59	14	„
5h 43 „	20 „	„ „	72,5	13,5	„
5h 43 „	25 „	„ „	85	12,5	„
5h 43 „	30 „	„ „	99	14	„
		3. Gruppenwert:		84	Skt.

5h 44 Min.	0 Sek.	Elektrom. Nullpunkt:	14,5	Ablenkung in 5 Sek.	
5h 44 „	5 „	„ Stand:	27	12,5	Skt.
5h 44 „	10 „	„ „	40	13	„
5h 44 „	15 „	„ „	52	12	„
5h 44 „	20 „	„ „	63	11	„
5h 44 „	25 „	„ „	75	12	„
5h 44 „	30 „	„ „	86	11	„
		4. Gruppenwert:		71,5	Skt.

5h 45 Min.	0 Sek.	Elektrom. Nullpunkt:	14,5	Ablenkung in 5 Sek.	
5h 45 „	5 „	„ Stand:	26	11,5	Skt.
5h 45 „	10 „	„ „	37	11	„
5h 45 „	15 „	„ „	47	10	„
5h 45 „	20 „	„ „	57	10	„
5h 45 „	25 „	„ „	67	10	„
5h 45 „	30 „	„ „	77,5	10,5	„
		5. Gruppenwert:		63	Skt.

5h 46 Min.	0 Sek.	Elektrom. Nullpunkt:	14,5	Ablenkung in 5 Sek.	
5h 46 „	5 „	„ Stand:	24,5	10	Skt.
5h 46 „	10 „	„ „	35	10,5	„
5h 46 „	15 „	„ „	44	9	„
5h 46 „	20 „	„ „	53,5	9,5	„
5h 46 „	25 „	„ „	62,5	9	„
5h 46 „	30 „	„ „	71,5	9	„
		6. Gruppenwert:		57	Skt.

5h 46 Min. 32 Sek.: Platte geerdet.
Nernstlampenspannung: 99,7 Volt.
Nernstlampenstromstärke: 0,430 Amp.
Plattentemperatur: 20,2°.
Elektrometertemperatur: 17,6°.

Isolationsmessung: Abnahme einer Ablenkung von 162 Skt.
in 30 Sek.: 1,6 Skt.
in weiteren 30 Sek.: 1,4 Skt.

Selbständiger Elektrometergang mit geerdeter Platte in 1 Min.: 0,1—0,2 Skt.

Tabelle

Nr.	Datum	Ladespann.	Nernstlampe Spannung	Nernstlampe Stromstärke	Temp	Gruppenwerte I	II	III	IV	V	VI	Summe
1	29. I.	104,8	101,0	0,459	18,5°	221	106	85	73,5	65	59	609,5
2	30. I.	104,5	101,0	0,459	18,3	217	105	83	72	64	58,5	599,5
3	31. I.	104,5	101,0	0,459	18,75	217,5	103,5	84	72	64	58	599
4	1. II.	104,5	100,9	0,460	18,3	201	105	83,5	72	65	58,5	585
5	2. II.	104,5	100,9	0,430	25,8	236	111	89	76	67,5	61	640,5
6	3. II.	104,3	100,8	0,439	26,9	250,5	114,5	91,5	77,5	69	63	666
7	4. II.	104,2	100,5	0,439	29,8	253	117	94	80	71,5	64,5	680
8	5. II.	104,2	100,5	0,444	27,9	253	117	94	79,5	70,5	63	677
9	6. II.	104,2	100,4	0,443	29,1	235	109	86	74	66	60	630
10	7. II.	104,2	100,5	0,448	29,8	207	98	78	67	60	54	564
11	8. II.	104,5	100,0	0,428	28,2	204,5	95	75,5	65,5	58	53	551,5
12	9. II.	104,0	100,0	0,430	28,2	251	113,5	90	77	68	61	660,5
13	10. II.	104,0	99,8	0,432	19,2	228,5	105	82,5	69,5	61,5	55,5	602,5
14	11. II.	103,0	99,8	0,432	19,2	227	103	81	69	61	55	596
15	21. II.	105,5	99,8	0,432	19,2	274	128	97	82	71,5	63,5	716
16	22. II.	105,5	99,8	0,432	17,3	241	110	85,5	71,5	63	56,5	627,5
17	23. II.	105,2	99,7	0,430	19,6	233,5	107,5	84,5	71	63	57	616,5
18	24. II.	105,2	99,8	0,431	19,1	235	107	83	70	62	56	613
19	25. II.	105,2	99,8	0,431	19,7	231,5	106	83	71	61,5	56,5	609,5
20	26. II.	105,2	99,8	0,430	31,8	250,5	114,5	90,5	77	68	61	661,5
21	27. II.	105,3	99,8	0,430	31,0	251,5	115	90	76,5	67,5	61	661,5
22	28. II.	105,3	99,8	0,432	20,1	233	106,5	84	71,5	63	57	615
23	1. III.	115,5	99,8	0,432	19,3	250	114,5	90	77,5	68,5	62	662,5
24	2. III.	94,5	99,8	0,431	22,0	200,5	93	73,5	63*	55	50,5	535,5
25	3. III.	94,5	99,8	0,432	20,5	199,5	93	73,5	63	55	50	534
26	4. III.	115,5	99,7	0,432	20,6	245,5	114	89,5	77	68	61	655
27	5. III.	105,0	99,7	0,432	20,4	219	102	80,5	68,5	60,5	54,5	585
28	6. III.	105,0	99,6	0,431	19,5	216	101	80	68	60,5	54,5	580
29	10. III.	104,8	99,6	0,431	19,8	248,5	109	85	73	63,5	57,5	636,5

*) Wurde nicht beobachtet, sondern

Diese Tabellen enthalten verschiedenes Material für eine ausführliche Besprechung. Die Tab. XX mag zunächst dazu dienen, um sich ein Urteil zu bilden über die bei Messungen wichtige Frage, inwieweit das untersuchte Material und die Versuchsanordnung imstande sind, unter anscheinend gleichbleibenden Versuchsbedingungen untereinander übereinstimmende Ergebnisse zu liefern. Zu diesem Zweck dienen am besten die Werte der Kolonne 14, die durch Reduktion der direkt beobachteten Summenwerte (Kolonne 13) auf gleiche

XX.

Reduzierte Summe		I/VI	II/VI	II/V	Bemerkungen
565,5		3,75	1,80	1,63	
558,5		3,70	1,79	1,64	
556,5		3,77	1,79	1,62	
545		3,44	1,79	1,62	Vermutlich infolge einer kurz vor dem Versuch stattgefundenen 40sekundigen Beleuchtung der Platte etwas zu klein.
624,5		3,87	1,82	1,64	Unerklärter Sprung in der Wattzahl der Nernstlampe gegen den vorhergegangenen Versuch.
630,5		3,98	1,82	1,66	
634,5		3,92	1,81	1,64	
629,5		4,02	1,86	1,66	
	582,5	3,92	1,82	1,65	Versuche mit verschiedener und geringerer Beleuchtungsstärke.
	509,5	3,87	1,83	1,63	
	541,5	3,86	1,79	1,64	
647,5		4,12	1,86	1,67	Vermutlich infolge der bei den vorhergegangenen Versuchen verwendeten geringeren Beleuchtungsstärke etwas zu groß.
627		4,12	1,89	1,71	
626,5		4,13	1,88	1,69	
	734	4,31	2,16	1,78	Nach 10tägiger Verdunklung der ungeladenen Platte.
	652	4,26	1,95	1,75	Allmähliche Gewöhnung der Platte an den normalen Beleuchtungsturnus.
	637	4,10	1,89	1,71	
633		4,19	1,91	1,73	Platte vorher über Nacht auf etwa 30° erwärmt.
626,5		4,09	1,88	1,72	
627		4,10	1,88	1,68	
630		4,12	1,89	1,70	
628		4,09	1,87	1,69	
620		4,03	1,85	1,67	
603		3,97	1,84	1,69	
606		3,99	1,86	1,69	
608,5		4,02	1,87	1,68	
598,5		4,02	1,87	1,69	
600		3,96	1,85	1,67	
	658	4,32	1,90	1,72	Nach 4täg. Verdunklung der ungeladenen Platte.

nach Versuch 25 angenommen.

Temperatur (24,0°), gleiche angelegte Spannung (105,0 Volt) und gleiche Wattzahl (43,0) der Nernstlampe erhalten wurden. Betrachtet man nun diese Reihe, so fällt zunächst auf, daß die vier ersten Zahlen, wenn auch untereinander recht befriedigend übereinstimmend (mit Ausnahme der vierten, deren Abweichung noch im folgenden begründet werden soll) kleiner sind als alle folgenden. Gleichzeitig bemerkt man in den Angaben über die Stromstärke der Nernstlampe (Kolonne 5), daß ein in der ganzen Versuchsreihe nicht wieder vorgekommener

bedeutender Sprung dieser Werte nach kleineren Zahlen beim Übergang von dem vierten Versuch zu den folgenden stattgefunden hat. Die Veranlassung zu diesem Sprung ist mir unbekannt geblieben; ich weiß nicht, ob er etwa einem Defekt des Zeigers vom Amperemeter oder einer Veränderung in der Nernstlampe zuzuschreiben ist. Jedenfalls dürfen aber die Ergebnsse dieser vier Versuche nicht ohne weiteres mit denen der übrigen Versuche verglichen werden, wenn wir nach dem erreichten Grad der Übereinstimmung fragen. Die auf diese vier ersten Werte der Kolonne 14 folgenden, im Verlauf von $2^1/_2$ Wochen erhaltenen zwölf Werte zeigen, abgesehen von dem aus dem Versuch 12 abgeleiteten, für dessen Abweichung noch ein vermuteter Grund angegeben werden wird, eine Übereinstimmung untereinander, wie ich sie mir kaum besser wünschen könnte. Wir kommen somit zu dem Ergebnis, erstens, daß sich unter gleichbleibenden Versuchsbedingungen, was Ladespannung, Beleuchtung, Temperatur und Behandlung der Platte in der Zeit zwischen zwei Ladungsversuchen anbetrifft, mit dem blauen NaCl zuverlässiger arbeiten läßt als mit dem X-bestrahlten; zweitens, daß das Beobachtungsverfahren eine weitreichende Sicherheit gewährleistet. und drittens, daß es, wie schon erwähnt, bei einer eventuellen, größere Sicherheit erfordernden Fortsetzung dieser Untersuchung notwendig sein wird, die Intensität der Beleuchtung besser zu kontrollieren, als es hier durch Bestimmung der Wattzahl der Nernstlampe geschah. — In den auf die erwähnten 12 folgenden Summenwerte ist eine nicht unbedeutende Abnahme gegen Ende der Versuchsreihe zu erkennen, und es fragt sich, welchem Umstand diese Annahme zuzuschreiben ist. Als Grund vermutete ich zuerst eine nicht in der Wattzahl ausgedrückte Abnahme der Intensität der sich seit Monaten im Gebrauch befindlichen Nernstlampe. Nach Vornahme der erwähnten Reduktion fiel mir aber dann auf, daß diese Abnahme der Summenwerte hauptsächlich in zwei Sprüngen eingetreten war, die jedesmal folgten, wenn zu einem noch zu besprechenden Zweck ein Versuch mit etwas erhöhter Ladespannung — 115 statt 105 V. — vorausgegangen war, und es schien mir nun doch nicht sehr wahrscheinlich zu sein, daß die Nernstlampe gerade diese beiden Gelegenheiten gewählt haben sollte, um ihre Intensität besonders stark zu ändern. Andererseits aber mußte ich es auch

für sehr auffallend halten, wenn eine verhältnismäßig so geringe Änderung in der jedesmal alle 24 Stunden nur einmal auf 6 Minuten angelegten Ladespannung eine so bemerkbare, mindestens drei Tage anhaltende Verminderung der Stromstärke bewirkt hätte, denn die über Polarisation und Ermüdung mit der Platte bisher gemachten Erfahrungen hatten keinen sicheren Anhaltspunkt für das Bestehen eines solchen Einflusses gegeben. Ich verfiel dann noch auf den Gedanken, ob nicht vielleicht die bei unbestrahltem, nicht farbigem NaCl gefundene, unerklärt gebliebene „langzeitige Abnahme der L.-F.“, von der bei beleuchtetem blauem und X-bestrahltem NaCl freilich bisher, trotz mehrfacher Gelegenheit dazu, nichts zu bemerken gewesen war, plötzlich wieder eine Rolle gespielt haben sollte. Zu einer Entscheidung in dieser Angelegenheit bin ich noch nicht gekommen.

Von einigem Interesse ist weiter die Angabe der Ergebnisse, die eine Berechnung des Verhältnisses einiger Gruppenwerte je eines Versuchs geliefert haben. Sie gibt eine Vorstellung der Geschwindigkeit der zeitlichen Abnahme der Stromstärke oder m. a. W. der Zunahme der Polarisation während eines Versuchs. Die letzten drei Zahlenreihen der Tab. XX zeigen, wenn wir uns zunächst auf die Versuche beschränken, aus denen die Werte der Kolonne 14 berechnet wurden, daß diese Abnahme während der ersten Zeit der langen Versuchsreihe rascher wurde, um dann gegen Ende wieder etwas langsamer zu werden. Man erkennt weiter, daß sich an dieser Veränderung hauptsächlich die ersten Gruppen beteiligten. Einen bestimmten Grund kann ich für diese Veränderungen nicht angeben; doch sei als vielleicht damit zusammenhängend, darauf hingewiesen, daß die Platte sich in bezug auf den Verlauf eines Ladungsversuchs sehr empfindlich für eine Abweichung von der oben angegebenen regelmäßigen Vorbehandlung erwiesen hat. Letzteres ist z. B. an den Ergebnissen der Versuche Nr. 15, 16 u. 29 der Tabelle deutlich erkennbar. Da nun die Platte vor Anfang der Versuchsreihe ganz anders behandelt worden war als während derselben, und da durch andre Versuche festgestellt ist, daß die Platte unter Umständen längere Zeit braucht, um sich an die neuen Verhältnisse zu gewöhnen, so erscheint es immerhin möglich, daß die in der ersten Woche nach Anfang der Versuchsreihe eingetretene Veränderung in

dem Verlauf eines jeden Ladungsversuchs eine Folge ist von dieser verschiedenen Vorbehandlung. Das geringe Kleinerwerden des genannten Verhältnisses gegen Ende der Untersuchung hängt wohl mit den zu dieser Zeit eingetretenen, auf S. 140 erwähnten Verhältnissen zusammen.

Die zuletzt besprochenen, in wenig befriedigender Weise erklärten Wahrnehmungen spielen zwar bei der Beantwortung der Hauptfrage, die mit diesem Teil der Untersuchung beabsichtigt war, der Frage nach dem Einfluß der Temperatur auf die L.-F. des blauen NaCl keine Rolle, weil, wie oben erwähnt, in dem betreffenden Teil (Versuch Nr. 5 bis 22) der Versuchsreihe keine derartige Störungen vorkamen; sie müssen aber, wenn die Untersuchung in dieser Richtung weiter geführt werden sollte, vermieden werden. Die übrigen, in der Tabelle hervortretenden Verschiedenheiten werden unten noch begründet werden; sie bieten das Material für die Erledigung einiger weiterer Aufgaben, die noch erledigt werden sollten.

Bevor ich aber zu der Mitteilung der wichtigsten gefundenen Ergebnisse übergehe, wird es notwendig sein, Angaben zu machen über verschiedene Faktoren, die diese Ergebnisse beeinflußt haben und über die dadurch bedingten Fehlergrenzen. Dabei wird sich auch Gelegenheit bieten, über Anordnung und Verwendung der gebrauchten Instrumente usw., das Erforderliche zu berichten. Einiges im folgenden wird wohl eine Wiederholung von Vorhergegangenem sein, darf aber der Vollständigkeit wegen auch hier nicht fehlen.

Die optische Untersuchung der Platte ergab, daß die blaue Färbung jedenfalls in der Hauptsache von schichtenweise eingelagerten Medien herrührte, die im Ultramikroskop die von Herrn Siedentopf beschriebene Anordnung und Farben aufwiesen, so daß ich mit Herrn Siedentopf annehme, daß sie aus submikroskopischen Na-Teilchen bestehen. In dieser Beziehung unterscheidet sich somit das jetzt untersuchte Material wesentlich von dem benutzten X-bestrahlten NaCl mit seiner diluten, nicht nachweisbar schichtenweis angeordneten gelben Färbung. Die Frage, ob im blauen NaCl vielleicht außerdem noch eine dilute, von amikroskopischen Teilchen herrührende Färbung vorhanden war, konnte ich an unreren Präparaten nicht entscheiden.

Zur Ladung wurde wieder eine Batterie von kleinen Ak-

kumulatoren verwendet, deren Spannung von etwa 105 Volt bei jedem Versuch mit einem Kelvinschen Multizellar auf Zehntelvolt gemessen wurde; auf die nötige Unveränderlichkeit der Spannung während eines Versuchs konnte ich nach vorher mit der Batterie gemachter Erfahrung rechnen. Alle Kontakte waren sorgfältigst auf etwaige Fehler untersucht. Da die Batterie in einem Nebenzimmer aufgestellt war, hatten die mitunter großen Temperaturänderungen, denen die Platte durch absichtliche Änderung der Lufttemperatur im Beobachtungsraum unterworfen werden mußte, keinen störenden Einfluß auf die angelegte Spannung.

Für die Beleuchtung der NaCl-Platte kam eine mit „110 Volt 0,5 Ampere" bezeichnete Nernstlampe ohne Glashülle zur Verwendung, deren Stift in 49,3 cm Entfernung von der Platte senkrecht über dem oberen Kästchenfensterchen aufgestellt war. Da sie gegen Luftströmungen sehr empfindlich ist, war sie mittelst eines eng anschließenden, innen geschwärzten, etwa 12 cm langen Metallzylinders dagegen geschützt. Durch ein auf dem Deckel des Kästchens während des Versuchs vorhandenes, mit reinem Wasser in etwa 4 cm Höhe gefülltes Glaströgchen wurden lästige Wärmestrahlen von der Platte ferngehalten; mittelst eines auf dem Kästchenfenster liegenden lichtdichten Schiebers konnte das Kästchen verdunkelt werden. Ein allmählich fühlbar gewordener Mangel der Untersuchung war das Fehlen einer photometrischen oder thermoelektrischen Kontrolle der Intensität der Nernstlampe. Längere Zeit glaubte ich in bezug auf Veränderungen in der Beleuchtungsstärke das Nötige erfahren zu können durch eine jedesmal vor und nach jedem Ladungsversuch vorgenommene Messung von Stromstärke und Spannung der Lampe, letztere unmittelbar an den Enden des Leuchtstiftes ausgeführt. Außerdem ließ ich, um eine möglichste Unveränderlichkeit der Lichtstärke während des Versuchs zu erreichen, vor jeder Beleuchtung die Lampe 16 Minuten lang brennen und fing die lange Versuchsreihe mit einer schon einige Zeit im Gebrauch befindlichen Lampe an. Unter diesen Umständen nahm dann auch die Spannung bei jeder Beleuchtung der Platte nur um 0,1 bis 0,2 Volt, die Stromstärke um 0,002—0,003 Ampere ab. Erst gegen Schluß der Untersuchung mußte ich, wie schon erwähnt, die Wahrnehmung machen, daß dieses Verfahren doch nicht

immer ganz genügt haben dürfte. Da aber die Versuche trotzdem schon zu brauchbaren Ergebnissen geführt hatten, so konnte ich mich nicht entschließen, sie mit den vorhin genannten Verbesserungen zu wiederholen und behielt auch für die wenigen noch folgenden Versuche das einmal gewählte Kontrollverfahren bei.

Um zum Zwecke einer Reduktion der beobachteten Stromstärken auf eine gleiche Lichtstärke ein ungefähres Maß für den Einfluß von Strom- und Spannungsstärke der Lampe auf die L.-F. der Platte zu erhalten, stellte ich zwei nicht in der Tabelle aufgeführte Ladungsversuche unmittelbar nacheinander an; der eine bei 99,8 Volt und 0,469 Ampere, der zweite bei 99,0 Volt und 0,448 Ampere. Der Unterschied in den erhaltenen Elektrometerausschlägen betrug etwa 8 Proz. des größten Wertes. Als Stromquelle für die Lampe diente eine Batterie von 60 großen Akkumulatoren, deren Spannung von etwa 125 Volt mittelst eines regulierbaren Vorschaltwiderstandes soweit reduziert wurde, daß für den Lampenstift noch etwa 100 Volt übrig blieben.

Als weitere, besonders mit Rücksicht auf die Bestimmung des Temperaturkoeffizienten zu besprechende Fehlerquellen kommen hauptsächlich eventuell in Betracht: 1. der persönliche Fehler bei der Ablesung, 2. eine mit der Ablenkung veränderliche Coulombempfindlichkeit des Elektrometers, 3. die Trägheit der Elektrometernadel und die Dämpfung ihrer Bewegung.

ad 1. Ein persönlicher Fehler konnte bei dem Einhalten der Beobachtungszeit begangen werden, somit am Anfang und am Ende der Messung eines jeden Gruppenwertes. Die Erfahrung hat gelehrt, daß in dieser Beziehung ein Fehler von 1 Proz. sicher vermieden werden konnte. Zu einem zweiten persönlichen Fehler war Veranlassung bei der Bestimmung der Stellung des bewegten Lichtzeigers am Ende dieser Beobachtungszeit. Auch dieser eventuell gemachte Fehler braucht ebenfalls 1 Proz. des Elektrometerausschlages nicht zu erreichen. Übung ist natürlich in beiden Fällen sehr nötig, außerdem spielt die Disposition des Beobachters eine Rolle.

ad 2. Die Abhängigkeit der Coulombempfindlichkeit von der Größe des Ausschlages könnte bei der verhältnismäßig kleinen, zu der Kapazität des Elektrometers zugeschalteten Kapazität der Platte und ihrer Leitung von der früher für

die Voltempfindlichkeit bestimmten vielleicht merklich verschieden sein. Jene Abhängigkeit wurde deshalb mit Hilfe des Piezoquarzes für verschiedene, an dem ruhenden Lichtzeiger gemessene Ausschläge bestimmt. Es stellte sich dabei heraus, daß das Verhältnis zweier Mengen zugeführter Elektrizität etwas kleiner ist als das Verhältnis der diesen beiden entsprechenden Elektrometerablenkungen. Betrugen z. B. letztere 250 bzw. 230 Skalenteile — Werte, die den größten der bei den Versuchen zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten vorgekommenen naheliegen —, so ergab sich das erstgenannte Verhältnis — der Elektrizitätsmengen — zu 1,080, das letztere — der Elektrometerausschläge — zu 1,087; bei kleineren Ablenkungen ist der Unterschied entsprechend noch geringer, er konnte somit in allen Fällen unberücksichtigt bleiben.

ad 3. Da der Einfluß der Temperatur auf die L.-F. aus dem Verhältnis zweier an der *bewegten* Nadel beobachteten Ablenkungen abgeleitet werden sollte, so entstand die Frage, inwieweit diese Ablenkungen durch Trägheit der Nadel, bzw. durch Dämpfung ihrer Bewegung gefälscht sein können, mit anderen Worten, ob das beobachtete Verhältnis der Ablenkungen in genügend genauem Maße das gesuchte Verhältnis der bei zwei verschiedenen Temperaturen, unter sonst gleichen Umständen in der NaCl-Platte in Bewegung gesetzten Elektrizitätsmengen wiedergab. Daß die Fälschung nicht sehr beträchtlich sein konnte, war aus Früherem bekannt, ob sie aber bei den Versuchen zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten von beleuchtetem blauen NaCl zu Fehlern von etwa 1 Proz. Veranlassung geben konnte, mußte doch noch geprüft werden. Ich beschränkte diese Prüfung auf Ablenkungen von der Größe, wie sie bei jenen Bestimmungsversuchen vorkamen (vgl. Tab. XX u. XXII) und verfuhr dabei folgendermaßen. Die durch eine Temperaturerhöhung der Platte (von 19,9° auf 31,4°) bewirkte Vermehrung einer (durch 105,2 Volt erzeugten) Ablenkung kann natürlich statt durch eine Erhöhung der Temperatur auch durch eine entsprechende Erhöhung der an die Platte angelegten Spannung erreicht werden. Angenommen, daß das Ohmsche Gesetz gültig ist, so muß das Verhältnis der angelegten Spannungen das gleiche sein, wie das Verhältnis der beförderten Elektrizitätsmengen. Bei einem Vergleich dieses Spannungsverhältnisses mit dem Verhältnis der

beobachteten entsprechenden Ablenkungen wird sich somit herausstellen, inwieweit das letztere das gesuchte Mengenverhältnis wiedergibt. Die Anwendung dieser Prüfungsmethode setzt, wie gesagt, voraus, daß man weiß, daß das Ohmsche Gesetz zutrifft; im Vorhergehenden ist mitgeteilt, daß dies für beleuchtetes X-bestrahltes NaCl in dem weiten Spannungsgebiet von 2—1600 Volt der Fall ist, und zwar wurde dieses Ergebnis nicht aus einer Verschiedenheit der erzeugten Ablenkungen, sondern aus einwandfreien Kapazitätsmessungen abgeleitet. Ich glaubte deshalb auf eine eingehende Wiederholung solcher Versuche mit beleuchtetem, blauen NaCl verzichten zu können, — um so mehr, als es sich speziell hier um das kleine Gebiet von etwa 105—115 Volt handelt — und den für das eine Präparat geführten Nachweis ohne weiteres auf das andere übertragen zu dürfen. Die Ergebnisse der erwähnten Versuche mit beleuchtetem, blauen NaCl bei ungefähr gleicher Temperatur und verschiedener Spannung sind unter Nr. 22 bis einschl. 27 in der Tab. XX enthalten und wurden außerdem nach Reduktion aller Ablenkungen auf eine gleiche Temperatur von 20,5° in der Tab. XXI dargestellt.

Tabelle XXI.

	Mittel der auf gleiche Temperatur reduzierten Gruppenwerte aus			Verhältnis von Reihe	
	I Vers. 23 u. 26	II Vers. 22 u. 27	III Vers. 24 u. 25	I zu II	I zu III
	249,0	226,5	199,0	1,099	1,251
	114,5	104,5	92,5	1,096	1,238
	90,0	82,5	73,0	1,091	1,233
	77,5	70,0	62,5	1,109	1,240
	68,5	62,0	54,5	1,108	1,258
	62,0	56,0	50,0	1,107	1,240
Summe	661,0	601,5	530,5	1,099	1,246
Spannungen	115,5	105,2	94,5	1,098	1,222

Man erkennt, daß innerhalb des für die Temperaturkoeffizientenbestimmung in Betracht kommenden Intervalls der Ablenkungen, die den Spannungen von 115,5 bzw. 105,2 Volt entsprechen, das Verhältnis der Ablenkungen dem Verhältnis der Spannungen entspricht. Demnach können wir später bei der Bestimmung des Temperaturkoeffizienten ohne

Bedenken und ohne etwaige Korrektion die an der bewegten Nadel beobachteten Ablenkungen verwenden.

Daß in dem zum Überfluß noch geprüften Gebiet von 105,2—94,5 Volt keine so gute Übereinstimmung (Abweichung etwa 2 Proz.) erhalten wurde, ist für unsere Frage unwesentlich und ist wohl wieder durch die mehrfach erwähnten, gegen Ende der Versuchsreihe aufgetretenen Erscheinungen bedingt. Eine orientierende Prüfung der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes in den Grenzen von 100—900 Volt gab keinen Anhaltspunkt für eine andere Erklärung.

Die Versuche über den Einfluß der Temperatur auf die L.-F., die nun bald im besonderen zur Sprache kommen werden, ergeben, daß bei höherer Temperatur größere Ablenkungen erhalten wurden als bei niedriger Temperatur, wenn alle anderen Faktoren gleich geblieben waren. Bevor daraus geschlossen werden konnte, daß die Temperatur die L.-F. erhöht, und in welchem Maße sie sie erhöht, mußte, namentlich in Anbetracht des geringen Unterschiedes zwischen jenen Ablenkungen, doch ein Bedenken, oder vielmehr deren zwei, die sich gegen die Berechtigung einer solchen Schlußfolgerung richteten, beseitigt werden. Der erste Verdacht richtete sich gegen das Elektrometer. Um verschiedene Temperaturen der NaCl-Platte zu erhalten, mußte die Zimmertemperatur durch Heizung, bzw. durch Öffnen der Fenster des Beobachtungsraumes, geändert werden; infolgedessen änderte sich auch die Temperatur im Innern des großen Blechkastens, wenn auch in engeren Grenzen, und damit die Temperatur der Schwefelsäure, die im Elektrometer der Nadel ihre Ladung zuführt und ihre Schwingungen dämpft. Da ich nun die Elektrizitätszufuhr, wie wiederholt gesagt, immer an der bewegten Nadel maß, erschien es nicht ausgeschlossen, daß sich eine Verlangsamung der Nadelbewegung, als Folge der durch Temperaturerniedrigung vermehrten Viskosität der H_2SO_4 wesentlich an der beobachteten, der Verminderung der L.-F. der Platte zugeschriebenen Verringerung der Elektrometerablenkungen beteiligt hätte; ihre Nichtberücksichtigung würde demnach zu einer Überschätzung des gesuchten Temperaturkoeffizienten führen. Um hier Klarheit zu schaffen, wurde an verschiedenen Tagen je eine L.-F.-Bestimmung, die eine bei einer H_2SO_4-Temperatur von 4,7°, die andere bei 21,5°,

unter sonst gleichen Versuchsbedingungen angestellt, ohne daß gleichzeitig auch die Platte dieser großen Temperaturänderung unterworfen war. Das geschah in der Weise, daß die Zimmertemperatur von 4,8° bei beiden Versuchen nahezu erhalten blieb, dagegen die Temperatur des Inhalts des großen Blechkastens, also auch die des Elektrometers, von einem Versuch zum anderen die genannte Erhöhung durch elektrische Heizung erfuhr. Der zweite Versuch hat nun etwa 1 Proz. größere Ausschläge geliefert als der erste, trotzdem das Verhältnis von zwei aufeinander folgenden Schwingungsweiten der Nadel im ersten Falle 60, im zweiten 4,6 betrug. Es ist demnach in Anbetracht der bei den Versuchen über Temperatureinfluß auf die L.-F. verwendeten höheren Temperaturen und des engeren Temperaturintervalls sicher, daß diese Versuche nicht wesentlich von einer Veränderung der Viskosität der H_2SO_4 beeinflußt wurden.

Der zweite Verdacht richtete sich gegen die zunächst angenommene Unabhängigkeit der Beleuchtungsintensität von der Zimmertemperatur. Daß die Lichtstärke der Nernstlampe durch eine bei unseren Versuchen vorkommende Änderung dieser Temperatur von etwa 15° merklich beeinflußt werden könnte, halte ich für ausgeschlossen. Dagegen schien es mir möglich zu sein, daß die in der Steinsalzplatte eindringende Lichtmenge durch Temperaturerniedrigung eine Einbuße erleiden könnte infolge einer veränderten Beschaffenheit der Glyzerinsalzlösung, die die obere Elektrode bildete, oder auch der Plattenoberfläche, die mit dieser Lösung in Berührung stand, und zwar in beiden Fällen infolge von Ausscheidung von Salz. Bei einer nachfolgenden Erwärmung würde das Salz wieder aufgelöst werden und so käme vielleicht eine nur scheinbare Verminderung der L.-F. mit sinkender Temperatur zustande. Erfreulicherweise haben besonders draufhin gerichtete Versuche, bei denen die Temperaturänderungen wesentlich größer waren und länger andauerten als bei den L.-F.-Versuchen, diesen Verdacht als unbegründet erwiesen.[1])

1) Es darf wohl an dieser Stelle noch auf das bereits auf S. 120 über den Einfluß der Form der Oberfläche der Glyzerinelektrode auf die in der Platte eindringende Lichtmenge Gesagte hingewiesen und die Bemerkung wiederholt werden, daß nur dann die Ergebnisse zweier Versuche miteinander verglichen werden dürfen, wenn man sicher ist,

Es wurde auch noch versucht, ob eine längere Zeit (12 Stunden) geerdete, verdunkelte, von Polarisation befreite Platte bei fortgesetzter Erdung, aber bei plötzlich eintretender Beleuchtung vielleicht einen Ausschlag lieferte als Folge eines Hallwachseffekts. Der Versuch ergab jedenfalls keinen hier in Betracht kommenden Ausschlag.

Allen Ablenkungswerten haftete der — während der ganzen aus der Tab. XX zu entnehmenden Versuchszeit genügend konstant gebliebene — Fehler der nicht vollständigen Isolation des Leitersystems an (vgl. Tab. XIX). Seine Berücksichtigung konnte unterbleiben, weil die Werte im Verhältnis zu ihrer Größe beeinflußt werden und wir nicht so sehr die absoluten Werte der Stromstärke als wohl ihr gegenseitiges Verhältnis erfahren wollten. Sorgfältig wurde darauf acht gegeben, daß die nahe bei der Platte liegende Thermometerkugel möglichst genau die Temperatur der Platte hatte. Da die Herstellung von gewünschten Temperaturänderungen durch Erwärmen oder Abkühlen der Zimmerluft geschehen mußte, war es notwendig, hiermit viele Stunden vor dem betreffenden Versuch anzufangen und Heizung und Abkühlung so zu regulieren, daß das Thermometer schon längere Zeit vor dem Versuch und erst recht während des Versuchs seinen Stand nur mehr äußerst wenig oder gar nicht änderte.

Über die Erscheinungen der Erholung bzw. der Ermüdung, die die Versuchsergebnisse sehr beeinflussen können, wird weiter unten berichtet werden, und ich möchte nun nach der mitgeteilten Sicherstellung der Versuchsergebnisse endlich zu der speziellen Besprechung der Versuche zur Bestimmung des Temperatureinflusses auf die L.-F. des blauen Steinsalzes übergehen.

Es liegt eine große Anzahl von solchen Versuchen vor; alle führten auf eine Zunahme der L.-F. mit wachsender Temperatur, dagegen zeigten die ersten — und es sind die meisten — keine befriedigende Übereinstimmung in ihren Ergebnissen, und in diesen anfänglich immer wieder vorkommenden Unstimmigkeiten ist der Hauptgrund gelegen, weshalb auch dieser

---

daß sich nicht zwischendurch etwa durch Abnehmen und Wiederaufsetzen des Kästchendeckels zur Erneuerung der H_2SO_4, oder durch eine Verstellung des in die Lösung eingetauchten Zuleitungsdrahtes etwas an der Form dieser Oberfläche geändert hat.

Teil der Untersuchung eine so lange Zeit beanspruchte. Befriedigende Verhältnisse traten erst ein, nachdem insbesondere der große Einfluß genügend bekannt und berücksichtigt worden war, den die Vorbehandlung der Steinsalzplatte in bezug auf Beleuchtung usw. auf die Versuche ausübte. Für die Berechnung des Temperaturkoeffizienten kommen infolgedessen nur die verhältnismäßig wenigen Versuche in Betracht, die in Tab. XX aufgeführt sind und von diesen hauptsächlich nur die zuletzt mit besonderer Sorgfalt ausgeführten Nr. 19 bis einschl. Nr. 22. Die ersten Versuche Nr. 5, 6, 7, 8, 12 und 13 sind zum Teil noch beeinflußt von der oben schon erwähnten allmählichen Angewöhnung der Platte an die nach Versuch Nr. 1 eingetretenen Beleuchtungsverhältnisse, und außerdem fehlt für sie infolge der unerklärten Spannungsänderung der Lampenstromstärke von 0,460 auf 0,433 Ampere vor Versuch Nr. 5 der sichere Anschluß an die vorhergehenden Versuche bei niedrigerer Temperatur. Doch sei bemerkt, daß auch diese Versuche zu Werten des Temperaturkoeffizienten führen, die nur wenig von dem unten anzugebenden zuverlässigen Wert abweichen.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse der Versuche Nr. 19 bis einschl. Nr. 22 der Tab. XX nach Reduktion auf eine gleiche Wattzahl (mit Hilfe der Beziehung von S. 144) und nach Mittelnahme zusammengehöriger Werte aufgeführt und außerdem das Verhältnis, in dem jeder Gruppenwert infolge einer Temperaturerhöhung von 19,9° auf 31,4° vergrößert wurde.

Tabelle XXII.

	Mittel aus den auf gleiche Wattzahl reduzierten Gruppenwerten von Vers. 19 u. 22 I	Vers. 20 u. 21 II	Verhältnis Reihe II zu I
	231,2	251,0	1,086
	105,8	114,8	1,085
	83,1	90,3	1,087
	70,9	76,8	1,083
	62,0	67,8	1,094
	56,5	61,0	1,080
Summe:	609,5	661.7	
Temperaturmittel:	19,9°	31,4°	

Erwähnenswert ist außer einer erfreulichen Übereinstimmung in den Verhältniszahlen untereinander, daß der Temperatureinfluß auf die Stromstärke trotz der in den 6 Minuten Versuchsdauer bedeutend gestiegenen Polarisation der gleiche geblieben ist; ein Einfluß der Ladungsdauer auf den Temperaturkoeffizienten, den wir bei unbestrahltem NaCl fanden, ist somit in diesem Zeitintervall nicht bemerkbar. Was die Größe des *Temperatureinflusses auf die L.-F. des beleuchteten, blauen NaCl* anbetrifft, so ergeben die beiden letzten Zahlenreihen für den *Koeffizienten* $1/\varkappa\, d\varkappa/dt$ *in dem gewählten Temperaturgebiet den Wert 0,00714.* Von unseren anderen Steinsalzpräparaten liegt das beleuchtete, X-bestrahlte NaCl mit seinem Koeffizienten 0,011 am nächsten, und es kann sogar die Möglichkeit nicht von der Hand gewiesen werden, daß eine genauere Bestimmung dieses Wertes, die wegen der früher erwähnten Schwierigkeiten noch nicht möglich war, zu einer besseren Übereinstimmung mit dem Wert 0,00714 führen würde. Die Temperaturkoeffizienten des unbestrahlen NaCl (0,08 bis 0,17 je nach der Ladungsdauer) sind unzweifelhaft vielmals größer; die bei der Elektrizitätsbewegung sich nach einer etwas länger andauernden Ladung in der Hauptsache abspielenden Vorgänge dürften daher in diesem Falle andere gewesen sein, als in den beiden zuerst erwähnten Fällen.

Auf die einwandfreie Festsetzung der Tatsache, daß die L.-F. mit steigender Temperatur zunimmt und auf die Ermittlung eines möglichst zuverlässigen Temperaturkoeffizienten habe ich geglaubt besonders Gewicht legen zu müssen, und deshalb halte ich es für angemessen, wenn zur Erledigung dieser Aufgabe eine beträchtliche Zeit und Arbeit verwendet wurde.

Es war bei den vorhergehenden Mitteilungen einige Male die Rede von der *Erholung* genannten Erscheinung; bei den Versuchen mit X-bestrahltem NaCl ist diesem Gegenstand ausführlich Erwähnung getan. Es ist von Interesse, über das bei blauem NaCl in dieser Beziehung Gefundene zu berichten. Die Erholung besteht, wie schon früher gesagt, darin, daß eine Platte, die eine Zeitlang Beleuchtung und Spannung ausgesetzt war und dann bei stets unverändert bleibender Spannung auf einige Zeit verdunkelt wurde, bei wieder ein-

getretener Beleuchtung einen Strom von größerer Stärke liefert, als sich ohne Einschaltung dieser Verdunklungspause zur Zeit, wo die Beleuchtung unterbrochen wurde, ergeben hätte.

Als Beispiel für das Auftreten dieser Erscheinung sei folgender Versuch beschrieben. Nachdem durch Versuche, die in der oben angegebenen Weise ausgeführt waren, festgestellt war, wie die Platte sich bei bestimmter Ladung, Beleuchtung und Temperatur in bezug auf ihre L.-F. verhielt, wurde ein neuer Versuch unter gleichen Bedingungen angefangen, diesmal aber durch eine einstündige Verdunklung in dem Augenblick unterbrochen, wo sonst mit der Messung der zur dritten Gruppe gehörenden Stromstärken angefangen wurde. Diese Messung folgte erst beim Wiedereintreten der Beleuchtung und ergab in Summe eine Elektrometerablenkung von 92 Skalenteilen. Wäre dieser dritte Gruppenwert in sonst gewohnter Weise, d. h. ohne Verdunklung nach der zweiten Gruppe, beobachtet worden, so hätte nach den angegebenen Vorversuchen diese Ablenkung 78 Skalenteile betragen. Demnach war durch eine einstündige Verdunklung der stets geladenen Platte eine Erholung von 14 Skalenteilen eingetreten. Nach Ablauf der dritten Versuchsperiode wurde die Platte wiederum verdunkelt und verblieb in diesem Zustande 18 Stunden lang. Als sie dann wieder plötzlich beleuchtet wurde, erhielt ich in 30 Sekunden als vierten Gruppenwert 103,5 Skalenteile, anstatt 69, die sich ergeben hätten, wenn diese vierte Gruppenbeobachtung ohne vorhergehende Unterbrechung der Beleuchtung gemacht worden wäre.

Bemerkenswert ist noch die zeitliche Abnahme der sechs in je 5 Sekunden erhaltenen Ausschläge dieser vierten Gruppe; die Ausschläge betrugen 22, 18,5, 16,5, 16, 16, 14,5 Skalenteile. Sie zeigen eine viel raschere Abnahme im Anfang als die Ausschläge, die in der ohne vorhergehende Verdunklung erhaltenen Gruppe vorgekommen wären. Diese hätten folgenden Betrag gehabt: 12,5, 12, 11, 11, 11, 11,5 Skalenteile. Auch soll noch erwähnt werden, daß, als der besprochene Erholungsversuch durch vier weitere Gruppenbeobachtungen, die nun wieder in Pausen von 30 Sekunden bei fortdauernder Beleuchtung aufeinander folgten, ergänzt worden war, der letzte Gruppenwert (der achten Gruppe) ungefähr dieselbe Größe hatte, wie der der sechsten Gruppe bei einem ohne Unterbrechung

der Beleuchtung verlaufenen Versuch, so daß man sagen kann, daß die eingetretene Erholung durch eine 5 Minuten lange Beleuchtung und Ladung zum größten Teil rückgängig gemacht worden war. Ein übersichtliches Bild der geschilderten Verhältnisse gibt die folgende Zeichnung (Fig. 9).

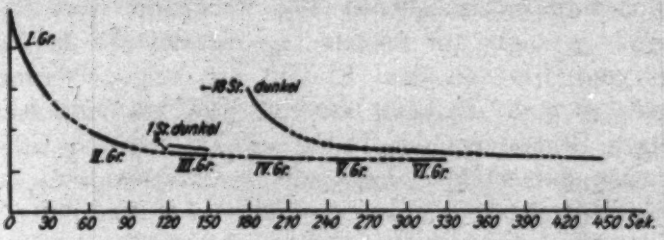


Fig. 9.

Die stärker ausgeführte Kurve bezieht sich auf die Versuche ohne Dunkelpausen, und zwar sollen die ausgezogenen Teile den Verlauf der beobachteten Stromstärken darstellen; die punktierten Teile bilden die Ergänzung dazu. Die schwächer gezeichneten Kurven, von denen der erste Abschnitt bis zur Abszisse 120 Sekunden mit dem stärker ausgezogenen zusammenfallend zu denken ist, gibt die beim Erholungsversuch gefundenen Verhältnisse wieder.

Die Größe der Erholung hatte demnach mit der Zeit der Verdunklung zugenommen; nach welchem Gesetz mußte noch unbekannt bleiben.

Ähnliche Ergebnisse erhielt ich bei Entladungsversuchen: Auch hier beobachtete ich eine Erholung, wenn die Platte bei gleichbleibender Spannung (jetzt = 0) eine genügende Zeit verdunkelt gewesen war.

Sehr deutlich macht sich die Erholung bemerkbar bei Versuchen, die ich zu diesem Zwecke in der Tab. XX wiedergegeben habe; man erkennt gleichzeitig aus ihnen, welchen Einfluß die Erscheinung auf die Leitungsversuche haben kann. Versuch Nr. 15 wurde angestellt, nachdem die geerdete Platte nicht wie sonst nur etwa 9 Stunden, sondern 10 Tage im Dunkeln geblieben war. Die erhaltenen Stromstärken, sowohl jeder einzelne Gruppenwert als auch ihre Summe, sind beträchtlich größer als die bei Innehaltung der täglichen Pausen erhaltenen. Ihr zeitlicher Abfall ist, wie aus den beiden letzten Kolonnen der Tabelle ersichtlich ist, deutlich stärker als sonst.

Es geht also aus diesen Ergebnissen hervor, daß die gewöhnliche, etwa neunstündige Verdunklung nicht genügte, um eine vollständige Erholung der Platte von der vorhergegangenen Behandlung zu erreichen. Der nächste, nun wieder am folgenden Tage angestellte Versuch Nr. 16 ergab noch zu große Werte; auch der am zweitfolgenden Tage erhaltene Wert ist noch zu groß, ja sogar am dritten Tage scheint die Platte noch nicht ganz frei von dem Einfluß der langen Verdunklung gewesen zu sein. Es kann also eine Unterbrechung der regelmäßigen Behandlung der Platte das Ergebnis von Leitungsversuchen auf mehrere Tage sehr beeinflussen und es wird verständlich werden, wenn ich auf S. 141 angegeben habe, daß das allmähliche Steigen der in Kolonne 14 der Tab. XX enthaltenen Verhältniszahlen in den ersten Tagen der mitgeteilten Versuchsreihe von einer vorhergehenden besonderen Behandlung der Platte herrühren könne.

Auch der letzte Versuch (Nr. 29) der Tab. XX zeigt in gleicher Weise den Einfluß einer längeren Verdunklung auf einen folgenden Entladungsversuch: Vergrößerte Stromstärken und deren beschleunigte zeitliche Abnahme.

Der etwas zu große Wert von Versuch Nr. 12, den wir schon auf S. 140 erwähnten, hat vermutlich seinen Grund in einer größeren Erholung der Platte, die eingetreten war, weil bei den vorhergegangenen Versuchen eine geringere Beleuchtungsstärke verwendet wurde.

Da bekanntermaßen eine sehr starke Erwärmung des Steinsalzes seine Färbung und seine Lichtempfindlichkeit ganz zerstören kann, lag es nahe, zu versuchen, ob vielleicht schon eine Temperaturerhöhung, wie sie mit der Platte bei den Temperaturkoeffizientenbestimmungen vorgenommen wurde (auf etwa 31°) imstande war, die Erholung merklich zu beeinflussen. Dazu wurde in den Zyklus der in regelmäßigen Pausen angestellten Leitungsversuche bei Zimmertemperatur ein Versuch eingeschaltet, bei dem während der Dunkelheit eine Temperaturerhöhung auf etwa 30° mit nachfolgender Abkühlung stattgefunden hatte; es ist das der Versuch Nr. 18 der Tabelle. Aus den dort angeführten Zahlen ist zu entnehmen, daß der gesuchte Einfluß einer Temperaturerhöhung von dem angegebenen, freilich geringen Betrag jedenfalls sehr klein ist. (Vgl. den soeben angegebenen Grund für den etwas zu großen

Wert dieses Versuchs.) Mit diesem Versuch wird ein Einwand hinfällig, den man gegen die oben beschriebenen Versuche über den Einfluß der Temperatur der L.-F. machen könnte, daß nämlich die durch Temperaturerhöhung bewirkte Vergrößerung der L.-F. vielleicht nicht eine direkte Folge dieser Erhöhung sei, sondern die Folge einer durch Erwärmung beschleunigten Erholung.

Es ist ja sehr wahrscheinlich, daß einer Erholung durch Verdunklung eine *Ermüdung* als Folge einer Beleuchtung vorangegangen ist, und man könnte vielleicht denken, daß die bei allen Ladungsversuchen mit beleuchtetem blauen NaCl beobachtete zeitliche Abnahme der Stromstärke, die wir als Folge einer Polarisation auffaßten, ganz einer solchen Ermüdung zuzuschreiben sei. Das geht aber nicht an, denn mit dieser Auffassung steht, wie schon oben einmal erwähnt, das Auftreten und das Verhalten des Entladungsstromes, der mit der Erdung der beleuchteten Platte einsetzt, nicht im Einklang. Es ist vielmehr anzunehmen, daß diese zeitliche Abnahme des Ladungsstromes auf zweierlei Ursachen beruht: auf Polarisation und auf Ermüdung und ich legte mir, wie bei den Versuchen mit beleuchtetem X-bestrahlten NaCl, die Frage vor, ob man nicht beide Einflüsse gesondert wahrnehmen könnte. Eine Möglichkeit dazu schien sich zu bieten durch Prüfung der Frage, ob und inwieweit das Superpositionsgesetz, das aussagt, daß die Summe der auf die Zeiteinheit reduzierten Elektrometerausschläge — der Stromstärken — die zuletzt vor, bzw. sofort nach dem Ableiten der Platte zur Erde beobachtet werden, gleich dem zu Anfang der Ladung erhaltenen reduzierten Ausschlag sein soll, zutrifft oder nicht. Ergäbe sich ersteres, so würde man schließen, daß während des Durchgangs des Ladungsstromes durch die beleuchtete Platte keine merkliche Ermüdung stattfand; findet man aber jene Summe kleiner als die Anfangsstromstärke, so hat man Grund für die Annahme, daß der Betrag der Abweichung ein Maß für die eingetretene Ermüdung ist. Bei der Besprechung der gleichen Angelegenheit, die sich auf beleuchtetes X-bestrahltes NaCl bezog (vgl. S. 106) kamen wir zu dem Ergebnis, daß das Superpositionsgesetz in jenem Fall keine Entscheidung herbeibringen konnte und zwar deshalb, weil bei diesem Präparat eine richtige.

d. h. wieder verschwindende Ermüdung nach dieser Methode nicht zu unterscheiden gewesen wäre von der Abnahme der Stromstärke, die eine Folge ist von dem im Verlauf der Zeit bei X-bestrahltem NaCl unter allen Umständen stattfindenden, durch Beleuchtung beschleunigten und nicht ohne wiederholte X-Bestrahlung zu ersetzenden Verlust seiner Lichtempfindlichkeit. Letztere Erscheinung kommt nun, wie schon erwähnt, bei dem blauen Steinsalz wenigstens in gleicher Weise[1]) nicht merklich vor, und deshalb kann das Superpositionsgesetz hier den gewünschten Dienst tun.

Ich habe deshalb mit dem blauen NaCl einige Ladungs-Entladungsversuche angestellt und zwar nach dem gleichen wie auf S. 136 mitgeteilten Schema nur mit etwas anderer Beleuchtungsstärke und Vorbereitung.[2]) Um bei der Entladung möglichst gleiche Versuchsbedingungen wie bei der Ladung zu erhalten, wurde sofort nach Beendigung der zur sechsten Gruppe des Ladungsversuchs gehörenden Beobachtungen die Platte zuerst verdunkelt, dann geerdet und erst 6 Minuten nach der Erdung dem Licht der Nernstlampe ausgesetzt. Mit dieser Beleuchtung setzte der kräftige Entladungsstrom ein, dessen zeitlicher Verlauf in gleicher Weise wie beim Ladungsstrom beobachtet wurde. Von einem dieser sehr gut untereinander übereinstimmenden Versuchen sei das Nähere mitgeteilt. Die Einzelwerte der ersten Gruppe des Ladungsversuches waren: 46, 33, 30, 27, 25, 24 Skalenteile.

---

1) Es liegt nahe, im blauen NaCl selbst eine dauernd tätige Strahlenquelle zu vermuten, die einen entstehenden Verlust an Lichtempfindlichkeit immer wieder zu ersetzen vermag. Eine Ermüdung würde nach dieser Vorstellung eintreten, wenn infolge von Beleuchtung mehr an Lichtempfindlichkeit zerstört wird, als diese Strahlung erzeugt; eine darauf nach Verdunklung beobachtete Erholung bestünde dann in einem Wiederherstellen des anfänglichen Gleichgewichtes zwischen Erzeugen und Verschwinden der Lichtempfindlichkeit. Diese Annahme würde nicht in Widerspruch stehen mit dem folgenden Satz des Textes, führt aber zu schwer mit der Erfahrung zu vereinbarenden Konsequenzen. Zu diesen Erfahrungen gehört z. B. die Tatsache, daß das blaue NaCl im Dunkeln keine auffallend größere Leitfähigkeit besitzt als das ebenfalls verdunkelte X-bestrahlte und weiter, daß die als Nachwirkung von hell auf dunkel bezeichnete Erscheinung bei beiden Präparaten so sehr verschieden stark ausgeprägt ist.

2) Die Versuchsergebnisse sind nicht in der Tabelle enthalten.

Die der letzten, sechsten Gruppe: 9,5, 10, 9, 10, 9, 9 Skalenteile. Die Gruppenwerte der sechs Gruppen betrugen 185, 98, 79, 68,5, 62, 56,5 Skalenteile. Die entsprechenden Zahlen für den Entladungsstrom waren: Einzelwerte der ersten Gruppe: 30,5, 21, 17, 15, 13, 12 Skalenteile; die Gruppenwerte: 107, 41, 28, 22, 18, 15 Skalenteile. Spannung und Stromstärke der Lampe, sowie Temperatur waren bei der Ladung dieselben wie bei der Entladung. Die Ladespannung betrug 103,5 Volt. Nach dem Superpositionsgesetz ist der erste Wert der ersten Gruppe des Ladungsversuches (46 Skalenteile) mit der Summe von dem letzten Wert der sechsten Gruppe dieses Versuchs (9 Skalenteile) und dem ersten Wert der ersten Gruppe des Entladungsversuches (30,5 Skalenteile), also mit 39,5 Skalenteilen zu vergleichen. Der dabei sich ergebende Unterschied von 6,5 Skalenteilen stellt den Betrag der Abweichung vom Superpositionsgesetz dar und wäre nach dem obigen als die Größe der bei diesem Ladungsversuch während der 6 Minuten dauernden Beleuchtung eingetretenen Ermüdung zu betrachten. Allein bei näherer Überlegung, insbesondere nach Betrachtung der Kurven, die man sich mit Hilfe obiger Werte gezeichnet hat, stößt man doch noch auf ein Bedenken; die beiden Kurven verlaufen in ihrem sich auf die ersten Gruppen beziehenden Teil so steil und veränderlich, daß es vielleicht doch nicht ohne weiteres gestattet sein dürfte, die in dieser Versuchsperiode in je 5 Sekunden erhaltenen Ablenkungen des Elektrometers als ein Maß für die auf die Zeiteinheit reduzierten Stromstärken zu halten, auf die sich doch nur das Gesetz beziehen kann. Eine ganz einwandfreie Entscheidung über die Frage, ob eine Ermüdung stattgefunden hat oder nicht, liefern obige Versuche somit zunächst doch noch nicht. Erst nach Berücksichtigung der Ergebnisse eines andern Versuches, von dem gleich die Rede sein wird, wird man mit ziemlicher Sicherheit schließen dürfen, daß der beschriebene Versuch wirklich das Vorhandensein einer Ermüdung erkennen ließ.

Dieser neue Ladungs-Entladungsversuch wurde kurze Zeit nach dem vorhin beschriebenen angestellt. Zum Unterschied von jenem vorhergehenden wurde jetzt die Platte benutzt, nachdem sie auf einem unten zu beschreibenden Weg vorher kräftig ermüdet worden war, so daß man nach gemachten Erfahrungen erwarten konnte, daß sie während des nun folgenden,

verhältnismäßig kurz dauernden Versuches nur noch wenig mehr ermüden würde. Dieser Versuch ergab folgendes:

Einzelwerte der ersten Gruppe des Ladungsversuches:
38, 29, 26, 22, 21, 22 Skalenteile.

Einzelwerte der letzten Gruppe des Ladungsversuches:
9, 9, 8, 9, 8,5, 9 Skalenteile.

Gruppensummen des Ladungsversuches:
158, 88, 72, 63, 57, 52,5 Skalenteile.

Einzelwerte der ersten Gruppe des Entladungsversuches:
29, 19, 15, 14, 12, 11 Skalenteile.

Gruppensummen des Entladungsversuches:
100, 38, 26, 20, 16,5, 13,5 Skalenteile.

Hier zeigte sich nun mit Zugrundelegung der in 5 Sekunden erhaltenen Ausschläge, daß das Superpositionsgesetz zutraf. Es ist nämlich 38 Skt. $= 9 + 29$ Skt. Die in 5 Sekunden beobachteten Ausschläge, gegen deren Anwendung vorhin Verdacht geschöpft wurde, haben sich somit doch als genügend sicher für eine Prüfung des Gesetzes erwiesen; denn die aus ihnen abzuleitende Schlußfolgerung, daß keine merkliche Ermüdung in dem gegebenen Falle vorhanden war, stimmt mit den Tatsachen überein. Folglich war auch ihre Verwendung bei dem vorher besprochenen Versuch einwandfrei, d. h. jener Versuch führte mit größter Wahrscheinlichkeit auf das Vorhandensein einer Ermüdung.

Ich kann aber auch einen direkten Beweis für die Richtigkeit der Angabe beibringen, daß das blaue NaCl durch Beleuchtung allein, also auch ohne gleichzeitigen Stromdurchgang sich ermüdet, d. h. vorübergehend unempfindlicher wird. Diesen Beweis hat ein Ladungsversuch geliefert, der in die Reihe der übrigen, in den angegebenen regelmäßigen 24stündigen Pausen angestellten Versuchen in der Weise eingeschaltet wurde, daß ihm nicht nur die gewohnte Wartezeit von 24 Stunden mit dem angegebenen Wechsel von Beleuchtung und Verdunklung bei Erdung voranging, sondern noch ein ganzer Tag mit dauernder Beleuchtung der geerdeten Platte. Die Beleuchtung geschah, um die Nernstlampe nicht länger als nötig zu beanspruchen, mit der jetzt in 20—25 cm Entfernung aufgestellten 50kerzigen Metallfadenlampe, deren Strahlung durch eine 3 cm dicke Wasserschicht gefiltert war.

Vorangegangene und nachfolgende, in normalem Tempo angestellte Versuche bei nahezu gleicher Temperatur, Ladespannung und Nernstlampenbeleuchtung hatten untereinander befriedigende, übereinstimmende Werte der Stromstärken ergeben, so daß ich sicher war, daß die Platte diese Werte auch geliefert haben würde, wenn sie nicht durch die eingeschaltete 24stündige Beleuchtung besonders vorbereitet gewesen wäre. Diese normalen Gruppenwerte betrugen: 185, 98, 79, 68,5, 62, 56,5 Skalenteile; die mit der besonders vorbereiteten Platte dagegen: 158, 88, 72, 63, 57, 52,5 Skalenteile.[1])

Hier läßt sich somit die in 24 Stunden eingetretene Ermüdung ohne weiteres deutlich erkennen. Ihr Einfluß macht sich während des ganzen Versuchs bemerkbar, aber, wie man aus den Verhältniszahlen entsprechender Gruppenwerte 1,15, 1,12, 1,10, 1,10, 1,10 und 1,08 ersieht, in mit der Zeit abnehmendem Maß, was sich ja erwarten ließ.

Schließlich finden wir auch in der mehrfach erwähnten Tab. XX einen Versuch, der den Einfluß einer durch Beleuchtung, und zwar diesmal einer sehr kurzen, bewirkten Ermüdung auf die nachfolgende L.-F. Bestimmung zeigt. Es ist das der Versuch Nr. 4. Der erste dort verzeichnete Gruppenwert ist merklich kleiner als der bei den vorhergehenden Versuchen erhaltene und zwar infolge einer unbeabsichtigten, kurz vor dem Versuch stattgefundenen, etwa nur 40 Sekunden dauernden Beleuchtung mit der Nernstlampe. Diesmal erstreckte sich der Einfluß dieser Beleuchtung entsprechend ihrer kurzen Dauer nur auf den Anfang der Versuchszeit.

Zusammenfassend können wir sagen: *Eine Ermüdung des blauen Steinsalzes tritt infolge von Beleuchtung mit weißem Licht, sowohl bei Stromdurchgang, als auch ohne Strom ein. Eine Erholung von dieser Ermüdung findet durch Verdunklung ebenfalls in beiden Fällen statt. Die Dauer des Fortbestehens einer Ermüdung nach eingetretener Verdunklung sowie auch ihre Größe hängt von Dauer und Intensität der sie erzeugenden Beleuchtung ab.* Welche Wellenlänge am wirksamsten ist, ob der Stromdurchgang etwa einen beschleunigenden Einfluß ausübt, wie der zeitliche Verlauf beider Erscheinungen be-

1) Dieser Versuch ist der bereits auf S. 106 erwähnte.

schaffen ist, wurde bisher nicht untersucht. Jedenfalls muß dieser Verlauf derartig sein, daß ein Gleichgewicht zwischen der bei jedem Ladungsversuch entstandenen Ermüdung und der darauffolgenden Erholung zustande kommen kann, nachdem die Platte eine genügende Anzahl von Malen einer gleichbleibenden Behandlung unterworfen war. Innerhalb einer Temperaturänderung von 18—30° war ein Temperatureinfluß auf beide Erscheinungen nicht zu bemerken.

Aus dem in den letzten Abschnitten Mitgeteilten ist zu entnehmen, daß in den nahezu 24stündigen Pausen, die je zwei Ladungsversuche in der Regel voneinander trennten (vgl. S. 135), folgendes vor sich ging. In dem ersten Teil dieser Pause, in der die geerdete Platte dauernd beleuchtet wurde, verschwand jedenfalls zum größten Teil die Polarisation; die Beleuchtung war nötig, um diesen im Dunkeln sehr langsam verlaufenden Prozeß zu beschleunigen. Gleichzeitig vermehrte sich die bei dem vorhergehenden Ladungsversuch schon eingetretene Ermüdung. In dem zweiten Teil der Pause, wo die Platte verdunkelt war, trat eine, wenn auch nicht bis zum vollständigen Verschwinden der Ermüdung genügende, doch soweit reichende Erholung ein, daß die durch einige Tage hindurch in der gleichen Weise behandelte Platte sich zum Beginn eines neuen Ladungsversuches wieder in demselben Ermüdungszustand befand wie am Anfang des vorhergegangenen Versuchs. In dieser Weise konnten Versuchsergebnisse erhalten werden, die untereinander vergleichbar sind.

Man wird weiter verstehen, daß die beiden Erscheinungen, so lange ihr Einfluß noch nicht genauer bekannt geworden war, verwirrend auf die Untersuchung eingewirkt und deshalb die Fertigstellung der Arbeit lang verzögert haben. Bei einer eventuellen Fortsetzung der Untersuchung wird man die beiden genannten Faktoren wohl auch noch genauer berücksichtigen müssen als bisher geschah, wozu vor allem wieder eine genauere Kontrolle der Beleuchtungsintensität erforderlich sein würde. Eine zur Beschleunigung der Arbeit sehr erwünschte Abkürzung der Pausen wird sich dann in manchen Fällen vielleicht auch erreichen lassen und ähnliches mehr.

Die beschriebenen Versuche mahnen auch zur Vorsicht, wenn es sich darum handeln würde, zu beurteilen, ob eine Platte aus blauem NaCl polarisationsfrei und nicht ermüdet

ist; eine beliebige, etwa aus einem Vorrat entnommene, bis dahin nicht zu Ladungsversuchen verwendete Platte dürfte jedenfalls nicht ohne weiteres als frei von Polarisation und Ermüdung betrachtet werden; für gewöhnlich ist ihre Vorgeschichte so, daß das Gegenteil der Fall ist.

Es sei gestattet, noch über einige verwandte Erfahrungen hier Mitteilung zu machen.

Den Versuchen der Tabelle waren viele vorausgegangen, bei denen in den Pausen die Verdunklung der längeren Beleuchtung nicht gefolgt, sondern vorangegangen war. Sie lieferten, wie jetzt verständlich ist, infolge stärkerer Ermüdung des NaCl kleinere Werte der Stromstärke als die der Tabelle, und die Stromstärke nahm während eines jeden Versuchs rascher ab als bei den mitgeteilten Versuchen.

Oben wurde schon erwähnt, daß die ersten Versuche der Tab. XX wahrscheinlich noch unter dem Einfluß von vorhergegangenen Versuchen standen. Von diesen früheren Versuchen waren nur wenige zur Beantwortung der in diesem Abschnitt behandelten Fragen verwendbar, weil sie keine genügend untereinander übereinstimmenden Ergebnisse geliefert hatten. Der erst gegen Ende dieser älteren Versuchsreihe erkannte Grund für diesen Mangel lag zum Teil in nicht genügender Konstanthaltung des Nernstlampenstromes, zum Teil darin, daß die damals zur Entfernung der Polarisation verwendete Tageslichtbeleuchtung von Tag zu Tag zu veränderlich war.

Ein gutes Beispiel für die von der Erholung abgesehenen Erhaltung des elektrischen Zustandes einer lichtempfindlichen Steinsalzplatte im Lauf einer gewissen Zeit liefert das Verhalten des blauen Steinsalzes nach dem Ladungs-Entladungsversuch, der auf S. 157 erwähnt wurde. Da die Arbeit für eine Zeitlang unterbrochen werden mußte, wurde die gleich nach der letzten Bestimmung des Entladungsstromes verdunkelte Platte aus ihrem Kästchen herausgenommen und dann mit ihrer Fassung in einem Exsikkator im Dunkeln 21 Tage lang aufbewahrt; ihre beiden Belegungen waren dabei isoliert. Nach Ablauf dieser Zeit wurde die untere Belegung der Platte an der Stelle, wo der Anschluß an die Elektrometerleitung stattfindet, bei mäßigem Tageslicht etwas nachgraphitiert; darauf wurde die Platte wieder in ihr Kästchen verbracht, verdunkelt und auf beiden Seiten geerdet. Einige

Minuten später wurde sie zuerst im Dunkeln auf Polarisation geprüft — mit negativem Resultat — und dann mit dauernd geerdeter oberer Elektrode plötzlich der Beleuchtung der Nernstlampe ausgesetzt. Bei der gleichzeitig angefangenen Bestimmung der entstehenden Elektrometerausschläge ergab sich nun folgendes: in den ersten 5 Sekunden ein positiver Ausschlag von 0,8 Skalenteilen, in den folgenden Zeitabschnitten wachsende, später langsam abnehmende negative Ausschläge. Das Maximum dieser negativen Ausschläge, etwa 7 Skalenteile pro Minute, wurde etwa 1 Minute nach Anfang der Beleuchtung erreicht. Nach früheren Erfahrungen sind nun diese negativen Ausschläge sicher als im Dunkeln erhaltene Reste der Polarisation anzusprechen, die etwa 3 Wochen vorher in der positiv geladenen Platte erzeugt wurde; ihre letzte damalige Bestimmung hatte bei Beleuchtung etwa 30 Skalenteile pro Minute ergeben. Wie erklärt sich aber der am Anfang der neuen Bestimmung beobachtete positive Ausschlag und das in der ersten Minute wahrgenommene Ansteigen der negativen Ausschläge? Beide beruhen offenbar auf einer und derselben Ursache: Anfänglich trat positive Elektrizität auf, deren Betrag in den ersten 5 Sekunden größer war als der der normalerweise vorhandenen negativen Polarisationselektrizität; die Zufuhr der ersteren Elektrizitätsart nahm dann allmählich ab, so daß die letztere mehr und mehr in die Erscheinung trat. Es fragt sich nur, welchem Vorgang dieses Auftreten von positiver Elektrizität zuzuschreiben ist. Ich kann nicht das vorhergegangene geringe Graphitieren der unteren Belegung als Ursache ansehen und denke mir vielmehr, daß sich folgendes zugetragen haben könnte. Im Dunkeln nahm erfahrungsgemäß der Polarisationszustand der vorher geladenen Platte sehr langsam — außerordentlich viel langsamer als bei Beleuchtung — ab; während nun, wie es der Fall war, die Platte mit gut isolierten Belegungen längere Zeit unbenützt lag, entstand als Folge der Abnahme der Polarisation in ihr — an welchen Stellen bleibe unbestimmt — ein Zustand — eine Art Selbstaufladung —, der dem ähnlich ist, wie er in einer noch mit von positiver Ladung herrührender Polarisation behafteten Glasplatte durch eine schwächere Neuladung mit negativer Elektrizität erzeugt werden kann. Durch Versuche von Hopkinson, die gelegentlich vor manchen

Jahren im hiesigen Institut von Hrn. J. Brentano in der Hauptsache bestätigt wurden — ist bekannt, daß eine so vorbereitete Leidener Flasche bei geeigneter Wahl der Ladungszeiten bei ihrer Entladung unmittelbar aufeinanderfolgend zuerst einen positiven und darauf einen negativen Rückstand liefert. Das ist aber in bezug auf den Wechsel, der bei der Entladung aufgetretenen Elektrizitätsarten genau dasselbe Verhalten, das unsere beleuchtete NaCl-Platte zeigte.

Ich hielt es deshalb für erwünscht, über diese bei Glas wahrgenommene doppelte Polarisationsbildung auch mit blauem NaCl einen direkten Versuch zu machen. Es wurde die Platte zu diesem Zweck bei Beleuchtung 2 Minuten lang mit +100 Volt geladen und dann diese Ladung bei fortgesetzter Beleuchtung plötzlich mit einer von −50 Volt vertauscht, die eine Minute lang erhalten blieb. Nach Verdunklung wurde geerdet und 20 Minuten später mit der Beleuchtung und der Beobachtung des Entladungsstromes begonnen. Dabei ergab sich in den ersten 10 Sekunden eine das Auftreten von positiver Elektrizität anzeigende verzögerte Bewegung des Lichtzeigers — im ganzen entstand ein Ausschlag von 7 Skalenteilen — und darauf folgend eine zuerst beschleunigte, dann verlangsamte Bewegung nach der negativen Seite, die etwa 4 Minuten lang verfolgt wurde. Der erste positive Ausschlag entsprach somit der Polarisation der zuletzt angelegten negativen Ladung, der folgende negative Ausschlag der Polarisation der anfänglich angelegten positiven Ladung. Die wohl auf räumliche Ladungen im NaCl beruhende Erscheinung zur Zeit weiter zu verfolgen, hatte ich keine Gelegenheit, nur sei noch kurz ein weiterer Versuch erwähnt, bei dem bei fortdauernder Beleuchtung +100 Volt mit −100 Volt Ladung wechselten und beide Ladungen gleiche Zeit (6 Min.) angelegt blieben. In diesem Fall war an dem Entladungsstrom kein Zeichenwechsel innerhalb der Beobachtungszeit von einer halben Stunde wahrzunehmen. Seine Richtung (nach positiven Zahlen) entsprach dem Zeichen der letzten Ladung, seine Stärke war aber geringer als ohne vorhergegangene entgegengesetzte Ladung.

Daß dieses auf den letzten Seiten besprochene Nachwirken einer Ladung auf eine folgende, bzw. auf den sich daran anschließenden Entladungsvorgang wiederum eine Erscheinung ist, die bei Untersuchungen der vorliegenden Art nicht aus dem

Auge verloren werden darf, braucht wohl kaum erwähnt zu werden. Manches anfänglich rätselhaft erschienene Verhalten des NaCl hat sich so nach und nach bis zu einem gewissen Grad aufgeklärt, oder wenigstens als gesetzmäßig erkennen lassen.

Bei den Versuchen mit X-bestrahltem NaCl war deutlich hervorgetreten, daß der Dunkelstrom wesentlich stärker ist, wenn die Platte kurz vorher einer Beleuchtung ausgesetzt worden war. Ebenso zeigte sich die Platte sehr merklich empfindlicher für Rotbeleuchtung, wenn eine Beleuchtung mit Licht kürzerer Wellenlänge kurz vorhergegangen war.[1]) Da beide vielleicht auf gleicher Ursache beruhende Erscheinungen sich bei dem blauen NaCl anfänglich, wenn überhaupt, so doch nur in geringem Maße gezeigt hatten, war es mit Rücksicht auf die Vorstellung, die man sich von der Ursache der vermehrenden Wirkung des Lichts auf die L.-F. bilden möchte, von Interesse, durch einen besonderen Versuch festzustellen, ob sich eine solche Nachwirkung „von Hell auf Dunkel" bei blauem Steinsalz überhaupt nachweisen läßt oder nicht.

Es wurde deshalb die mehrmals erwähnte Platte, nachdem sie durch Beleuchtung von Polarisation genügend befreit war und sich darauf während einer mehrtägigen Dunkelheit bei Ableitung zur Erde auch genügend erholt hatte, auf Dunkelstrom diesmal mit 1000 Volt Ladespannung geprüft. Dabei ergab sich, wie bei andern ähnlichen Gelegenheiten, ein Dunkelstrom von sehr geringer Stärke: in der Beobachtungszeit 1 bis 6 Sekunden nach Anlegen der Spannung ein paar Skalenteile, in den folgenden einige Zehntel. Dann wurde nach Entfernung der Spannung, nach Erdung, die Platte etwa 1 Minute lang der Beleuchtung der auf etwa 20 cm genäherten Nernstlampe mit Zwischenschaltung des Wassertrögchens ausgesetzt. Als dann nach Verdunklung wieder 1000 Volt angelegt wurden, erhielt ich einen Dunkelstrom, der in den ersten Minuten ungefähr 10mal, in späteren Zeiten noch beträchtlich mehr stärker war als der vorher wahrgenommene. Auch die daraufhin bei Entladung gemessene Polarisation war kräftiger, als wenn keine

---

1) Über diese zuletzt erwähnten Versuche wird weiter unten berichtet.

Beleuchtung stattgefunden hätte. Demnach ist es sicher, daß eine Beleuchtung der beiderseits zur Erde abgeleiteten blauen Steinsalzplatte eine Nachwirkung ausübt in der Weise, daß ihre L.-F. im Dunkeln dadurch vermehrt wird. Die Nachwirkung von „Hell auf Dunkel", die wir bei X-bestrahltem NaCl fanden, tritt somit, wenn auch verhältnismäßig viel schwächer, auch bei blauem Steinsalz auf. Gleich wenig wie diese Nachwirkung äußerte sich beim blauen Steinsalz die bei X-bestrahltem NaCl zu beobachtende, die L.-F. vermehrende Nachwirkung, die eine vorangegangene Beleuchtung auf das Ergebnis eines Versuches mit beleuchteter Platte ausübt. Es überwog bei blauem Steinsalz immer der Einfluß der von einer vorangegangenen Beleuchtung bewirkten Ermüdung, und die L.-F. erschien bei dem darauffolgenden Versuch verkleinert (vgl. z. B. S. 159), während das Gegenteil bei X-bestrahltem Steinsalz wahrgenommen werden konnte.

Diese erwähnten Verschiedenheiten sind m. E. neben der Verschiedenheit in der Wellenlänge des Lichts maximaler Wirkung, in der Beständigkeit der Aktivität und in der Farbe sichere Merkmale für das Bestehen von einem wesentlichen Unterschied zwischen der Konstitution oder dem Verhalten der wirksamen Teilchen von blauem und von X-bestrahltem NaCl.

Die beschriebenen Erscheinungen haben in mancher Beziehung viel Ähnlichkeit mit denen der von Hrn. Hallwachs an Metallen entdeckten Photoelektrizität. Die Herren Elster und Geitel fanden[1]), daß eine Anzahl von Körpern, unter ihnen auch NaCl und KCl durch Kathodenbestrahlung bedeutend stärker photoelektrisch gemacht werden können, und schrieben diese so erworbene Eigenschaft dem Vorhandensein von kolloidal gelösten Metallen zu, die durch jene Bestrahlung aus ihrer Verbindung im Körper ausgeschieden werden. Daß auch die γ- und δ-Strahlen des Ra eine solche Wirkung ausüben können, wiesen die Herren St. Meyer und Przibram nach.[2]) Vielleicht kommt bei dieser Zusammenstellung ähn-

---

1) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 59. S. 487. 1896.
2) St. Meyer u. Przibram, Wiener Berichte 121. S. 1413. 1912.

licher Erscheinungen auch noch das seit langer Zeit bekannte Verhalten des Selens und Jodsilbers und ähnlicher Körper in Betracht. Es ist nun wohl kaum zu bezweifeln, daß bei all diesen und insbesondere bei den drei erstgenannten Versuchen im wesentlichen dieselben elektrischen Vorgänge eine Rolle spielen, wie bei den in der vorliegenden Mitteilung beschriebenen Versuchen mit X-bestrahlten Präparaten und mit natürlich blau gefärbtem NaCl: Bewegung von Elektronen. Bei jenen Versuchen wurde der Austritt von Elektronen aus der beleuchteten Oberfläche an dem dadurch bewirkten positiven Aufladen der Körper oder in einer Abnahme seiner negativen Ladung wahrgenommen; es schien mir von Interesse zu sein, zu untersuchen, ob auch bei unserer, von der sonst benutzten etwas abweichenden Versuchsanordnung eine positive Aufladung des beleuchteten blauen NaCl, d. h. ein Eintritt von Elektronen in die Elektroden stattfindet, und zweitens, ob auch ein „Strom" bzw. ein „Polarisationsstrom" zustande kommt, wenn von einer X-bestrahlten Platte nicht auch die Oberfläche, sondern nur eine von den Elektroden genügend entfernte, im Innern des Kristalles gelegene Schicht beleuchtet wird.

Es wurde die von Polarisation befreite und gut ausgeruhte, oben geerdete Platte plötzlich der Beleuchtung der auf 17 cm genäherten Nernstlampe ausgesetzt, nachdem ihre untere Belegung mit der von der Erde abgetrennten Elektrometerleitung in Verbindung gesetzt und vorher der selbständige Elektrometergang beobachtet worden war. Ich erhielt zwar geringe, aber doch genügend sichere positive Ausschläge: in der ersten Minute 3,2 Skalenteile, in der folgenden etwa einen Skalenteil. Da nun durch ein nur das Glyzerintrögchen freilassendes Diaphragma aus schwarzem Papier alle eventuell störenden Teile abgeblendet waren, und die vielleicht noch in Betracht kommende Graphitschicht der unteren Belegung infolge der Färbung der 0,3 cm dicken Platte nur wenig Licht erhielt, so halte ich den Nachweis, daß die Beleuchtung den Austritt von Elektronen auf der Seite der Glyzerinelektrode veranlaßte, für erbracht. Wahrscheinlich findet der gleiche Vorgang auch an der unteren Elektrode statt, aber infolge der Lichtschwächung in der farbigen Platte in geringerem Maße.

Zu dem zweiten oben erwähnten Versuch verwendete ich eine 3 zu 4 cm große, 1 cm dicke klare NaCl-Platte, die mit einer oberen und einer 1 cm^2 großen unteren Graphitelektrode sowie mit einem Schutzring versehen war. Auf der einen, polierten 1 zu 3 cm großen Schmalseite war ein undurchsichtiges Schirmchen angebracht, das die Seite bis auf einen 1 cm breiten und 0,2 cm hohen Spalt verdeckte; die gegenüber liegende, rauh gemachte Stirnfläche war geschwärzt. Nach einer eine Minute dauernden X-Bestrahlung wurde die Platte in eines der Kästchen so aufgestellt, daß ein durch jenen Spalt abgegrenztes, horizontales Lichtbündel, ohne das Innere des Kästchens merklich beleuchten zu können, durch die Mitte der Platte etwa 0,4 cm von jeder Elektrode entfernt geschickt werden konnte. Nach Anlegen der Spannung von etwa 1500 Volt im Dunkeln, was, von der Influenzelektrizität abgesehen, nur einen sehr schwachen Strom zur Folge hatte, wurde das parallel gemachte Licht einer in großer Entfernung aufgestellten, kleinen Bogenlampe plötzlich zugelassen; sofort zeigte sich am Lichtzeiger das Auftreten eines sehr kräftigen, mit der Zeit an Stärke abnehmenden, aber lang anhaltenden Stromes, in ganz ähnlicher Weise wie bei den Versuchen, bei denen die Elektroden, d. h. die Oberfläche der Platte mitbeleuchtet waren. Nach Erdung trat ebenfalls wie früher ein kräftiger Polarisationsstrom auf. Durch dieses Ergebnis ist nachgewiesen, daß im Innern der Platte im wesentlichen die gleichen Prozesse verlaufen wie in der nächsten Nähe ihrer Oberfläche; was meines Erachtens wohl zu erwarten war, aber doch einer Bestätigung bedurfte.

Untersuchung der L.-F. von blauem Steinsalz mit spektral zerlegtem Licht.

Bei einer ersten Reihe von zu diesem Zweck angestellten Versuchen besaß die mehrfach erwähnte hellblaue Platte auf ihrer unteren Seite, ähnlich wie die X-bestrahlte NaCl-Platte von S. 124, eine zweifache Graphitbelegung, oben war sie ganz mit Graphit eingerieben; die Beleuchtung mit spektral zerlegtem Sonnenlicht geschah demnach wieder von der Seite, so daß das Licht die zwei hintereinander gelegenen Teile der unteren Belegung überstrich. Bezüglich der weiteren An-

ordnung und des Verlaufes der Versuche kann ich auf das darüber bei Gelegenheit der Beschreibung der in ganz ähnlicher Weise mit X-bestrahltem NaCl angestellten Versuche Gesagte verweisen. Die ersten weit zurückliegenden Versuche sind zwar nicht mit erreichbarer Genauigkeit angestellt, doch genügen sie, um daraus Einiges zu entnehmen, das von Wert ist. Spätere Versuche sind exakter ausgeführt, und da über diese ausführlicher berichtet werden soll, wird es angezeigt sein, von den älteren Versuchen nicht die einzelnen Beobachtungen und alle daraus abgeleiteten (λ, S)-Kurven, sondern nur die hauptsächlichsten Resultate mitzuteilen.

Von diesen Ergebnissen, die im späteren Verlauf dieser Mitteilung noch eine besondere Verwendung finden werden (vgl. S. 175), möchte ich zunächst das anführen, was sich auf die Lage der maximalen Lichtwirkung im Wellenlängengebiet bezieht. Aus den 12 gewonnenen (λ, S)-Kurven wurde entnommen, daß die Wellenlänge des Lichtes größter Wirksamkeit in der Nähe von 490 $\mu\mu$ liegen muß. In Anbetracht der erwähnten geringeren Genauigkeit dieser Versuche war die Interesse bietende Frage gerechtfertigt, ob nicht genauere Versuche doch zu dem Resultat führen würden, daß sowohl das blaue Steinsalz wie das gelbe X-bestrahlte (bei dem $\lambda_{max.} = 475\,\mu\mu$ gefunden war) von der gleichen Lichtart am stärksten beeinflußt werden, und es war deshalb geboten, durch neue Versuche das vor längerer Zeit erhaltene Resultat einer genauen Prüfung zu unterwerfen. Das ist dann auch geschehen und zwar in einer Weise, die etwas abweicht von der soeben beschriebenen, die aber zu einer sicheren Entscheidung geführt hat.

Die noch vorhandene blaue Steinsalzplatte wurde auf beiden Seiten abgeschliffen, dann auf der unteren Seite mit einer kreisförmigen Graphitbelegung (Durchmesser 1,13 cm) und Schutzring, auf der oberen mit einem aufgekitteten Glyzerintrögchen versehen und darauf in bekannter Weise in das Kästchen gelegt. Zur Beleuchtung wurde wieder, wie es bei den Versuchen mit X-bestrahltem NaCl beschrieben ist, mit dem Gitter zerlegtes Sonnenlicht verwendet, das aber diesmal nicht von der Seite in die Platte eindrang, sondern von oben, durch ein auf das obere Kästchenfensterchen aufgesetztes total reflektierendes Prisma dorthin geleitet. Die mittlere Wellenlänge des die Graphitbelegung beleuchtenden und deren Durchmesser

entsprechend etwa 4,5 $\mu\mu$ breiten Spektralbezirkes wurde wieder aus der Lage einer Fraunhoferschen Linie auf dem vertikalen Maßstab bestimmt, nachdem vorher nochmals der gegenseitige Abstand der Linien auf dem Maßstab und außerdem die Stelle, wo ein von der Mitte des Gitters ausgehender, die Mitte der Steinsalzbelegung treffender Lichtstrahl die Ebene des Maßstabes durchdringt, gemessen war.

Die Bestimmung der Stromstärke des in 10 Sek. auftretenden Elektrometerausschlages wurde jetzt so vorgenommen, daß die Spannung einige Minuten vor Anfang der Versuchsreihe im Dunkeln angelegt wurde und dann dauernd bis zum Schluß angelegt blieb. Dadurch ging man zwar der Möglichkeit verlustig, zwischendurch den Polarisationsstrom messen zu können, indessen konnte man sich, wie unten angegeben wird, von seinem Einflusse auf die Lage des Maximums der Lichtwirkung in anderer Weise befreien; diese Art des Arbeitens hatte den Vorteil, die Versuche rascher hintereinander ausführen zu können, was in Anbetracht der unsicheren Konstanz der Sonnenstrahlung sehr erwünscht war. Der zu beobachtende, in 10 Sek. erfolgende Elektrometerausschlag nahm seinen Anfang im Augenblick, wo die jedesmal nur 11—12 Sek. dauernde Beleuchtung der Platte einsetzte. Dann wurde bei verdunkelter Platte die Beleuchtung rasch in der früher angegebenen Weise geändert und nun wiederum wie vorher die Stromstärke bestimmt. Bei den meisten Versuchsreihen wurde das Spektrum bei jedem Versuch in beiden Richtungen wenigstens je einmal oder auch mehrmals durchlaufen.

Für die Mitteilung kommen zunächst die Ergebnisse von 13 Versuchsreihen, die sich über das Wellenlängengebiet 709 bis 372 $\mu\mu$ erstrecken, in Betracht. Um nicht zu ausführlich zu werden, gebe ich nicht die direkt gemessenen Stromstärken an, sondern ihre reduzierten (vgl. S. 171) Werte (Tab. XXIII). Ebenfalls verzichte ich mit Rücksicht auf die Kostspieligkeit einer Drucklegung auf die Wiedergabe sämtlicher λS-Kurven und veröffentliche als Beispiel für den Verlauf der direkt beobachteten Lichtempfindlichkeitskurve mit ihren Unregelmäßigkeiten, deren Ursachen schon zum Teil besprochen wurden, nur die Fig. 10, in der zwei unmittelbar aneinander sich anschließende Versuchsreihen, bei denen das Spektrum in abwechselnder Reihenfolge durchlaufen wurde, dargestellt sind.

Tabelle XXIII.

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	E	Mittel
709						2,0	1,5	3,0	1,5	1,5	1,5	1,5	2,0	14,5	1,8
681	2,0	3,0	1,5	2,0	2,0	4,0	2,5	5,5	2,5	3,0	3,0	3,5	4,5	39,0	3,0
653	7,0	7,0	4,5	4,5	5,0	9,5	6,0	11,5	5,0	6,0	5,5	7,0	9,0	87,5	6,7
625	12,0	14,5	10,0	9,5	11,0	14,5	11,0	21,0	10,5	13,0	11,0	13,5	16,5	168,0	13,0
597	19,5	23,0	15,5	16,5	18,0	20,0	18,5	28,0	18,5	20,5	18,0	21,0	20,5	257,5	19,8
569	25,0	26,0	25,0	23,5	24,0	25,0	25,0	29,0	26,5	26,0	24,5	24,5	27,5	331,5	25,5
541	29,0	29,5	25,5	26,5	28,0	29,0	28,5	29,0	30,0	30,0	28,0	29,0	27,5	369,5	28,4
513	29,0	29,0	29,0	24,5	30,0	29,5	30,0	25,0	28,0	27,0	27,0	29,0	28,5	365,5	28,5
485	25,0	23,5	25,5	27,5	27,0	24,0	25,5	19,5	21,5	24,0	26,5	20,5	29,5	319,5	24,6
457	16,5	17,5	21,5	20,5	22,0	16,5	20,0	13,5	15,0	18,5	17,5	18,0	17,5	234,5	18,2
429	9,0	10,0	10,5	12,0	15,0	11,5	13,5	10,5	12,0	12,5	12,5	13,5	11,0	153,5	11,8
401	7,0		12,5			7,0	8,0	3,0	4,5	4,0	4,5	5,0	4,0	61,5	6,2
372						0,9	0,7								0,8

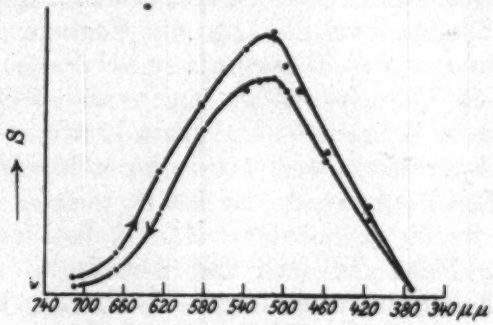


Fig. 10.

Man erkennt die immer vorkommende Erscheinung, wie die je einer Wellenlänge entsprechenden Stromstärken während des ganzen Versuches abgenommen haben. Die Ursache davon liegt zum großen Teil in der sich bildenden Polarisation und der wachsenden Ermüdung. Außerdem ersieht man auch schon aus dieser Figur einigermaßen, wie die Lage des Maximums der Lichtwirkung während der Versuchszeit weiter nach kleineren Wellenlängen rückte. Letztere Erscheinung trat fast immer ein, sie kann mit der erwähnten Zunahme von Polarisation und Ermüdung erklärt werden. Eine ausführliche Besprechung folgt unten S. 178.

Es ist nach Betrachten der Zeichnung einleuchtend, daß ein einzelner Versuch nicht genügt haben würde, um mit einiger Sicherheit die Lage des Maximums und den Verlauf der Lichtempfindlichkeit in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge zu

bestimmen. Um diesen Zweck zu erreichen, wurde deshalb folgendermaßen verfahren. Alle Beobachtungen wurden auf Koordinatenpapier eingetragen, so daß 18 Figuren entstanden, von denen jede die beim einmaligen Durchlaufen der Wellenlängenreihe erhaltenen Stromstärken enthielt. In jeder Zeichnung wurde dann aus freier Hand eine glatte Kurve gezogen, die den eingetragenen Punkten schätzungsweise am besten entsprach. Aus diesen Kurven entnahm ich die ungefähre Größe

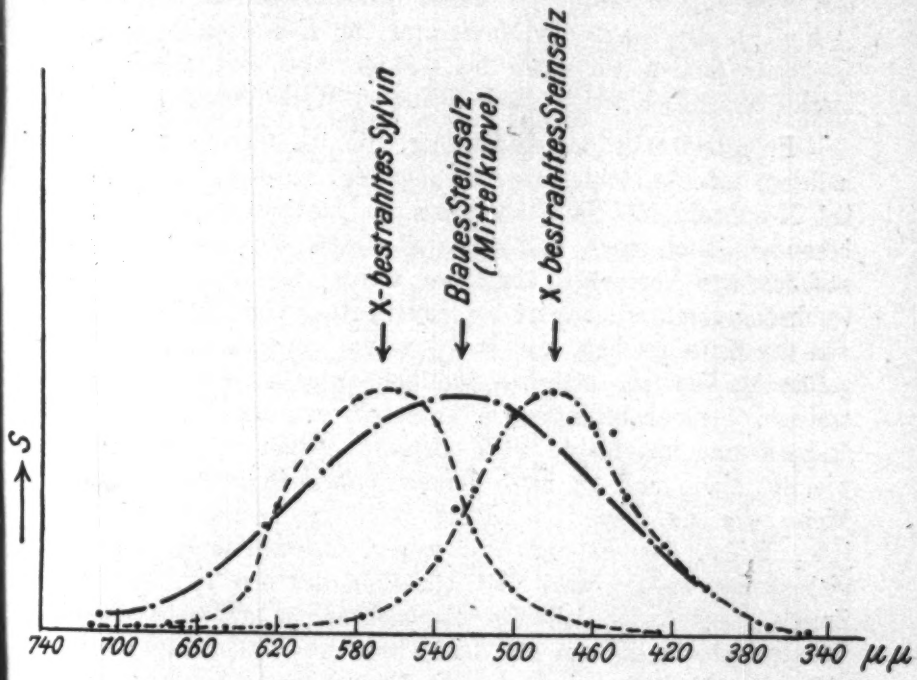


Fig. 11.

des jeweiligen Maximums; dann wurden alle Werte der Stromstärken auf ein gemeinsames Maß durch Multiplikation mit dem Verhältnis von 30 zu diesen aus den betreffenden Kurven entnommenen Maximalwerten reduziert und schließlich aus den so erhaltenen, zu je einer Wellenlänge gehörenden Werten das arithmetische Mittel genommen (vgl. Tab. XXIII) und diese reduzierten Mittelwerte mit ihren zugehörenden Wellenlängen auf Koordinatenpapier eingetragen. Sie wiesen, wie die im verkleinerten Maßstab gezeichnete Fig. 11 zeigt, keine ins Auge

fallenden Unregelmäßigkeiten mehr auf und konnten leicht durch eine glatte Kurve vereinigt werden. Wir wollen diese Kurve die „Mittelkurve" nennen und dürfen von ihr wohl annehmen, daß sie den normalen Verlauf der Lichtempfindlichkeit in ihrem Verhältnis zur Wellenlänge (λS-Kurve) befriedigend darstellt. Aus dieser Mittelkurve entnahm ich für die *Lage der maximalen Lichtwirkung auf der Wellenlängenachse für das von uns verwendete natürlich blau gefärbte NaCl den Wert* $\lambda_{max.} = 527\,\mu\mu$ mit einem Schätzungsfehler von etwa $\pm 3\,\mu\mu$.[1]) Die Lage des Maximums für X-bestrahltes gelbes Steinsalz fanden wir oben bei $475\,\mu\mu$, also, wie schon bemerkt, wesentlich weiter nach kleineren Wellenlängen gelegen.

In Anbetracht der Bedeutung, die ich diesem Ergebnis beilegen möchte, schien es mir angezeigt zu sein, diese Lage bei X-bestrahltem NaCl nochmals zu bestimmen und zwar besonders auch noch deshalb, weil dieses Maximum hauptsächlich aus Versuchen abgeleitet wurde, bei denen die Beleuchtung nicht, wie zuletzt bei blauem NaCl von oben, sondern von der Seite geschah, und weil jene vor ein paar Jahren ausgeführten Versuche selbstverständlich unter auch sonst etwas anderen Versuchsbedingungen angestellt wurden. Es wurde deshalb eine ungefärbte Steinsalzplatte genau so vorbereitet wie die blaue und zu zwei Versuchsreihen in genau gleicher Weise wie die blaue NaCl-Platte benützt, nachdem sie vor jeder Reihe, das erstemal nur wenig, das zweitemal kräftig X-bestrahlt worden war. Mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck beschränkte ich die Beobachtungen auf ein enges Spektralgebiet: es kam nur Licht von der Wellenlänge: 518, 499, 485, 471, $457\,\mu\mu$ jedesmal zur Verwendung. Infolgedessen konnte die Lage des Maximums mit noch größerer Schärfe als früher bestimmt werden. Sie ergab sich zu $478\,\mu\mu$ mit einem Schätzungsfehler von $\pm 3\,\mu\mu$, also in bester Übereinstimmung mit der früher gefundenen. Demnach ist an der Tatsache der Verschiedenheit der Wellenlängen des Lichtes maximaler Wirkung bei beiden Steinsalzpräparaten nunmehr nicht mehr zu zweifeln.

---

1) Es gibt bekanntermaßen Steinsalz mit verschiedener Blaufärbung und deshalb kann unser Resultat nur für das von uns untersuchte gelten.

Es ist nun weiter von Interesse, auch die Gestalt der bei blauem Steinsalz erhaltenen λS-Kurve mit der, die früher bei X-bestrahltem NaCl gefunden wurde, zu vergleichen. Zu diesem Zweck sind in der Fig. 11 beide — von dem X-bestrahlten NaCl die auf S. 118 erwähnte — auf 30 Skalenteile Maximalhöhe reduzierte Kurven eingetragen. Wenn die für das Verhalten des X-bestrahlten NaCl gewählte Kurve auch nicht mit der gleichen Sicherheit wie die andere bestimmt wurde, so genügt sie doch vollkommen, um den charakteristischen Unterschied in dem Verhalten beider Präparate zu erkennen. Es tritt aus der Figur sehr deutlich hervor, erstens was soeben schon erwähnt wurde, daß das Maximum der lichtelektrischen Wirkung bei blauem Steinsalz wesentlich weiter nach der Seite der größeren Wellenlänge liegt, als das des X-bestrahlten, zweitens was auch der oben angeführte Vorversuch bereits ergeben hatte, daß das natürlich blau gefärbte Steinsalz im Verhältnis zu seiner Blauempfindlichkeit rotempfindlicher ist als das X-bestrahlte und drittens, daß die Kurve für X-bestrahltes NaCl bei gleicher maximaler Lichtempfindlichkeit wesentlich schlanker ist als die für blaues NaCl.

Man könnte nun vielleicht vermuten, daß die Ursache dieser Ergebnisse zu suchen sei in dem Vorhandensein von Sylvin im blauen Steinsalz. Beachtet man nämlich die Lage der aus dem zwar vorläufig, aber doch für eine Schätzung genügend genauen Versuche mit X-bestrahltem KCl hervorgegangenen Kurve, die auch in unserer Fig. 11 nach Reduktion ihrer Maximalhöhe auf 30 Skalenteile eingetragen ist, so scheint zuerst in der Tat die Möglichkeit dafür zu bestehen, daß die für blaues NaCl gefundene Kurve durch Kombination der beiden für X-bestrahltes NaCl bzw. KCl gefundenen, erhalten werden könnte; daß fast in allem Steinsalz Sylvin vorkommt, ist bekannt. Sieht man sich aber die Kurve etwas genauer darauf an, so steigen doch Zweifel über diese Möglichkeit auf; jedoch ist dabei auch wieder zu berücksichtigen, daß die Form der KCl-Kurve, wie gesagt, so unsicher bestimmt ist, daß sie zu keiner direkten Ablehnung der Vermutung Veranlassung geben könnte. Gegen die Vermutung spricht aber das erwähnte sehr verschiedene Verhalten der beiden NaCl-Modifikationen in bezug auf die Erscheinung der Nachwirkung

einer Beleuchtung auf ihre L.-F. Die in der Fußnote von S. 156 ausgesprochene Vermutung, nach der in dem blauen NaCl vielleicht eine natürliche, mit der Zeit nicht merklich versiegende Strahlenquelle, die das NaCl lichtempfindlich macht, vorhanden ist, würde zwar einen Widerspruch, den man auf Grund der sehr verschiedenen Beständigkeit der X-bestrahlten NaCl- und KCl-Präparate und des blauen NaCl gegen die soeben diskutierte Annahme machen könnte, wohl beheben; allein diese Vermutung hat, wie a. a. O. erwähnt wurde, wenig Wahrscheinlichkeit für sich. Da nun Versuche mit chemisch geprüftem Material, die eine Entscheidung in der vorliegenden Frage hätten herbeiführen können, nicht vorliegen, ziehe ich es nach allen Überlegungen vor, bei der einfacheren und zu weniger Bedenken führenden, oben schon ausgesprochenen Ansicht zu bleiben, daß alle im Verhalten ber beiden Präparate gefundenen Verschiedenheiten auf eine Verschiedenheit in der Beschaffenheit oder dem Verhalten der in beiden Fällen wirksamen Na-Teilchen zurückzuführen sind.

Es dürfte nützlich sein, im Anschluß an das soeben Besprochene noch einige Bemerkungen und Beobachtungen mitzuteilen. Ob gerade die Lichtart, die im Kristall eine direkt sichtbare Schwächung erleidet, die bei den elektrischen Vorgängen nach Maßgabe ihrer Schwächung wirksame ist, ist noch unentschieden; wäre dies der Fall, so würde eine Verschiebung des Maximums auf der Wellenlängenachse als Folge einer Färbung unter den gegebenen Verhältnissen ausgeschlossen sein. Anders läge die Sache, wenn dies nicht zutreffen würde, dann könnte eine solche Verschiebung wohl eintreten; um dies einzusehen, braucht man sich nur vorzustellen, daß die Beleuchtung der Platte mit dem Licht eines durch vorgesetzte farbige Medien hergestellten Absorptionsspektrums vorgenommen würde. Nehmen wir den letzteren als den allgemeineren Fall an, so entsteht die spezielle Frage, ob die gefundene Verschiedenheit in der Lage der Maxima bei den beiden Steinsalzpräparaten nicht vielleicht durch eine solche von der Färbung veranlaßte Verschiebung verursacht worden ist, und die eigentliche stärkste Lichtwirkung auf beide Modifikationen des NaCl doch der gleichen Wellenlänge zuzuschreiben wäre. Folgende Überlegung wird die Antwort bringen: wenn dem so wäre, so müßte eine kräftige

Absorption von Licht, dessen Wellenlänge bei blauem NaCl rechts oder bei X-bestrahltem links von dem vermuteten gemeinschaftlichen, zwischen den beiden beobachteten gelegenen Maxima der lichtelektrischen Wirkung läge, diese Verdopplung der eigentlichen Lichtempfindlichkeitskurve bewirkt haben. Nun zeigen aber die Versuche über Schwächung des Lichtes in diesen Präparaten, von denen noch unten die Rede sein wird, von solchen Verhältnissen keine Andeutung; sie ergeben vielmehr eher die Möglichkeit, daß infolge der vorhandenen Schwächung das Maximum für blaues NaCl dem für X-bestrahltes etwas näher gerückt sein könnte. Demnach kann die Schwächung des in die Platte eindringenden Lichtes nicht die Ursache der Tatsache sein, daß die wirksamste Wellenlänge bei blauem NaCl verschieden gefunden wurde von der bei X-bestrahltem NaCl.

Es könnte aber immerhin diese Lichtschwächung, wie gesagt, doch einen Einfluß auf die Lage des Maximums und auf die Form der Kurve für blaues NaCl ausgeübt haben, und es war von Interesse, durch Versuche und mit Hilfe des bereits vorliegenden Materials dieser Frage nachzugehen. Zu diesem Zweck wurde nochmals diese Lage bei beiden Steinsalzpräparaten festgestellt, aber diesmal, nachdem durch Einschalten einer etwa 0,4 cm dicken Planplatte aus hellblauem Steinsalz, die aus demselben Stück wie die oben beschriebene, auf L.-F. ausführlich untersuchte geschnitten war, eine der Farbe dieser Platte entsprechende Schwächung des beleuchtenden Spektrallichtes erreicht war. Es ergab sich für die Lage des Maximums bei X-bestrahltem NaCl keine sicher wahrnehmbare ($\pm$ 3 $\mu\mu$) Veränderung. Die des blauen NaCl dagegen war um etwa 15 $\mu\mu$ nach kleineren Wellenlängen gerückt. Dieses Ergebnis kam nicht unerwartet, denn ich hatte bei vorhergegangenen optischen Versuchen über Lichtschwächung im blauen Steinsalz eine breite Schwächungsbande mit der dunkelsten Stelle bei etwa 600 $\mu\mu$ bemerkt, die ganz in dem Wellenlängengebiet der λS-Kurve, das der linken Hälfte (der der größeren Wellenlängen) der Kurve angehört, liegt (vgl. S. 185). Bei X-bestrahltem NaCl war nur eine geringe Schwächung in dem der Wellenlänge der maximalen lichtelektrischen Wirkung auf beiden Seiten benachbarten Gebiet des Spektrums zu erkennen. Offenbar stehen diese Wahrnehmungen mit der oben

geschilderten Wirkung der eingeschobenen blauen Steinsalzplatte im Einklang.

Diese so gewonnene Erfahrung über den Einfluß der blauen Färbung des NaCl auf die λS-Kurve fand auch in dem bereits vorliegenden Beobachtungsmaterial noch eine willkommene Bestätigung. Bei den ersten Versuchen mit der blauen NaCl-Platte im spektralen Licht, von denen oben kurz die Rede war (S. 168), hatte sich außer einer anderen Lage der maximalen Wirkung (ungefähr bei 490 $\mu\mu$ statt des bei den späteren Versuchen gefundenen Wertes: 527 $\mu\mu$) in der λ,S-Kurve ein *Minimum* dieser Wirkung in der Nähe von etwa 600 bis 620 $\mu\mu$ ergeben (vgl. Fig. 12), das bei den zuletzt angestellten Versuchen nicht auftrat (vgl. Fig. 10, S. 170) und deshalb auch

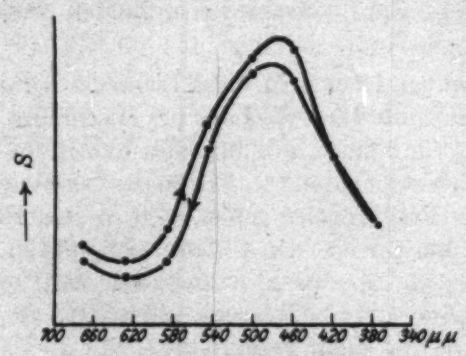


Fig. 12.

in der besprochenen Mittelkurve, wie auf S. 171 ersichtlich, fehlt. Diese ersten Versuche wurden zwar mit weniger Sorgfalt angestellt, als die in der letzten Zeit gemachten, allein das erwähnte Minimum tritt doch in verschiedenen Fällen so deutlich erkennbar auf, daß an seiner realen Existenz nicht gezweifelt werden kann. Ich erinnere nun daran, daß die Art der Beleuchtung bei jenen Versuchen eine andere war, als bei den späteren: um eine Anschauung zu gewinnen, nicht allein von dem Verlauf der λS-Kurve, sondern auch von dem Verlauf der Schwächungskurve, hatte die Platte, wie auf S. 167 angegeben wurde, damals auf ihrer unteren Seite zwei nebeneinander gelegene Belegungen erhalten und mußte nicht von oben, d. h. in der Richtung der elektrischen Kraftlinien, sondern von der Seite in der Richtung von einer Belegung zur

anderen mit spektral zerlegtem Licht beleuchtet werden. Das Licht mußte somit, bevor es an die Stellen kam, wo es seine elektrische Wirkung in wahrnehmbarer Weise ausüben konnte — d. h. über den Belegungen —, vorher eine dickere Kristallschicht durchdringen; was bei den Versuchen mit Beleuchtung von oben jedenfalls viel weniger der Fall war. Infolgedessen war für eine vorherige Schwächung von wirksamem Licht im erstgenannten Fall eine viel größere Gelegenheit vorhanden als im letztgenannten, und das ist der Grund, weshalb in der λS-Kurve der ersten Versuche in der Nähe des Maximums der Schwächung des spektral zerlegten Lichtes (vgl. S. 184) das erwähnte Minimum auftritt, während davon in der Mittelkurve noch nichts zu bemerken ist. (Vgl. auch S. 192.)

Außer dieser Bestätigung liefern aber jene ersten Versuche noch eine zweite, wenn man die λS-Kurven, die diejenigen Beobachtungen ergaben, die bei Verwendung der auf dem Lichtweg *zuerst* gelegenen Belegung erhalten wurden, vergleicht mit denen, die die Versuche mit der *hinteren* Belegung lieferten. Nicht nur findet man aus den hier nicht mitgeteilten Kurven, in Übereinstimmung mit dem vorhin Gesagten, die Maxima bei den zuletzt genannten Kurven besser ausgeprägt als bei den erstgenannten, sondern man erkennt auch, daß das Maximum jener Kurven weiter nach kleinerer Wellenlänge liegt als das der anderen. Diese mir zuerst etwas auffälligen Ergebnisse entsprechen offenbar alle dem vorhin bei einem Versuch mit vorgesetzter Platte Gefundenen und dem der erwähnten optischen Versuche; sie haben demnach ihre vollständige Erklärung gefunden.

Die festgestellte Tatsache, daß das im blauen NaCl geschwächte Licht, das wohl sicher die blaue Färbung bedingt, die Form und die Lage der λS-Kurve so sehr beeinflussen kann, mahnt selbstverständlich zur Vorsicht bei der Angabe der Wellenlänge des wirksamsten Lichtes, die man aus Versuchen mit etwas stärker gefärbtem Material ableiten will. Auch im günstigsten Fall, wo die Beleuchtung von oben, d. h. senkrecht zu den Kristallbelegungen stattfindet, wo somit das zur Wirkung kommende Licht doch wenigstens in die erste lichtempfindliche Plattenschicht ohne vorher geschwächt zu sein, eindringt, wird doch in der Platte ein ähnliches Verhältnis bestehen, wie wir es soeben bei der mit zwei hintereinander gelegenen Belegungen

versehenen Platte feststellten, d. h. es wird gewissermaßen jede Schicht der Platte zu der λS-Kurve in bezug auf die Lage des Maximums einen etwas verschiedenen Beitrag liefern, der natürlich nicht für sich getrennt aus der gefundenen λS-Kurve entnommen werden kann. Wie groß die daraus etwa entspringende Unsicherheit in bezug auf die Form der λS-Kurve und auf die Lage ihres Maximums bei den beschriebenen Versuchen mit blauem NaCl war, kann nicht genau angegeben werden, doch meine ich in Anbetracht des Umstandes, daß die benutzte 3 mm dicke Platte aus recht wenig gefärbtem NaCl bestand und mit Rücksicht auf die Versuchsergebnisse von S. 175, ohne Bedenken angeben zu können, daß die Verschiebung nach kleineren Wellenlängen im gegebenen Falle nur wenige (d. h. nicht etwa 10 $\mu\mu$) betragen haben kann. Auf die Anstellung von weiteren Versuchen, die vielleicht eine größere Sicherheit in dieser Beziehung hätten bringen können, habe ich geglaubt verzichten zu können; das zunächst Wichtigste im Verhalten des blauen Steinsalzes meine ich erfahren und mitgeteilt zu haben.

In dem folgenden kurzen Abschnitt mögen noch einige Wahrnehmungen an den Kurven der 13 oben erwähnten, sich auf das Verhalten des blauen NaCl beziehenden Versuchsreihen untergebracht werden, die, wenn auch nicht von besonderem Interesse, doch eventuell bei weiteren Versuchen Verwendung finden können, und die außerdem eine Erklärung verlangten. Es wurden die in der Tab. XXIII enthaltenen Werte der auf 30 Skalenteile Maximalkurvenhöhe reduzierten Stromstärken der 13 Versuchsreihen mit den zugehörigen Wellenlängen auf Koordinatenpapier eingetragen und durch die so erhaltenen Punktreiehen aus freier Hand Kurven gezogen. Darauf wurde die Lage der Maxima dieser Kurven auf der Wellenlängenachse mit der des Maximums der Mittelkurve verglichen und das Ergebnis in die Tab. XXIV (Kol. 2) eingetragen und zwar der Einfachheit halber in dem verwendeten Maß (Millimeter, 1 mm = ca. 4 $\mu\mu$). „Links“ in der Tabelle bedeutet nach größeren Wellenlängen, „rechts“ folglich nach kleineren Wellenlängen. Man erkennt, daß nicht unbeträchtliche Unterschiede zwischen den Lagen des Maximums der direkt beobachteten Kurven und dem der „Mittelkurve“ vorhanden sind, und es fragt sich, wie diese Differenzen erklärt werden können. Daß

Tabelle XXIV.

Versuch	Lage des Maximums der Kurven im Vergleich zu dem der Mittelkurve	Richtung des λ-Weges	Bemerkungen	Form der Kurve	Verhältnis
1	gleich	→	bei einem Vorversuch war Spannung angelegt und Platte beleuchtet	annähernd normal	1,4
2	1 mm nach links	→	wahrscheinlich ditto	„ „	1,2
3	2,3 „ „ rechts	←	unsicher	„ „	2,1
4	3,2 „ „ rechts	←	sofort nach einem Versuch mit blauer vorgestellter Platte	„ „	2,3
5	2 „ „ rechts	←	nach längerer Ruhe. Wahrscheinlich Spannung kurz vorher ohne Beleuchtung angelegt	„ „	2,0
6	1 „ „ links	→	gleich nach 5	„ „	1,1
7	1 „ „ rechts	←	„ „ 6	„ „	1,8
8	5,5 „ „ links	→	nach langer Ruhe. Spannung kurz vorher ohne Beleuchtung angelegt	„ „	0,7
9	gleich, aber Kurve schlanker	←	gleich nach 8	Kurve schlanker	1,6
10	gleich	→	„ „ 9	normal	1,7
11	1 mm nach rechts	←	„ „ 10	„	1,8
12	gleich	→	„ „ 11	„	1,4
13	1 mm nach links	→	nach 4tägiger Ladung aber ohne Beleuchtung	Abstieg normal Anstieg flacher	1,1

sie alle auf die mehrmals erwähnten Versuchsstörungen zurückzuführen seien, wird man vielleicht zunächst vermuten, doch stellt sich diese Erklärung bei näherem Zusehen nicht als genügend heraus; man findet vielmehr, daß hier noch folgender Einfluß tätig war. In der Kolumne 8 der Tabelle sind durch Pfeile die Richtungen angegeben, in welchen bei den Versuchen die einzelnen Spektralbezirke zur Verwendung kamen. Der Pfeil ⟶ deutet an, daß die Reihenfolge der Wellenlängen von größeren nach kleineren ging; der Pfeil ⟵ die umgekehrte Reihenfolge. Man erkennt nun aus Kolumne 2 und 8 ohne Ausnahme sofort, daß bei den Versuchen, die eine Lage des Maximums weiter nach kleineren Wellenlängen als die Lage des Maximums der Mittelkurve ergaben, das Spektrum in der Richtung von kleineren nach größeren Wellenlängen durchlaufen wurde, und daß umgekehrt zu den größeren Werten der Wellenlängen des Maximums die Richtung ⟶ gehört. Diese Gesetzmäßigkeit und damit auch die erwähnten Differenzen finden nun ihre Erklärung darin, daß sich während eines Versuches Polarisation und Ermüdung bekanntermaßen allmählich und zwar erstere sicher in abnehmendem Tempo ausbildeten (vgl. Fig. 10 und Fig. 12) und daß die eingetragenen Beobachtungen von diesen Einflüssen vorher nicht befreit wurden; beide Faktoren müssen die beobachteten Verschiebungen zur Folge gehabt haben, wie man nach einer einfachen Überlegung einsehen wird. Der Einfluß mußte offenbar am stärksten sein, wenn die Bildung der Polarisation am raschesten vor sich ging, d. h. zu Anfang einer Versuchsreihe, bei der die Ladung nur kurze Zeit vor der ersten Beleuchtung angelegt wurde; von dieser Folgerung findet man auch in der Tabelle unter Zuhilfenahme der „Bemerkungen“ manche Bestätigung.

Es ist einleuchtend, daß auch die Form der Kurven merklich von Polarisation und Ermüdung beeinflußt wird, wenn diese Faktoren bedeutend sind. An einigen Originalkurven ist dieser Einfluß dann auch deutlich sichtbar; da die einzelnen Kurven in dieser Mitteilung nicht wiedergegeben sind, mag diese Tatsache in folgender Weise demonstriert werden. Bestimmt man aus den Beobachtungen das Verhältnis der für die beiden nahezu gleich weit von der Wellenlänge der maximalen Wirkung entfernt gelegenen Wellenlängen 457 $\mu\mu$ und 625 $\mu\mu$ gefundenen Stromstärken, so erhält

man die Zahlen der Kolumne 6 von Tab. XXIV; an der „Mittelkurve" gemessen ergibt sich dieses Verhältnis zu 1,4. Die Zahlen für die Einzelkurven schwanken zwischen 0,7 und 2,1, und zwar in einer Weise, die ganz regelmäßig ist, indem ohne Ausnahme zu jeder Zahl, die größer ist als 1,4, die Richtung ⟵ und zu den kleineren die Richtung ⟶ gehört. Dieses Ergebnis entspricht offenbar wieder genau dem, was man von dem Einfluß der Polarisation und der Ermüdung auf die Form der Kurven zu erwarten hat; daß es so regelmäßig eingetroffen ist, ist in Anbetracht der besprochenen Unregelmäßigkeiten, die die einzelnen Messungen aufweisen und der in den nicht ohne Willkür aus freier Hand und ohne Kenntnis von dem vorhin abgeleiteten Ergebnis gezogenen Kurven vorhandenen Unsicherheit doch überraschend und erfreulich. Bei dem auf S. 175 erwähnten Versuch mit blauem Steinsalz und vorgesetzter Platte aus gleichem Material stellte sich das in Rede stehende Verhältnis zu 4 heraus; der größere Wert ist in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die Wellenlänge des durch die vorgesetzte Platte am meisten geschwächten Lichtes nicht sehr weit von der des Maximums der Lichtempfindlichkeit in der Richtung nach größeren Wellenlängen entfernt ist.

Bei X-bestrahltem NaCl hatte sich ergeben, daß der Kristall für Licht irgendeiner Wellenlänge empfindlicher geworden ist, wenn er vorher mit Licht einer kleineren Wellenlänge beleuchtet wurde; bei blauem NaCl ist dies nicht, oder jedenfalls sehr viel weniger der Fall[1]), wie u. a. aus besonders zur Prüfung dieser Frage angestellten Versuchen hervorging, bei denen die Platte nur mit Licht von der Wellenlänge 625 $\mu\mu$ bzw. 457 $\mu\mu$ abwechselnd einige Male hintereinander beleuchtet und bei jeder Beleuchtung auf ihre L.-F. geprüft wurde. Diese Versuche ließen nichts von einer Nachwirkung erkennen. Diese Verschiedenheit im Verhalten der beiden Steinsalzkristalle erklärt den auffallenden Unterschied im Verlauf der betreffenden λS-Kurven (vgl. Fig. 5 u. 6, S. 126, und Fig. 10, S. 170); die bei X-bestrahltem Steinsalz auf dem Rückweg gefundene, von dem Einfluß der Polarisation

1) Vermutlich hängt dieser Umstand mit dem großen Unterschied in der Lichtbeständigkeit der beiden Kristalle zusammen.

befreite Kurve liegt zwar wie die bei blauem NaCl erhaltene in ihrem Anfang infolge des Vorwiegens der Ermüdung unter der auf dem Hinweg gefundenen, der letzte Teil aber, weil hier die Nachwirkung der Beleuchtung mit kleineren Wellenlängen überwiegt, über der anderen Kurve, was bei blauem Steinsalz nicht der Fall ist.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß es sich im allgemeinen bei der Untersuchung der Wirkung des spektral zerlegten Lichtes auf die L.-F. des blauen NaCl empfiehlt, die Ladung einige Zeit vor Anfang der Stromstärkenbestimmungen an die Platte anzulegen und sie während dieser Zeit zu beleuchten, damit der Hauptteil der Polarisation und der Ermüdung schon vor Anfang jener Bestimmungen sich ausbildet. Zu lange darf aber diese Vorbereitung wieder nicht dauern, sonst würde die zu beobachtende Stromstärke infolge der entwickelten Polarisation und Ermüdung zu gering ausfallen. Außerdem wird man, um sich von diesen Einflüssen noch mehr zu befreien, die Richtung, in der die Reihenfolge der beleuchtenden Spektralfarben beim Versuch durchlaufen wird, wechseln.

Beziehungen zwischen Einfluß des Lichtes auf die L.-F. und Lichtabsorption.

Nach dem im Vorhergehenden mitgeteilten Befund übt von dem durch ein Gitter zerlegten Sonnenlicht das blaue von der Wellenlänge $\lambda = 475\,\mu\mu$ auf die L.-F. des durch X-Strahlung empfindlich gemachten Steinsalzes den größten Einfluß aus. Bei Sylvin liegt dieses Maximum der Wirkung im gelben, in der Nähe von $\lambda = 550\,\mu\mu$ gelegenen Teile des Spektrums. Nun ist bekannt, daß eine genügend lange dauernde X-Bestrahlung die genannten Körper färbt, Steinsalz wird braungelb, Sylvin violett. Demnach hat es den Anschein, als ob zwischen dem Vorgang der Lichtabsorption und der beobachteten, die L.-F. erhöhenden Wirkung des Lichtes eine nahe Beziehung bestehe. Um diese Frage etwas eingehender zu prüfen, habe ich eine Anzahl von Versuchen angestellt, über die ich im folgenden noch berichten möchte.

Bei einer Kategorie dieser Versuche handelte es sich darum, das Absorptionsspektrum des X-bestrahlten NaCl und KCl

und des natürlich blau gefärbten NaCl zu beobachten.[1]) Dazu diente ein Vierordtsches Spektralphotometer und später noch ein mit Skala versehenes Taschenspektroskop; zur Verwendung kamen Platten aus den angegebenen Substanzen, die, um mit den genannten Spektroskopen überhaupt eine deutliche Absorption erkennen zu können, meist nicht in der Richtung ihrer Dicke, sondern senkrecht dazu, d. h. in der Richtung ihrer größten Dimension, untersucht wurden, und zwar bei den X-bestrahlten Präparaten wegen ihrer geringen Färbung möglichst nahe an der Oberfläche, die von den X-Strahlen zuerst getroffen wurde, wo also die Färbung immer am stärksten ist. Bei den sehr dunkel gefärbten Exemplaren von blauem Steinsalz kamen nur sehr dünne, in der Dickenrichtung durchleuchtete Plättchen zur Verwendung.

In dem Absorptionsspektrum einer etwa 3 cm breiten kräftig X-bestrahlten und deshalb sehr deutlich gelb gefärbten NaCl-Platte zeigte sich kein so scharf ausgeprägtes Maximum der Absorption, wie ich es nach dem Verlauf der L.-F.-Kurven wohl erwartet hatte. Ich konnte nur feststellen, daß im Vierordtschen Photometer eine ununterbrochene Absorption sich in dem ganzen Gebiet bemerkbar machte, das zwischen den Wellenlängen 486 $\mu\mu$ und 434 $\mu\mu$ liegt, eine Absorption, die unzweifelhaft die gelbe Farbe des Präparats bedingt. An einem etwa 8 cm breiten, mehrere Stunden lang X-bestrahlten Steinsalzblock war eine Absorption schon bei etwa 500 $\mu\mu$ und noch bis im äußersten Violett zu erkennen, so daß bei der gewählten Spaltbreite vom ganzen Spektrum nur noch grün, gelb und rot sichtbar waren. Die Lage des Maximums der Absorption konnte aber auch in diesem Falle nicht mit genügender Sicherheit bestimmt werden.

Noch ungünstiger lagen die Verhältnisse beim X-bestrahlten Sylvin. Ich habe keine genügend intensiv gefärbte

---

1) Die X-bestrahlten Kristalle zeigen im Gegensatz zu dem blau gefärbten NaCl, wie schon einmal erwähnt, dilute, nicht schichtenweise angeordnete Färbung, im Ultramikroskop keinen Tyndallkegel und keine submikroskopischen Teilchen. Die Frage, welchen Anteil an der Färbung wirkliche Absorption oder Beugung hat, mag hier noch unerörtert bleiben. — Auch möchte ich nochmals erwähnen, daß zu einer kräftigen Aktivierung des NaCl schon eine X-Bestrahlung genügt, die den Kristall nicht sichtbar färbt.

Stücke erhalten können, und außerdem nahm die erzeugte Färbung im Lichte zu rasch ab, um mit meinen Mitteln ein für unsere Zwecke brauchbares Absorptionsspektrum zu erhalten.[1])

Versuche mit natürlich blau gefärbtem NaCl lieferten folgendes: die auf S. 184 erwähnte, zur Bestimmung der Lage des Maximums der lichtelektrischen Wirkung auf der Wellenlängenachse benutzte, hellere Platte lieferte mit dem Vierordtschen Apparat ein Spektrum, in dem wieder ein breites Absorptionsgebiet, aber natürlich an anderer Stelle als beim X-bestrahlten NaCl, nämlich zwischen den Wellenlängen $\pm 630\,\mu\mu$ und $\pm 590\,\mu\mu$ wahrgenommen werden konnte. Ein anderes, ebenso helles, aus dem gleichen Kristall ausgesprengtes Stück mit dem Taschenspektroskop untersucht, zeigte eine Absorptionsbande, die noch bis $\pm 650\,\mu\mu$ bzw. $\pm 550\,\mu\mu$ erkennbar war. Bei beiden Präparaten war in der Gegend von $\lambda = 527\,\mu\mu$ (der Wellenlänge der maximalen lichtelektrischen Wirkung) nichts von Absorption zu bemerken, was mir anfänglich auffallend erschien. Zu einem weiteren Versuch wurde ein dünnes Plättchen eines äußerst dunkel gefärbten, dem auf S. 183 erwähnten, zuerst geprüften, ähnlichen Kristalls verwendet. Das Spektrum des senkrecht zur Dickendimension durch die Platte hindurchgegangenen Lichtes wies nun außer der vorhin erwähnten breiten Absorptionsbande noch eine viel schmälere auf, von der die Lage der Mitte einigermaßen genau bestimmt werden konnte. Es ergab sich dafür $\lambda = \pm 517\,\mu\mu$. Diese schmale Bande in gleicher Lage, jedoch viel schwächer, konnte auch an einem, dem sehr dunkeln ziemlich benachbart gelegenen Stückchen des gleichen Kristalls beobachtet werden, das schätzungsweise gleich wenig intensiv gefärbt war, wie die zuerst untersuchten Stücke aus hellblauem NaCl.[2]) Aus diesen Wahrnehmungen

1) Eine intensive Färbung, sowohl von NaCl als von KCl läßt sich bekanntermaßen durch Behandlung bei hoher Temperatur im Na- bzw. K-Dampf nach Giesel und Siedentopf oder durch Kathodenbestrahlung nach Goldstein erreichen. Indessen hielt ich mich nicht für berechtigt, diese Färbung ohne weiteres für identisch mit der durch X-Strahlen hervorgebrachten zu halten.

2) Ein farbenkundiges Auge schätzte dem hinzugekommenen Absorptionsstreifen entsprechend die Farbe der zuletzt genannten Stücke „hellblau mit einem rötlichen Stich", während die zuerst untersuchten Stücke „hellblau" erschienen.

ist zu schließen, daß der NaCl-Kristall, aus dem die hellblauen, auf ihre L.-F. geprüften Stücke abgespalten waren, entweder gar kein färbendes Material enthält, das die Ursache ist von der Absorption in der Nähe der Wellenlänge 517 $\mu\mu$, die sich in dem Spektrum der anderen, teilweise sehr intensiv gefärbten Kristalle zeigte, oder nur so wenig, daß es sich mit den angewendeten, nicht besonders empfindlichen optischen Mitteln nicht nachweisen ließ; ich möchte mich, durch die Erfahrungen mit X-bestrahltem NaCl belehrt, für die letzte Auffassung entscheiden. Die breite Dunkelbande, die in den Spektren allen blauen Kristalle auftrat, entspricht wohl sicher ihrer blauen Farbe.

Vergleichen wir nun die bei der optischen Untersuchung gefundenen Tatsachen mit den Ergebnissen der L.-F.-Bestimmungen, so ergibt sich folgendes:

X-bestrahltes NaCl. Das Wellenlängengebiet der optisch beobachteten Schwächung — dessen Mitte freilich nicht die Stelle größter Absorption zu sein braucht — fällt mit dem, Wellenlängengebiet größter L.-F. so weit zusammen, daß man geneigt sein wird, die eingangs auf Grund der gelben Färbung des kräftig X-bestrahlten NaCl gebildete Vermutung: das am meisten geschwächte Licht sei auch das am stärksten elektrisch wirksame, als richtig anzusehen. Indessen war die Unzulänglichkeit der optischen Hilfsmittel doch zu groß, um in dieser Beziehung völlige Sicherheit erhalten zu können.

X-bestrahltes KCl. Wenn auch von diesem Material, wie erwähnt, das Absorptionsspektrum nicht bestimmt werden konnte, so dürfen wir doch wohl, auf die soeben bei NaCl gemachte Erfahrung gestützt, annehmen, daß seine „heliotrope" Färbung und die gefundene Wellenlänge maximaler lichtelektrischer Wirkung im gelbgrünen Teil des Spektrums ($\lambda = 560\ \mu\mu$) in gleicher Weise ursächlich zusammenhängen, wie es beim NaCl als sehr wahrscheinlizh erkannt wurde.

Natürlich blau gefärbtes NaCl. Hier liegen die Verhältnisse verwickelter. Die Stelle größter lichtelektrischer Wirkung ($\lambda = \pm 527\ \mu\mu$) liegt außerhalb des einen beobachteten, *breiten* Absorptionsgebiets ($\lambda = 650$—$550\ \mu\mu$). Die linken Äste der Mittelkurve Fig. 11, S. 171, und der λS-Kurve Fig. 10, S. 170, verlaufen so gleichmäßig ansteigend, daß man in diesem

Bereich der Wellenlängen eine so kräftige Absorption, wie sie tatsächlich in dem genannten Bereich vorhanden ist, nicht erwarten würde. Dagegen erkennt man an der bei 600 bis 620 $\mu\mu$ gelegenen Einsenkung der oben (S. 176) besprochenen Kurve Fig. 12, die die Ergebnisse von Versuchen mit seitlicher Beleuchtung darstellt, bei denen also das Licht eine größere Strecke in der Platte verlaufen mußte, bevor seine elektrische Wirkung gemessen wurde, sehr deutlich den Einfluß dieser Absorption. Ich schließe aus diesen Wahrnehmungen, daß die Lichtart, die die blaue Farbe des natürlich gefärbten NaCl hauptsächlich bedingt, trotz ihrer intensiven Schwächung im Kristall doch nur verhältnismäßig wenig zu der Vermehrung der L.-F. beiträgt. Anders verhält sich das Licht, das in der *schmalen* Absorptionsbande fehlt. Von seiner Wellenlänge kann man mit Rücksicht auf die Unsicherheit in der Bestimmung der Lage der Mitte ($\pm$ 517 $\mu\mu$) dieser Bande mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit aussagen, daß sie zusammenfällt mit der Wellenlänge des Lichtes maximaler lichtelektrischer Wirkung (527 $\mu\mu$). In der Tatsache, daß diese Absorptionsbande nicht beim hellblauen, sondern nur beim dunkel gefärbten NaCl gefunden wurde, erkenne ich keinen Widerspruch mit dem Gesagten; denn die Absorption kann so gering sein, daß sie der optischen Beobachtung entgeht; wie z. B. beim schwach X-bestrahlten NaCl.

Die Versuche sowohl mit X-bestrahlten Präparaten als mit natürlich gefärbtem NaCl führen somit zu der *Regel, daß nur absorbiertes Licht eine lichtelektrische Wirkung ausüben kann.*

Leider fehlte die Gelegenheit, die Energieverteilung in den Absorptionsspektren bolometrisch zu messen: derartige Messungen hätten wohl eine wesentlich schärfere Antwort auf die gestellte Frage ermöglichen können.

Bei einer zweiten Kategorie von Absorptionsversuchen wurde die Schwächung gemessen, die die lichtelektrische Wirkung selbst auf dem Wege des Lichtes durch den Körper erleidet. Die Versuchsanordnung, die gestattet, an zwei auf dem Lichtwege hintereinander gelegenen Stellen der Kristalle diese Wirkung zu bestimmen, ist bereits auf S. 124 u. ff. beschrieben, und auch die betreffenden Versuche sind dort mitgeteilt. Die für den jetzigen Zweck zu verwendenden Ergebnisse sind in den Tabellen XVI u. XVII enthalten, und

zwar sind es die dort mit $100\,(S_I' - S)_{II}'/S_I'$ bezeichneten Werte, die nach ihrer Multiplikation mit E als Maß für die gesuchte Schwächung im X-bestrahlten NaCl zu gelten haben.[1])

Es fragt sich nun, wie diese Werte für den vorliegenden Zweck zu verwenden sind. Der Unterschied der in dem vom Licht zuerst durchlaufenen Teil (I) der Platte ausgeübten elektrischen Wirkung (S_I) und der im zweiten Teil ausgeübten (S_{II}) beruht nur auf einer Verschiedenheit der Intensität des Lichtes in beiden Teilen; diese Differenz kann im allgemeinen verschiedene Ursachen haben:

I. Sie kann ihren Grund darin haben, daß das auf die schmale Seitenfläche der Platte auffallende Bündel paralleler Lichtstrahlen, sei es an dieser eventuell nicht ganz eben geschliffenen und ungenügend polierten Eintrittsfläche, oder im Innern der vielleicht nicht vollständig homogenen Platte durch Brechung oder Zerstreuung von seinem Wege abgelenkt oder aufgelöst wird, oder daß das Bündel nicht genau parallel den anderen Begrenzungsflächen verläuft, so daß eine störende Schattenbildung eintreten kann. Von solchen Vorgängen werden aber, insbesondere in dem klaren, X-bestrahlten NaCl, keine Strahlen des Spektrums besonders betroffen, so daß eine Abhängigkeit des Verhältnisses $(S_I - S_{II})/S_I$ von der Wellenlänge, wie sie tatsächlich wahrgenommen wurde, nicht durch diese Vorgänge veranlaßt sein kann. Sie können nur und werden wahrscheinlich auch in geringem Maße zu der $\lambda, (S_I - S_{II})/S_I)$-Kurve einen für alle Wellenlängen gleichbleibenden Anteil geliefert haben.

II. Der Intensitätsunterschied in den Teilen I und II kann durch Absorption oder durch eine die Farbe von weißem Licht ändernde Beugung des Lichtes in der Platte verursacht werden. Die letztere dieser beiden Ursachen brauchen wir wenigstens beim X-bestrahlten NaCl nicht weiter zu berücksichtigen, weil auch im kräftigst bestrahlten, klaren NaCl

---

1) Es sei nochmals daran erinnert, daß die Steinsalzplatte senkrecht zu ihrer größten Ausdehnung mit X-Strahlen bestrahlt wurde und deshalb in dieser Richtung verschieden stark lichtempfindlich war, so daß von der Bestimmung eines eigentlichen Absorptionskoeffizienten nicht die Rede sein kann.

keine Andeutung eines Tyndallkegels zu bemerken war. Bezüglich der Absorption müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

a) Das Licht übt eine elektrische Wirkung aus, ohne dazu absorbiert zu werden; bei jeder Änderung der Intensität des Lichtes ändert sich innerhalb gewisser Grenzen seine Wirkungsfähigkeit in gleichem Verhältnis; Intensitätsänderungen werden durch eine in irgendeiner, nur nicht mit der elektrischen Wirkung direkt zusammenhängenden Weise bewirkte Absorption erzeugt.

b) Die elektrische Wirkung kann nur von absorbiertem Licht ausgeübt werden. Der absorbierende Körper kann dann so beschaffen sein: 1. daß in ihm Lichtenergie noch in andere Formen als in elektrische Energie der beobachteten Art verwandelt wird; eine einfache Beziehung zwischen elektrischer Wirkung und überhaupt absorbierter Lichtenergie ist dann nicht zu erwarten. Oder 2. so, daß die Energie des absorbierten Lichtes, gleichgültig welcher Wellenlänge, restlos in elektrische Energie umgesetzt wird.

Von den erwähnten Versuchen wurde eine Entscheidung über diese Möglichkeiten erhofft; im folgenden ist das Ergebnis für X-bestrahltes NaCl zuerst mitgeteilt.

Wir verfahren so, daß wir die zu allerletzt unter II b 2 erwähnte Möglichkeit als der Wirklichkeit entsprechend ansehen und prüfen, ob die daraus sich ergebenden Folgerungen der Erfahrung entsprechen, und weiter, ob auch die anderen Möglichkeiten mit der Erfahrung in Einklang zu bringen sind. Wir setzen somit:

$$S_{\mathrm{I}} = p \cdot \varphi \cdot E,$$

wo mit p eine für alle Wellenlängen gleiche Konstante, mit φ ein von der Wellenlänge abhängiger, für den in Teil I absorbierten, in elektrische Energie vollständig verwandelten Bruchteil der Lichtenergie maßgebender Faktor[1]) und mit E die Energie der betreffenden, in den Teil I eindringenden Lichtart bezeichnet ist. Dann ist weiter:

$$S_{\mathrm{II}} = p\,\varphi\,(1-\varphi)\,E,$$

---

1) Wäre die Platte an allen Stellen gleichmäßig aktiviert, so würde $\varphi = 1 - e^{-\alpha d}$ sein, wo α den Extinktionskoeffizienten und d die Breite eines jeden der beiden Teile I und II der Platte bezeichnet.

wenn angenommen wird, daß die beiden, in Wirklichkeit auch nur um 0,02 cm voneinander entfernten Teile sich berühren. Folglich muß sein:

$$\frac{S_I - S_{II}}{S_I^2} E = \frac{1}{p} = \text{constans.}$$

Die Werte $(S_I - S_{II}) E/S_I^2$ lassen sich mit Hilfe der Tabellen von S. 125 berechnen und sind, von einem gleichbleibenden Faktor abgesehen, die folgenden:

Aus Tabelle XVI.

λ	550	512	493	473	454	434	415	395	376	395 $\mu\mu$
$\frac{S_I - S_{II}}{S_I^2} E$	[81]	29	24	21,5	20,5	21,5	27,5	24	[59]	26,5

λ	415	434	454	473	493	512	521	550	567 $\mu\mu$
$\frac{S_I - S_{II}}{S_I^2} E$	26	24,5	21,5	21,5	17,8	15,5	19	31	[56]

Aus Tabelle XVII.

λ	586	544	501	459	416	374	395	416	438 $\mu\mu$
$\frac{S_I - S_{II}}{S_I^2} E$	[0]	34	22	21	26,5	[0]	13,5	17,5	22

λ	459	501	523	544	566 $\mu\mu$
$\frac{S_I - S_{II}}{S_I^2} E$	20	20,5	22,5	19	[0]

Die eingeklammerten Zahlen, die sich aus den an den Grenzen des benutzten Wellenlängengebietes beobachteten Stromstärken ergeben haben, müssen wegen der Kleinheit der Differenzen $S_I - S_{II}$ (z. B. $-0{,}1$, 0,0, $-0{,}5$ Skalenteile) und des verhältnismäßig sehr großen Betrages der zu ihrer Ableitung verwendeten Korrektionen als völlig unsicher außer Betracht bleiben; die unter den übrigbleibenden Zahlen noch bestehenden Verschiedenheiten könnten leicht durch geringfügige, ein paar Zehntel Skalenteile betragende Änderungen an den beobachteten Stromstärken zum Verschwinden gebracht werden, und außerdem ist natürlich mit den oben mehrfach erwähnten Versuchsunsicherheiten zu rechnen. Es ist demnach gerechtfertigt und angezeigt, zur weiteren Verwendung die Mittelwerte aus je vier zu einer Wellenlänge bzw. zu einem engen Wellenlängengebiet gehörenden Zahlen zu wählen; das sind die folgenden:

λ	± 538	± 518	± 497	478	± 457	436	416	395
$\frac{S_I - S_{II}}{S_I^2} E$	22,5	22,5	21	21,5	21	22,5	24,5	24,0

Beachtet man nun, daß die in obige Zahlen proportional eingehenden $S_I - S_{II}$ um mehr als das Zwanzigfache ihres Betrages variieren, so wird man unbedenklich die in der Zahlenreihe vorkommenden Schwankungen unvermeidlichen Beobachtungsfehlern und Störungen, von denen in dieser Mitteilung zur Genüge die Rede war, zuschreiben können und zu dem Ergebnis kommen, daß die Versuche die von den oben unter II b 2 angeführten Voraussetzungen verlangte Konstanz des mehrfach genannten Verhältnisses innerhalb eines Wellenlängengebietes von ± 538—395 $\mu\mu$ bestätigt haben, und daß somit die Erfahrung zugunsten jener Voraussetzungen, jener Ansicht spricht.

Die obige Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$p \frac{S_I - S_{II}}{S_I} = \frac{S_I}{E},$$

d. h. es muß die Erfahrung auch zu dem Ergebnis führen, daß die λ, $(S_I - S_{II})/S_I$-Kurve durch Multiplikation ihrer Ordinaten mit einem konstanten Faktor in die λ, S_I/E-Kurve übergeführt werden kann. Auch diese Folgerung wurde geprüft, und zwar in der — nach dem obigen Befunde genügend erscheinenden — Weise, daß untersucht wurde, ob die Maxima beider Kurven bei der gleichen Wellenlänge liegen. Zu diesem Zwecke wurden die vier λ, $(S_I - S_{II})/S_I$-Kurven mit Hilfe der Tabb. XVI u. XVII gezeichnet und aus diesen Figuren[1]) die Lage ihrer Maxima entnommen; sie fanden sich bei $\lambda_{max.} = 475, 460, 460, 455\,\mu\mu$. Der Mittelwert $\lambda = 463\,\mu\mu$ stimmt in der Tat — zufällig — fast genau mit dem auf S. 129 angegebenen, für die λ, S_I/E-Kurve gefundenen: $\lambda_{max.} = 462\,\mu\mu$ überein.

Es ist nun noch der Nachweis zu führen, daß die unter II a erwähnte Annahme mit den gewonnenen Versuchsergebnissen nicht vereinbar ist. Wenn eine elektrische Wirkung

1) Die Kurven sind im verkleinertem Maßstab wiedergegeben. Figg. 13a u. b.

von nicht absorbiertem Licht ausgeübt werden könnte, so müßte die Wirkung des Lichtes nur durch seine Intensität (Energie) und durch eine spezifische Eigenschaft seiner Wellenlänge bedingt sein, Dementsprechend wäre annähernd zu setzen: $S_I = k\,\psi\,(2-\varphi)\,E$, wo k eine von λ unabhängige Konstante bedeutet, und wo in ψ jene spezifische Eigenschaft des Lichtes von der Wellenlänge λ ihren Ausdruck findet; φE sei der im Teil I der Platte stattfindende Verlust an Intensität dieses mit der Intensität E eindringenden Lichtes, so daß $\frac{1}{2}(2-\varphi)\,E$ annähernd seine mittlere Intensität in

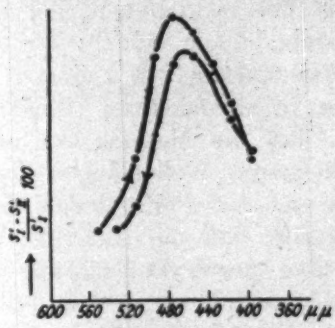


Fig. 13a.

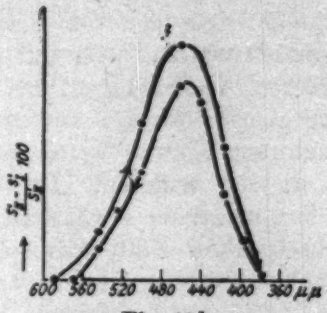


Fig. 13b.

jenem Teil bezeichnet. Dann wäre entsprechend: $S_{II} = k\,\psi\,(2-\varphi)\,(1-\varphi)\,E$, und es ergäbe sich:

$$\frac{S_I - S_{II}}{S_I^2}\,E = \frac{1}{k\,\psi}\,.$$

Nach dem oben mitgeteilten experimentellen Befund wäre dieser Wert eine von der Wellenlänge unabhängige Größe, und es würde somit allen Lichtarten die gleiche Eigenschaft (ψ) zuzuschreiben sein; d. h. alle würden sich nur nach Maßgabe des Ausdruckes $(2-\varphi)\,E$ an der elektrischen Wirkung beteiligen. Ein Maximum der λ, S-Kurve könnte demnach nur außerhalb des roten Endes des Spektrums gelegen sein. Diese Folgerung widerspricht aber offensichtlich der Erfahrung, und damit hat sich die Annahme II a als hinfällig erwiesen.[1]) Mit Hilfe ähnlicher Überlegungen gelangt man auch zu einer Bestätigung des unter II b 1 Gesagten.

1) Eine genauere Rechnung, bei der die durch Absorption bewirkte Verschiedenheit der Lichtintensitäten an verschiedenen Stellen in jedem der beiden Teile der Platte berücksichtigt wird, führt im wesentlichen zu dem gleichen Ergebnis.

Die Versuche über die Abnahme der elektrischen Wirkung auf dem Wege, den das Licht in der Platte durchläuft, haben somit die von vornherein schon als sehr wahrscheinlich zu bezeichnende Ansicht durchaus bestätigt, *daß die für die bei X-bestrahltem NaCl beobachteten elektrischen Vorgänge nötige Energie von dem Licht auf dem Wege der Absorption zugeführt wird.*

Bezüglich der λ, $(S_I - S_{II})/S_I$-Kurven ist noch folgendes zu erwähnen. Es wird auffallen, daß die aus den auf dem Rückwege von kleineren zu größeren Wellenlängen erhaltenen Stromstärken abgeleiteten Kurven unter den anderen liegen, daß somit die relative Abnahme der elektrischen Wirkung mit der Dicke der vom Licht durchlaufenen Schicht geringer gefunden wurde, wenn mit der Beleuchtung von kleineren zu größeren Wellenlängen, als wenn in umgekehrter Richtung vorgegangen wurde; und weiter, daß die Maxima der erstgenannten Kurven weiter nach kleineren Wellenlängen liegen als die der anderen. Die Erklärung dieser Ergebnisse liegt in der mehrfach erwähnten Tatsache, daß die Aktivität des X-bestrahlten NaCl von selbst, aber durch Beleuchtung bedeutend beschleunigt mit der Zeit abnimmt: da in dem Teil II der Platte die Lichtstärke infolge stattgefundener Absorption kleiner ist als im Teil I, so wird die Abnahme der Lichtempfindlichkeit nach einer gewissen Zeit in diesem Teile größer sein als in jenem, und es muß deshalb das Verhältnis $(S_I - S_{II})/S_I$ zu einer späteren Zeit kleiner gefunden werden als im Anfang, und die Maxima der beiden Kurven müssen in der wahrgenommenen Weise gegeneinander verschoben sein.

Für die Bestimmung der Schwächung, die die elektrische Wirkung des Lichtes auf dem Wege des Lichtes im blauen Steinsalz erfährt, kommen die früher auf S. 167 u. 175 erwähnten Versuche in Betracht, die auch, wie bei den entsprechenden mit der X-bestrahlten Platte, mit einer an zwei hintereinander gelegenen Stellen belegten Platte gemacht wurden.

Ich gab a. a. O. die Gestalt der erhaltenen λS-Kurve, sowie die Lage ihres Maximums auf der Wellenlängenachse an, und erklärte diese etwas auffallende Gestalt, insbesondere das bei keiner anderen λS-Kurve beobachtete Auftreten eines Minimums (bei ungefähr 600—620 $\mu\mu$) und auch den Unterschied zwischen der Lage ihres Maximums und der Lage

des Maximums, das bei der gleichen, aber in der Dickenrichtung beleuchteten Platte gefunden war. Diese Erklärung ging von der Tatsache aus, daß ein Schwächungsgebiet spektroskopisch konstatiert worden war, dessen dunkelste Stelle, wenn auch mit den verwendeten optischen Instrumenten nicht genauer bestimmbar, doch jedenfalls nicht so sehr weit von dem genannten Minimum gelegen ist. Es fragte sich nun, welches Ergebnis Versuche über die lichtelektrisch zu messende Schwächung liefern. Zur Beantwortung dieser Frage wurde in ähnlicher Weise verfahren, wie es bei dem X-bestrahlten NaCl geschah. Ich sehe, weil die Versuche, wie mehrmals erwähnt, nicht so sorgfältig gemacht wurden, wie die mit X-bestrahltem NaCl, von der Wiedergabe aller Bestimmungen

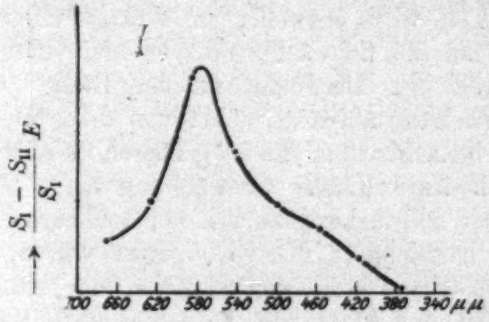


Fig. 14.

ab und führe statt dessen zu einem Vergleich mit jener λ, S-Kurve in der Fig. 14 die Form einer der berechneten Schwächungskurven $\lambda, (S_I - S_{II}) E / S_I$ vor. Sie zeigt ein Maximum der Schwächung bei ungefähr 580 $\mu\mu$, also, wie auch die Maxima der übrigen Schwächungskurven, etwas weiter nach kleineren Wellenlängen gelegen, als das Minimum der λS-Kurve. Das optisch gemessene größere Absorptionsgebiet lag, wenn es auch nicht genau bestimmt werden konnte, auch ungefähr an derselben Stelle (vgl. S. 184); ich habe deshalb trotz der vorhandenen Unsicherheiten in diesen Bestimmungen — die wohl verdienten, mit größerer Sorgfalt wiederholt zu werden — kein Bedenken, wiederholt diese Absorption als den Grund sowohl für das beobachtete Minimum in den λS-Kurven als auch für die Verschiebung des Maximums dieser Kurven nach kleineren Wellenlängen zu bezeichnen.

Das erwähnte Minimum in den λS-Kurven deutet keineswegs an, daß die Lichtempfindlichkeit des blauen Steinsalzes an dieser Stelle ganz besonders gering sein muß: die mit vertikaler Beleuchtung gefundenen Kurven beweisen das Gegenteil. Eine geringe Empfindlichkeit für Licht der der Lage des Minimums entsprechenden Wellenlänge wird nur vorgetäuscht, und zwar dadurch, daß bei der seitlichen, horizontalen Beleuchtung der Platte infolge von Absorption (Schwächung) verhältnismäßig wenig Licht der betreffenden Wellenlänge zu den Stellen gelangt, wo die Elektrizitätsleitung gemessen wird. Ebensowenig braucht das Vorhandensein des Maximums in der Schwächungskurve eine hohe Lichtempfindlichkeit für das betreffende Licht zu bedingen; nur ein geringer Teil dieses Lichtes wird zu einer elektrischen Wirkung verwendet, und der größere Teil wird entweder in Wärme umgesetzt oder abgebeugt. Daß die Schwächungskurve kein, oder jedenfalls kein ausgesprochenes Maximum an der Stelle der größten elektrischen Wirkung aufweist, rührt von dem überwiegenden Einfluß des benachbarten, nach größeren Wellenlängen zu gelegenen Gebietes stärkerer Schwächung her. Man könnte aber leicht zwei Schwächungskurven konstruieren, deren Kombination die gezeichnete Kurve ergeben würde, und von denen die niedrigere ihr Maximum an der Stelle größter elektrischer Wirkung hätte; die Form des absteigenden Astes der Figur deutet sogar auf diese Möglichkeit hin.

Es liegt beim blauen NaCl offenbar der oben auf S. 187 unter II b 1 erwähnte Fall vor, wo zwischen der gesamten und der für die elektrische Wirkung nötigen Lichtabsorption keine einfache Beziehung besteht.

Die Wahrnehmung, daß X-bestrahltes und blaues Steinsalz durch Beleuchtung eine gewisse „Leitfähigkeit“ erhalten können, wurde im Jahre 1904 gemacht, und wir bildeten uns sofort auf Grund der in Wied. Ann. **59.** S. 187. 1896 veröffentlichten Beobachtung der Herren Elster und Geitel, nach der durch Kathodenstrahlen eine Anzahl von Mineralien (darunter auch NaCl) lichtempfindlich im Hallwachsschen Sinn gemacht werden können, sowie der Ergebnisse der ultramikroskopischen Untersuchung von farbigen NaCl-Präparaten durch Hrn. Siedentopf, die Vorstellung, daß es sich bei

unseren Versuchen um eine durch äußere elektrische Kräfte im Innern der Kristalle veranlaßte Verschiebung von durch Beleuchtung beweglich gemachten Elektronen der Na-Teilchen[1]) handele. Kurze Zeit nachher erschienen die Arbeiten von Hrn. Scholl bzw. von Hrn. Wilson, durch die das Vorhandensein einer Elektronenleitung im beleuchteten, elektrischen Kräften ausgesetzten Jodsilber als sehr wahrscheinlich nachgewiesen wurde; diese Arbeiten bestärkten uns in unserer Ansicht. Die spezielle, den sichtbaren und den verwendeten ultravioletten Strahlen nicht zukommende Eigenschaft der X-Strahlen, Steinsalz für die genannte Beeinflussung durch Licht empfänglich zu machen, beruht wohl sicher auf ihrem großen Wirkungsquantum und ihrer Absorbierbarkeit im NaCl. Für sehr beachtenswert halte ich die vielleicht zu einer Erklärung der Wirkung der X-Strahlen führende Tatsache, daß die untersuchten Körper sowohl bei dem Entstehen (d. h. während ihrer Bestrahlung), als beim Verschwinden (d. h. bei ihrer Erhitzung) der durch die Bestrahlung hervorgerufenen Veränderungen in charakteristischer Farbe leuchten.

Es ist mir bis jetzt nicht gelungen, alle beobachteten Einzelheiten, wie z. B. die Ermüdung, die Erholung, die Polarisation, die verschiedenen Nachwirkungen, den Temperatureinfluß, in den Rahmen unserer oben mitgeteilten Vorstellung ohne gegenseitigen Zwang, d. h. ohne ad hoc gemachte Hypothesen, einzufügen.

Dem Institutsassistenten Hrn. Dr. Lang, der mir bei der Fertigstellung des Manuskripts wesentliche Hilfe leistete, sage ich auch hier meinen besten Dank.

München, Frühjahr 1920.

1) Vgl. S. 131.

(Eingegangen 22. Juli 1920.)

2. *Weitere Untersuchungen über den Faradayeffekt nicht ferromagnetischer Metalle;* *von B. Pogány.*

In einer kurzen Notiz[1]) habe ich schon über Versuche berichtet, deren Zweck war, den Faradayeffekt nichtferromagnetischer Metalle nachzuweisen.

In einem durch Kathodenzerstäubung hergestellten, in Fig. 1 im Durchschnitt schematisch skizzierten Präparat, ergab sich die magnetische Drehung der Polarisationsebene monochromatischen Lichtes in der rechten Hälfte des Präparates größer als in der linken Hälfte, und die Differenz war

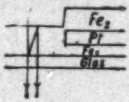


Fig. 1.

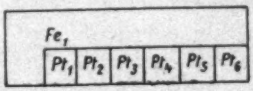


Fig. 2.

einfach als die auf die rechts befindliche Pt-Schicht entfallende magnetische Drehung aufzufassen. Ich habe die diesbezüglichen Untersuchungen weitergeführt und die dabei erhaltenen Resultate in den folgenden Zeilen zusammengestellt.

Die Versuchsanordnung ist die alte geblieben, nur die Herstellung der Präparate habe ich ein wenig abgeändert. Um nämlich die Konstanz der Dicke der Eisenschichten bei den ausgedehnteren (26 · 76 mm) treppenförmigen Präparaten kontrollieren zu können, habe ich die Treppen des nichtferromagnetischen Metalles auf die eine Hälfte der Platte beschränkt (Fig. 2), um entlang der anderen Hälfte überall die Drehung auch in der Fe_1 bzw. Fe_2-Schicht messen zu können.

§ 1. Vor der Mitteilung weiterer Messungsergebnisse soll eine an den beobachteten Drehungswinkeln im allgemeinen anzubringende Korrektion besprochen werden, welche durch

1) B. Pogány, Physik. Zeitschr. S. 422. 1917.

die Anwendung einer Halbschattenplatte zur empfindlichen Einstellung des Analysators bedingt wird.

Die Theorie der bei Anwendung einer Halbschattenplatte an den beobachteten Winkeln der magnetischen Drehung anzubringenden Korrektion hat W. Voigt gegeben[1]) im Falle durchsichtiger magnetisch aktiver Medien. Bedeutet ϑ die beobachtete magnetische Drehung, J die Intensität des die magnetisch aktive Schicht einmal durchsetzenden Lichtes, j die Intensität des Lichtes, das die aktive Schicht infolge innerer Reflexionen dreimal durchsetzt hat, so ist die Korrektion

$$d\vartheta = -\frac{j}{J}\sin 4\vartheta . \tag{1}$$

Da nun ϑ der aktiven Schichtdicke proportional, j/J aber bei durchsichtigen Medien davon unabhängig ist, so ist auch $d\vartheta$ proportional der Dicke der Schicht, kann also bei durchsichtigen Substanzen eventuell beträchtliche Werte erreichen. Bei absorbierenden magnetisch aktiven Substanzen, z. B. Eisenschichten, wird natürlich j/J ebenfalls von der Schichtdicke abhängen und zwar erfreulicherweise derart, daß die Korrektion eine kleine maximale Größe nicht überschreiten kann.

Es bedeute J_0 die Intensität der auf die Eisenschicht senkrecht einfallenden linear polarisierten ebenen Lichtwelle, R' und R'' das Reflexionsvermögen der die Eisenschicht begrenzenden Ebenen bei senkrechter Inzidenz, D' und D'' die Durchlässigkeit derselben Grenzebenen. Dann ist

$$\begin{cases} j = J_0 R' R'' D' D'' e^{-\frac{4\pi}{\lambda} n \varkappa 3z}, \\ J = J_0 D' D'' e^{-\frac{4\pi}{\lambda} n \varkappa z}, \\ \frac{j}{J} = R' R'' e^{-\frac{8\pi}{\lambda} n \varkappa z}, \end{cases} \tag{2}$$

wobei λ die in Luft gemessene Lichtwellenlänge, n und $\varkappa$ den Brechungs- bzw. den Absorptionsindex von *Fe* und z die Dicke der Eisenschicht bedeutet. Da ϑ proportional z ist, schreiben wir

$$4\vartheta = cz ,$$

wo c also das Vierfache des Winkels ist, um welchen eine Eisenschicht von der Dicke Eins, die Polarisationsebene des Lichtes

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. S. 13.

dreht. c ist noch von λ und von der magnetischen Feldstärke abhängig. Die Korrektion wird also:

$$d\vartheta = -\frac{R'R''}{2} e^{-\frac{8\pi}{\lambda} n\varkappa z} \sin cz, \tag{3}$$

erreicht also eine maximale Größe bei dem durch die Gleichung

$$-\frac{8\pi}{\lambda} n\varkappa e^{-\frac{8\pi}{\lambda} n\varkappa z} \sin cz + c e^{-\frac{8\pi}{\lambda} n\varkappa z} \cos cz = 0$$

bestimmten Werte von

$$z_{\max.} = \frac{1}{c} \operatorname{arctg} \frac{c\lambda}{8\pi n\varkappa}. \tag{4}$$

Betrachten wir nun Eisenschichten, die bis zur Sättigung magnetisiert sind und benutzen wir z. B. Licht von der Wellenlänge $\lambda = 500\ \mu\mu$. Dann wird nach eigenen Messungen, die mit den Lobachschen[1]) gut übereinstimmen, die Polarisationsebene pro $\mu\mu$ um 0,94 Winkelminuten gedreht, also $c = 3{,}76$ Min./$\mu\mu$. Es ist weiterhin ebenfalls nach eigenen Beobachtungen an kathodenzerstäubten Eisenschichten $n = 2{,}42$, $\varkappa = 0{,}84$, also wird

$$z_{\max.} = \frac{1}{3{,}76} \operatorname{arctg} \frac{0{,}00109 \cdot 500}{8\pi \cdot 2{,}03}\ \mu\mu = 9{,}86\ \mu\mu.$$

Die Korrektion erreicht also bei Eisenschichten und für die benutzte Lichtart schon bei 10 $\mu\mu$ ihren größten Wert. Wollen wir nun die Korrektionen $d\vartheta_1$, $d\vartheta_2$, $d\vartheta_{1+2}$ für die drei Eisenschichten (Fig. 1) Fe_1, Fe_2 und $Fe_1 + Fe_2$ berechnen, so muß man noch das Reflexionsvermögen an den Grenzen der in Betracht kommenden Medien:

	n	$n\varkappa$
Luft	1,0	0
Glas	1,5	0
Pt	2,28	3,38
Fe	2,42	2,03

nach der Formel

$$R_{12} = \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_1\varkappa_1 - n_2\varkappa_2)^2}{(n_1 + n_2)^2 + (n_1\varkappa_1 + n_2\varkappa_2)^2}$$

in Rechnung setzen. Es wird:

$$R_{L,Fe} = 0{,}388, \quad R_{Gl,Fe} = 0{,}255, \quad R_{Pt,Fe} = 0{,}036.$$

1) W. Lobach, Ann. d. Phys. **39**. S. 358. 1890.

Setzt man diese Werte in den Ausdruck Gleichung (3) für $d\vartheta$ ein, so kann man die Korrektionen als Funktionen von z berechnen. Sie sind in der Fig. 3 dargestellt. Für uns handelt es sich um die Korrektion

$$d\vartheta_1 + d\vartheta_2 - d\vartheta_{1+2}, \tag{5}$$

die an der auf die Platinschicht entfallenden magnetischen Drehung der Pol.-Ebene anzubringen ist, die sich ja als die

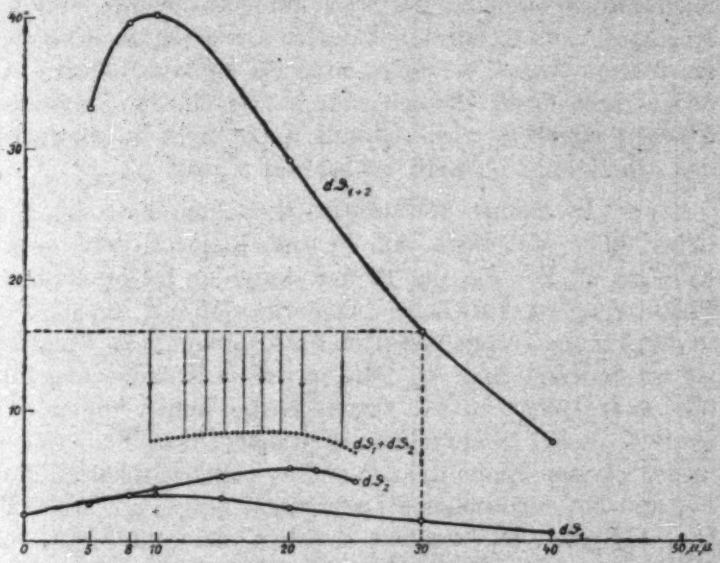


Fig. 3.

Differenz der in den beiden Hälften des Präparates beobachteten Drehungen ergibt. Der Wert von Gleichung (5) hängt bei gegebener Gesamtdicke der Schicht $Fe_1 + Fe_2$ noch ab von der Verteilung dieser Dicke auf die zwei Schichten Fe_1 und Fe_2. Es sei z. B. die Gesamtdicke 30 $\mu\mu$. Spiegelt man dann die Kurve für $d\vartheta_2$ an der Achse $z = 15\ \mu\mu$, wie in Fig. 3, so erhält man durch Addition von $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$ die punktierte Kurve, welche $d\vartheta_1 + d\vartheta_2$ für alle möglichen Verteilungen angibt. Um Gleichung (5) zu bekommen, hat man noch von der punktierten Kurve die zu 30 $\mu\mu$ gehörige Ordinate von $d\vartheta_{1+2}$ zu substrahieren. Die Pfeile geben die Korrektion Gleichung (5) nach Vorzeichen und Größe. Unter den betrachteten Verhältnissen ist nun die Drehung einer ent-

sprechend dicken Pt-Schicht 10—18 Bogenminuten, die Korrektion daneben also meistens zu vernachlässigen. Es ist noch zu bemerken, daß die Korrektion je nach den Verhältnissen positiv oder negativ sein kann. Auf keinen Fall ist es aber möglich das Resultat meiner Beobachtungen, daß nämlich in der rechten Hälfte des in Fig. 1 skizzierten Präparates die magnetische Drehung der Polarisationsebene größer gefunden wurde als in der anderen, welche Differenz dann als die gesuchte magnetische Drehung des Pt-s aufgefaßt wurde, durch diese Korrektion, d. h. durch sekundäre Ursachen zu erklären. Die Korrektion wegen der Glasplatte als aktiven Schicht, welche an verschiedenen Stellen durch verschieden reflektierende Flächen begrenzt wird, kommt auch nicht in Betracht, wie das direkt experimentell beobachtet wurde.

§ 2. In meiner vorläufigen Mitteilung habe ich ausführlicher über Messungen an Pt berichtet. Neuere Messungen habe ich an Pd, Ag, Cu, Bi und einige an Cd ausgeführt. Zur Erläuterung der Tabellen sei bemerkt, daß mit Ag_k die Drehung in der k^{ten} Ag-Treppe bezeichnet ist, deren Dicke k mal so groß ist als diejenige von Ag_1, die in der 5. Kolonne angeführt ist und zwar stehen in der ersten Reihe immer die unter dem Einfluß von Fe_1 entstandenen Drehungen, also $[(Fe_1+Ag_k)-Fe_1]$, in der zweiten Reihe die unter dem gleichzeitigen Einfluß von Fe_1 und Fe_2 entstandenen Drehungen, also $(Fe_1+Ag_k+Fe_2)-(Fe_1+Fe_2)$. Die Angaben beziehen sich auf Licht von der Wellenlänge $\lambda = 590\ \mu\mu$ und auf ein äußeres magnetisches Feld von 23,4 Kilogauß.

Die Silbertreppen 4 und 5 an Platte 77 waren nicht metallisch reflektierend, sondern perlmuttergrau; das macht sich auch in ihrer Drehung bemerkbar. Am Präparat 85 hat das Hinzusetzen von Fe_2 die unter dem Einfluß von Fe_1 zustande gekommene Drehung im Silber vergrößert, am Präparat 77 verkleinert. Es mag das mit der verschiedenen Dicke dieser Fe_2-Schichten zusammenhängen (vgl. S. 208 u. Fig. 9). In einem der günstigsten Fälle, z. B. bei 85 Ag_4 zwischen Fe_1 und Fe_2 betrug die magnetische Drehung der Polarisationsebene 0,65 Bogenminuten pro $\mu\mu$, während unter gleichen Verhältnissen das Eisen 1,2 Minuten pro $\mu\mu$ dreht.

Es sei bemerkt, daß die ersten drei Treppen des Cu-Präparates 106 und die 2. und 5. Treppe von 110 dem äußeren

Aussehen nach zu urteilen nicht reines, metallisches Cu waren. Die Treppen waren nicht metallisch reflektierend, sondern „blind", und waren z. B. die Treppen 1 und 2 an 106 im durch-

Tabelle 1.

in	Dicke von Glas mm	Dicke von Fe_1 $\mu\mu$	Dicke von Fe_2 $\mu\mu$	Dicke von Ag_1 $\mu\mu$	Drehung in Ag_1	Drehung in Ag_2	Drehung in Ag_3	Drehung in Ag_4	Drehung in Ag_5	Drehung in Ag_6
77	0,84	13,15	—	7,4	1′ 6″	5′ 20″	9′ 11″	11′ 46″	11′ 06″	12′ 23″
	0,84	13,15	42,5	7,4	1′ 17″	5′ 15″	8′ 25″	5′ 31″	6′ 20″	9′ 8″
79	0,84	39,0	—	15,2	7′ 57″	10′ 7″	12′ 22″	—	—	—
85	0,75	20,6	—	7,0	0′ 10″	2′ 55″	7′ 52″	9′ 28″	10′ 6″	9′ 02″
	0,75	20,6	18,3	7,0	−0′ 55″	6′ 30″	15′ 30″	17′ 52″	18′ 47″	18′ 40″
87	0,49	56,0	—	27,8	5′ 30″	6′ 45″	—	—	—	—

Tabelle 2.

in	Dicke von Glas mm	Dicke von Fe_1 $\mu\mu$	Dicke von Fe_2 $\mu\mu$	Dicke von Cu_1 $\mu\mu$	Drehung in Cu_1	Drehung in Cu_2	Drehung in Cu_3	Drehung in Cu_4	Drehung in Cu_5	Drehung in Cu_6
104	0,67	36	—	11,4	1′ 32″	4′ 42″	5′ 52″	5′ 15″	5′ 50″	6′ 02″
	0,67	36	—	11,4	7′ 02″	5′ 32″	2′ 30″	3′ 36″	—	—
106	0,70	22	—	9,0	−5′ 45″	0′ 25″	2′ 00″	6′ 15″	6′ 14″	6′ 57″
110	0,72	20	—	16,5	4′ 50″	4′ 32″	7′ 35″	7′ 50″	6′ 00″	—
111	0,65	10	—	21,0	6′ 58″	8′ 42″	10′ 12″	10′ 21″	—	—

gehenden Lichte heller als Fe_1 allein, was besagen würde, daß auch der unter Treppe 1 und 2 liegende Teil der Fe_1-Schicht von der (wahrscheinlichen) Oxydation angegriffen war.

Wie aus der 3. Tabelle zu ersehen ist, wird die Drehung in Bi nach Hinzutreten der Fe_2-Schicht negativ. Eine einzige

Tabelle 3.

in	Dicke von				Drehung in						
	Glas mm	Fe_1 $\mu\mu$	Fe_2 $\mu\mu$	Bi_1 $\mu\mu$	Bi_1	Bi_2	Bi_3	Bi_4	Bi_5	Bi_6
88	0,72	12,7	—	14,0	2′ 10″	5′ 30″	7′ 40″	6′ 30″	6′ 50″	5′ 0″
	0,72	12,7	38,8	14,0	− 1′ 10″	− 2′ 30″	−2′ 47″	−9′ 10″	−11′ 25″	−18′ 2″
89	0,68	36,0	—	25,0	1′ 25″	8′ 52″	9′36″	—	—	—
	0,68	36,0	35,0	25,0	−7′ 43″	−5′ 00″	—	—	—	—
94	0,65	42,0	—	12,0	−1′ 40″	3′ 35″	—	—	—	—
	0,65	42,0	23,0	12,0	−1′ 08″	−3′ 00″	—	—	—	—
95	0,72	33,0	—	26,0	3′ 00″	3′ 55″	3′ 16″	—	—	—
	0,72	33,0	14,4	26,0	−3′ 30″	−2′ 15″	−3′ 10″	—	—	—
96	0,72	15,0	—	2,4	0′ 35″	0′ 45″	2′ 05″	1′ 45″	2′ 00″	1′ 55″
	0,72	15,0	39,0	2,4	—	0′ 25″	4′ 10″	2′ 15″	4′ 00″	3′ 50″

Tabelle 4.

in	Dicke von				Drehung in					
	Glas mm	Fe_1 $\mu\mu$	Fe_2 $\mu\mu$	Cd_1 $\mu\mu$	Cd_1	Cd_2	Cd_3	Cd_4	Cd_5	Cd_6
97	0,55	20,8	—	5,4	−1′ 30″	5′ 53″	6′ 08″	6′ 48″	6′ 30″	—
	0,55	20,8	16,6	5,4	−2′ 20″	0′ 50″	2′ 30″	2′ 55″	2′ 05″	—
98	0,66	21,0	—	7,0	− 1′ 00″	0′ 00″	4′ 33″	5′ 30″	7′ 00″	5′ 12″
	0,66	21,0	20,0	7,0	−3′ 00″	−4′ 10″	−4′ 35″	−5′ 25″	−6′ 40″	—

Ausnahme bildete das Bi-Präparat 96, was vielleicht mit der äußerst geringen Dicke der darauf befindlichen Bi-Schichten zusammenhängt.

§ 3. Ich habe auch die magnetische Rotationsdispersion der Metalle Pt, Pd, Ag, Cu und Bi wenigstens im gut sichtbaren Teile des Spektrums von $\lambda = 500\ \mu\mu$ bis $\lambda = 650\ \mu\mu$ untersucht.

Was die magnetische Rotationsdispersion von Pt und Pd anbelangt, so ist sie minimal; die magnetische Drehung der Polarisationsebene verändert sich im untersuchten Teile des Spektrums sehr langsam mit der Wellenlänge. In der kleinen Tab. 6 sind einige diesbezügliche Angaben gemacht worden.

Tabelle 5.

Dicke von				Drehung in					
in	Glas mm	Fe_1 $\mu\mu$	Fe_2 $\mu\mu$	Pd_1 $\mu\mu$	Pd_1	Pd_2	Pd_3	Pd_4	Pd_5	Pd_6
84	0,66	10,3	—	17,4	0′ 47″	3′ 45″	5′ 21″	6′ 12″	5′ 45″	3′ 43″
	0,66	10,3	22,4	17,4	6′ 25″	9′ 15″	9′ 50″	7′ 30″	2′ 55″	—

Tabelle 6.

$\lambda =$	500 $\mu\mu$	590 $\mu\mu$	650 $\mu\mu$
55 Pt	20′ 40″	18′ 46″	19′ 10″
75 Pd_3	6′ 00″	7′ 27″	7′ 15″
84 Pd_2	9′ 02″	9′ 15″	8′ 30″

Die magnetische Rotationsdispersion von Ag ist stark anomal, die Drehung wächst angenähert linear mit der Wellenlänge (vgl. Fig. 4). In der letzten Kolonne

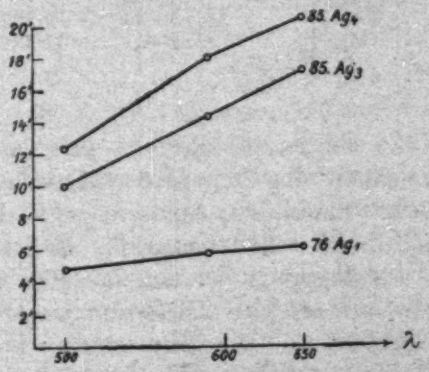


Fig. 4.

der Tab. 7 ist die Abnahme der Drehung von $\lambda = 650\ \mu\mu$ bis $\lambda = 500\ \mu\mu$ in Prozenten der bei $\lambda = 650\ \mu\mu$ beobachteten Drehung ausgedrückt.

Tabelle 7.

$\lambda =$	500 $\mu\mu$	590 $\mu\mu$	650 $\mu\mu$	
76 Ag_1	4′ 44″	5′ 46″	6′ 17″	25,4 Proz.
85 Ag_3	9′ 57″	14′ 25″	17′ 24″	42,5 „
85 Ag_4	12′ 22″	18′ 17″	20′ 35″	40,0 „

Ebenfalls anomal ist die magnetische Rotationsdispersion von Cu.

Tabelle 8.

$\lambda =$	500 $\mu\mu$	590 $\mu\mu$	650 $\mu\mu$	Anmerkung
74 Cu_1	8′ 10″*	10′ 20″	13′ 12″	
106 Cu_1	3′ 30″	5′ 45″	4′ 40″	oxidiert in der Durchsicht heller als Fe_1 allein
Cu_2	1′ 10″	0′ 40″	0′ 35″	milchig, matt
Cu_3	3′ 25″	2′ 00″	1′ 01″	milchig, matt
Cu_4	5′ 52″	6′ 16″	6′ 14″	
Cu_5	6′ 00″	6′ 11″	7′ 15″	
Cu_6	5′ 18″*	6′ 57″	9′ 17″	
110 Cu_1	3′ 43″*	4′ 50″	6′ 25″	
Cu_2	4′ 40″	4′ 32″	5′ 55″	milchig trübe
Cu_3	5′ 30″*	7′ 35″	10′ 52″	
Cu_4	6′ 04″*	7′ 50″	10′ 20″	
Cu_5	3′ 05″	6′ 00″	7′ 00″	ganz schwach matt
111 Cu_1	5′ 12″*	6′ 48″	9′ 02″	
Cu_2	6′ 42″*	8′ 42″	10′ 47″	
Cu_3	—	10′ 12″	12′ 02″	
Cu_4	—	10′ 21″	11′ 00″	
112 Cu_5	7′ 30″	—	9′ 45″	

In der letzten Kolonne der Tab. 8 sind die Cu-Schichten bezeichnet, die dem bloßen Aussehen nach zu urteilen nicht tadellos metallisch, sondern oxydiert waren. Dieser Umstand machte sich schon bemerkbar in Tab. 2 bei der Untersuchung der Abhängigkeit der magnetischen Drehung von der Schichtdicke und offenbart sich nun wieder in der Dispersion dieser Cu-Schichten. Die mit einem * bezeichneten, tadellosen, metallisch reflektierenden Cu-Schichten weisen eine anomale Rotationsdispersion von bemerkenswerter Regelmäßigkeit auf, wie das Fig. 5 und auch die folgende kleine Zusammenstellung zeigt, in welcher für die genannten Cu-Schichten die Abnahme der magnetischen Drehung von $\lambda = 650\ \mu\mu$ bis $\lambda = 500\ \mu\mu$

in Prozenten der bei $\lambda = 650\ \mu\mu$ beobachteten Drehung ausgedrückt ist.

	$74\ Cu_1$ 37 Proz.	$111\ Cu_2$ 38 Proz.	$110\ Cu_4$ 42 Proz.	$110\ Cu_2$ 49 Proz.	$106\ Cu_6$ 43 Proz.	$111\ Cu_1$ 43 Proz.	$110\ Cu_1$ 43 Proz.
D_{Cu} in $\mu\mu$	30	42	66	49,5	54	21	16,5
D_{Fe_1} in $\mu\mu$	20	10	20	20	22	10	20
D'_{Fe_1} in $\mu\mu$	13,3	—	—	—	—	—	—

Man sieht, daß die prozentuale Abnahme an verschieden dicken Cu-Schichten verschiedener Präparate und unter dem Einfluß verschieden dicker Eisenschichten immer ungefähr

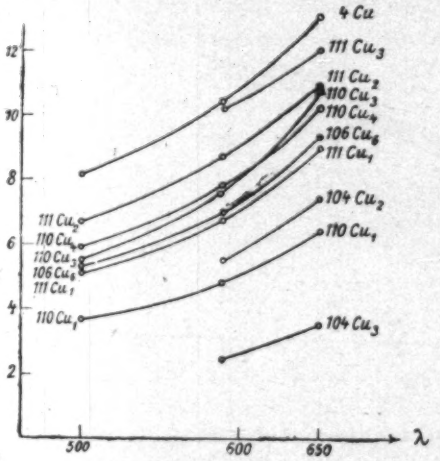


Fig. 5.

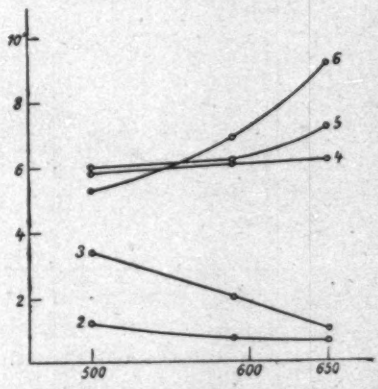


Fig. 6.

dieselbe ist. Dementsprechend ist die Dispersionskurve solcher Schichten, an denen die Drehung im absoluten Werte kleiner ist, auch weniger steil. Die Rotationsdispersion der oxydierten Schichten dagegen ist ganz oder teilweise normal. Instruktiv ist von diesem Standpunkt das Präparat Nr. 106, bei welchem Cu_1 gänzlich oxydiert zu sein scheint und normale Rotationsdispersion besitzt, Cu_6 dagegen tadellos metallisch reflektierend anomale Rotationsdispersion aufweist von der Regelmäßigkeit der in Fig. 5 gezeichneten Dispersionskurven. Die dazwischen liegenden vier Schichten, von denen Cu_2 und Cu_3 äußerlich Cu_1 ähnlich sahen, während Cu_4 und Cu_5 metallisch reflektierten, vermitteln den Übergang von der normalen Rotationsdispersion von Cu_1 zu der anomalen von Cu_6. Wie

aus Fig. 6 ersichtlich, besitzen die Treppen Cu_4 und Cu_5 trotz ihrer metallischen Reflexion nicht die an Cu_6 und anderen Cu-Schichten beobachtete Regelmäßigkeit der magnetischen Rotationsdispersion. Es ist zu vermuten, daß sie in ihren unteren Teilen ähnlich Cu_1—Cu_3 ebenfalls teilweise oxydiert sind. Die magnetische Rotationsdispersion scheint demnach gegen derartige Verunreinigungen ebenso empfindlich zu sein, wie die Dispersion von n und $\varkappa$.

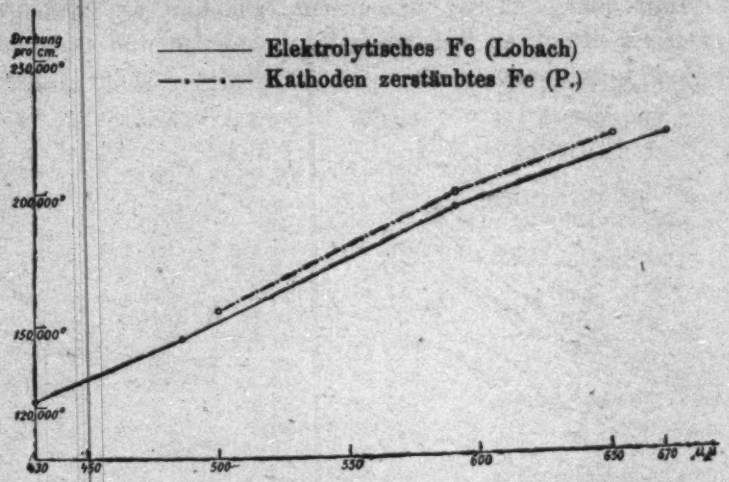


Fig. 7.

Bei diesen Untersuchungen ergab sich nebenbei auch die magnetische Rotationsdispersion der Fe_1-Schichten, an denen z. B. die Cu-Schichten angrenzten. Die magnetische Rotationsdispersion des Eisens hat bekanntlich Lobach[1]) in seiner schönen Arbeit an elektrolytisch hergestellten Fe-Schichten bestimmt. Skinner und Tool[2]) haben für die spezifische Drehung an kathodenzerstäubten Eisenschichten Werte beobachtet, die zwei- bis dreimal größer sind als die von Lobach gemessenen und auch die Kurve der magnetischen Rotationsdispersion ist bei ihnen steiler als bei Lobach. Ingersoll[3]) hat auf die Fehler der Dickenbestimmung bei Skinner und Tool hingewiesen und an kathodenzerstäubten Eisenschichten ähnliche Werte wie Lobach erhalten. Die von mir an kathoden-

1) W. Lobach, Ann. d. Phys. **39**. S. 347. 1890.
2) Skinner u. Tool, Phil. Mag. (6) **16**. S. 833. 1908.
3) L. R. Ingersoll, Phil. Mag. (6) **18**. S. 74. 1909.

zerstäubten Fe-Schichten gemessenen Werte der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes schließen sich den Lobachschen genau an. In Fig. 7 ist die Lobachsche magnetische Rotationsdispersionskurve ausgezogen, die von mir beobachtete punktiert gezeichnet. Die Absolutwerte der Drehung sind bei mir im Durchschnitt um 2,5 Proz. größer. Die Dicke der Fe-Schichten, die zur Bestimmung der magnetischen Rotationsdispersion des Eisens herangezogen wurden, habe ich durch Wägung an einer Nemetzschen Mikrowage bestimmt.

§ 4. Zuletzt habe ich einige Versuche über die Abhängigkeit der im nichtferromagnetischen Metall beobachteten magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes von der Dicke der das molekulare magnetische Feld hervorrufenden Fe-Schicht

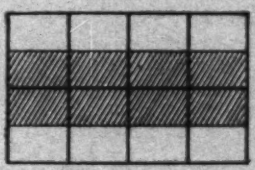


Fig. 8.

angestellt. Zu diesem Zwecke habe ich auf kleinen Glasplatten von der Größe $8 \times 26\ mm^2$ Eisenschichten von verschiedener Dicke hergestellt und 8 Stück davon gleichzeitig unter eine Pt-Kathode gelegt und die Hälfte ihrer Oberfläche (vgl. Fig. 8) bestäubt. Es wurden auf diese Weise auf verschieden dicken Eisenschichten Pt-Schichten genau gleicher Dicke hergestellt. Die Dicke der Pt-Schichten habe ich durch Wägung bestimmt, diejenige der Eisenschichten aus ihrer magnetischen Drehung berechnet.

Es wurde dann in der üblichen Weise die Drehung bei $\lambda = 590\ \mu\mu$ in den beiden Hälften des Präparates gemessen. Die auf die Pt-Schicht entfallende Drehung als Funktion der Dicke der Fe-Schicht ist in der Fig. 9 für drei verschieden dicke Pt-Schichten dargestellt. Bis die Dicke der Eisenschicht kleiner als $10\ \mu\mu$ ist, ist die Drehung in Pt gering. Das hängt damit zusammen, daß, wie ich Gelegenheit hatte zu beobachten, Eisenschichten von geringerer Dicke als $10\ \mu\mu$ selbst eine geringere spezifische magnetische Aktivität besitzen als dickere

Eisenschichten. Die spezifische magnetische Aktivität der Fe-Schichten wächst mit der Dicke bis 10 $\mu\mu$, bei welcher kritischer Dicke der maximale und von nun an von der Dicke unabhängige konstante Wert erreicht wird. Bei dieser kritischen

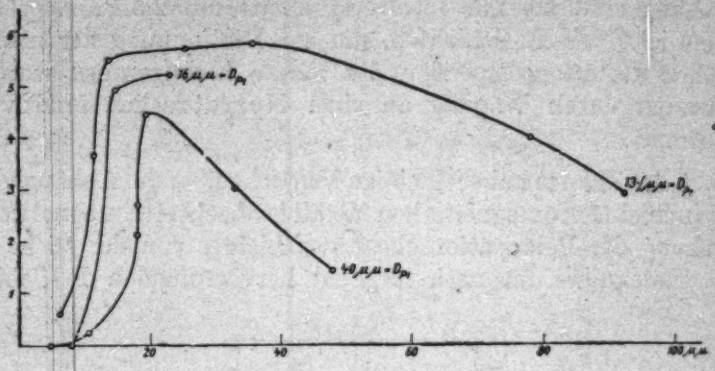


Fig. 9.

Dicke wächst auch die im Pt hervorgerufene magnetische Drehung rapid mit der Dicke um nach Erreichung eines maximalen Wertes mit wachsender Dicke, der Eisenschicht wieder langsam abzunehmen. Eine Erklärung des letzteren Verhaltens steht noch aus. Ich habe vor, in dieser Richtung weitere Beobachtungen anzustellen.

Budapest, August 1920.

(Eingegangen 17. August 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Arthur [illegible]

Werkstätten für [illegible]

Spezialfabrik von [illegible]

[illegible]

Rotierende Quecksilber-[illegible]

System Pfeiffer, D.R.P.

[illegible]

Vakuummeter a. Reiff, [illegible] D.R.P. [illegible]

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. [illegible] Öl-Luftpumpen, D.R.P.

Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen, [illegible]

Eigene Spezial-Fabrikation von [illegible]

Funkenlänge

Eingetragene

Fabrik-Marke

1921. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Die Permeabilität des Nickels für schnelle elektrische Schwingungen*[1]; *von Richard Gans und Ramón G. Loyarte.*

(Nach Messungen von Loyarte.)

Die Kenntnis der Permeabilität ferromagnetischer Materialien in ihrer Abhängigkeit von der Schwingungszahl ist von Interesse, weil sie auf die molekulare Konstitution dieser Stoffe, insbesondere auf den Mechanismus der Magnetisierung Licht zu werfen gestattet.

Nun liegen ja allerdings bereits viele Arbeiten[2]) über den genannten Gegenstand vor, doch genügen dieselben nicht im Hinblick auf den erwähnten theoretischen Zweck, und zwar aus den folgenden Gründen. Erstens hat jeder Forscher nur in einem kleinen Wellenlängengebiet gearbeitet; es ist aber nicht möglich, Resultate, die so heterogen bezüglich des verwendeten Materials und der benutzten Methode sind, miteinander zu vergleichen. Einer arbeitet mit ziemlich ungedämpften Schwingungen, bei anderen ist das Dekrement beträchtlich, bei dem einen ist die Feldstärke groß, bei anderen sehr klein, ein Einfluß derselben aber ganz unzweifelhaft[3]), die einen messen Mittelwerte des Effektivwertes, andere anders definierte Größen, die meisten haben nicht in genügender Weise den Einfluß der Foucaultströme berücksichtigt oder eliminiert.

Neuerdings hat Arkadiew[4]) Messungen mit sehr kurzen

1) Vgl. Ramón G. Loyarte, Contribución al estudio de las ciencias. Univ. Nacional de La Plata **1.** S. 451. 1917; **2.** S. 103. 1917.

2) J. Klemenčič, Wied. Ann. **58.** S. 707. 1894; J. Zenneck, Ann. d. Phys. (4) **12.** S. 869. 1903; A. Batelli u. L. Magri, Physik. Zeitschr. **8.** S. 298. 1907; L. Schames, Ann. d. Phys. (4) **27.** S. 64. 1908; O. Bonazzi, Publicazioni dell' Istituto di Fisica dell' Università di Pisa 1910.

3) Vgl. H. Zahn, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. **11.** S. 185, 377. 1909.

4) W. Arkadiew, Physik. Zeitschr. **14.** S. 561. 1913.

elektrischen Wellen (von 72 7 cm bis herab zu 1,3 cm) angestellt. Er beobachtet ein Verschwinden der ferromagnetischen Eigenschaften bei so schnellen Schwingungen und gibt, um das anschaulich zu machen, eine graphische Darstellung der Permeabilität μ als Funktion der Wellenlänge λ, indem er $\log \lambda$ als Abszisse aufträgt, und benutzt zu dieser Figur nicht nur seine eigenen Beobachtungen, sondern auch die anderer Forscher. Wir reproduzieren sein Diagramm in Fig. 1.

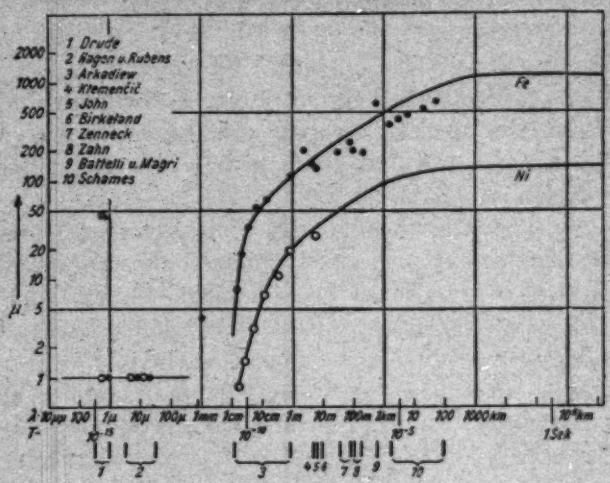


Fig. 1.

Über die Art, wie die Messungen angestellt sind, gibt er leider keine Einzelheiten, er scheint jedoch die Absorption in zwei parallelen Metalldrähten benutzt und nach einer auch nicht angegebenen Formel Absorptionskoeffizienten berechnet zu haben.

Da nicht nur die Schwingungszahl, sondern auch das Dämpfungsverhältnis auf die Permeabilität bei kurzen Wellen einen großen Einfluß hat, wäre es wünschenswert gewesen, daß er das Dekrement bestimmt und gezeigt hätte, ob und wie er es in Rechnung gezogen hat. Wir vermuten, daß letzteres nicht geschehen ist, trotzdem er wahrscheinlich mit recht gedämpften Schwingungen operiert hat.[1])

1) Nach einer Arbeit zu schließen, in der er ähnliche Probleme behandelt. Ann. d. Phys. 45. S. 133. 1914, wo die Dämpfungsverhältnisse zwischen 1,35 und 1,46 liegen.

Er berücksichtigt ferner nicht, daß, wie wir weiterhin zeigen werden, zwischen der Feldstärke H und der Induktion B bei kurzen Wellen eine Phasendifferenz auftreten muß, daß er also gar nicht μ berechnet, und man kann sich infolgedessen kein Bild machen, welche Größe er eigentlich beobachtet hat.

Schließlich vergleicht er in seiner Figur die für sehr schwache Felder gültigen μ-Werte bei schnellen Schwingungen mit Permeabilitäten bei geringer Periodenzahl, die zu endlichen Feldstärken gehören. (Bei Nickel nimmt er im stationären Fall z. B. $\mu = 150$, während der zum Vergleich heranzuziehende Wert etwa 12 wäre.)

Das sind einige von den Gründen, die es wünschenswert erscheinen lassen, das Problem von neuem experimentell und theoretisch in Angriff zu nehmen, und zwar unter Beachtung folgender Bedingungen. Die Permeabilitäten müssen von den kürzesten bis zu den längsten Wellen für sehr schwache Felder ($\lim H = 0$) bestimmt werden, d. h. es ist die sogenannte Anfangspermeabilität zu beobachten, weil dadurch die Feldabhängigkeit sowie die Hysteresis völlig eliminiert und Verhältnisse geschaffen werden, die der theoretischen Verwendung am leichtesten zugänglich sind. Ferner sollen zur Erregung der Wellen möglichst ungedämpfte Sinusschwingungen benutzt werden, um den großen Einfluß des Dekrements auf die magnetischen Eigenschaften auszuschalten. Schließlich soll theoretisch exakt festgestellt werden, welche Größe denn eigentlich gemessen wird, und es sollen aus den Resultaten möglichst alle Folgerungen bezüglich der molekularen Konstitution der Ferromagnetica gezogen werden.

§ 1. Die Magnetonen unter der Einwirkung einer periodischen Kraft.

Um einen Anhaltspunkt für die zu erwartenden Erscheinungen zu haben, wollen wir zunächst das Verhalten der Elementarmagnete in einem Wechselfelde studieren.[1]) Wir idealisieren den Fall ein wenig, indem wir von der thermischen Agitation absehen, also annehmen, daß, wenn keine äußere magnetische Kraft wirkt, jedes Magneton sich in die Richtung seines Molekularfeldes A einstellt.

1) Vgl. W. Arkadiew, Physik. Zeitschr. 14. S. 928. 1913.

Dieses Molekularfeld A, welches, wie wir früher gezeigt haben[1]), durch die magnetische Wirkung der Nachbarmagnetonen erklärt werden kann, hat eine ganz bestimmte Verteilungsfunktion.[2]) Jede Richtung im Raume ist für dasselbe gleich wahrscheinlich, und für den Betrag des Vektors wollen wir annehmen, daß er konstante Größe hat. Das ist zwar nicht ganz richtig, gilt aber näherungsweise und kommt darauf hinaus, daß wir anstatt eines praktisch nicht sehr breiten kontinuierlichen Spektrums von Eigenschwingungen eine einzige scharfe Linie als Eigenschwingung substituieren.

Der Vektor A schließe mit der Vorzugsrichtung, d. h. der Richtung, in welcher wir uns die erregende Kraft K wirkend denken, den Winkel α ein.

Wir brauchen nun nur die Bewegung in der durch A und K bestimmten Ebene zu berücksichtigen, weil die zu dieser Ebene senkrechte Komponente infolge der Reibung allmählich erlöschen muß.

Sei nun das Magneton um den Winkel ϑ aus der Gleichgewichtslage abgelenkt, so daß es also den Winkel $\alpha + \vartheta$ mit der Vorzugsrichtung bildet, so ist das Drehmoment, welches auf dasselbe wirkt, und welches den Winkel ϑ zu vergrößern trachtet, $-AM\sin\vartheta - KM\sin(\alpha+\vartheta)$, wenn M das magnetische Moment des Elementarmagneten bedeutet.

Da wir die äußere Kraft und somit auch den durch sie hervorgerufenen Ablenkungswinkel ϑ als unendlich klein betrachten wollen, so gilt für das Drehmoment genähert $-AM\vartheta - KM\sin\alpha$, und die Bewegungsgleichung für das Magneton lautet

$$J\ddot{\vartheta} + k\dot{\vartheta} + 4\pi^2 n_0^2 J\vartheta = -MK\sin\alpha. \tag{1}$$

Hier ist J das Trägheitsmoment des Elementarmagneten bezüglich einer Achse senkrecht zur magnetischen Achse, k der Reibungsfaktor, n_0 die Eigenschwingungszahl des ungedämpften Systems, also

$$AM = 4\pi^2 n_0^2 J. \tag{2}$$

---

1) R. Gans, Gött. Nachr. S. 197. 1910; sowie Ann. d. Phys. **50**. S. 149. 1916.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **63**. S. 382. 1920.

Ist die erregende Kraft K periodisch, so können wir setzen

$$-MK\sin\alpha = Ce^{2\pi int}, \tag{3}$$

und es ergibt sich für die erzwungene Schwingung

$$\vartheta = -\frac{MK\sin\alpha}{4\pi^2 J\left[n_0^2 - n^2 + \frac{kn}{2\pi J}i\right]}. \tag{4}$$

Die Magnetisierung, d. h. die geometrische Summe der magnetischen Momente aller in der Volumeinheit befindlichen Magnetonen, welche um den Winkel ϑ aus der Gleichgewichtslage abgelenkt sind, also den Winkel $\alpha + \vartheta$ mit der Vorzugsrichtung bilden, ist demnach

$$\mathfrak{M} = \sum M\cos(\alpha + \vartheta) \tag{5}$$

oder genähert, da $\sum M\cos\alpha = 0$ ist,

$$\mathfrak{M} = -M\sum\vartheta\sin\alpha, \tag{6}$$

somit nach Gleichung (4)

$$\mathfrak{M} = \sum\frac{M^2\sin^2\alpha\,K}{4\pi^2 J\left[n_0^2 - n^2 + \frac{kn}{2\pi J}i\right]}. \tag{7}$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Molekularfeld A zwischen den Winkeln α und $\alpha + d\alpha$ liegt, $\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot d\alpha$, demnach die sich auf die Volumeinheit erstreckende Summe

$$\sum\sin^2\alpha = \frac{N}{2}\int_0^\pi \sin^2\alpha\cdot\sin\alpha\,d\alpha = \frac{2}{3}N,$$

wo N die Anzahl Magnetonen in der Volumeinheit bedeutet. Wir erhalten also

$$\mathfrak{M} = \frac{NM^2K}{6\pi^2 J\left[n_0^2 - n^2 + \frac{kn}{2\pi J}i\right]} \tag{8}$$

oder

$$K = \frac{6\pi^2 J\left[n_0^2 - n^2 + \frac{kn}{2\pi J}i\right]}{NM^2}\mathfrak{M}. \tag{9}$$

Nach der Weißschen Hypothese besteht nun zwischen der erregenden Kraft K, der Feldstärke H und der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ die Beziehung

$$K = H + g\mathfrak{M}. \tag{10}$$

so daß

$$H = \left\{ \frac{6\pi^2 J\left[n_0^2 - n^2 + \frac{kn}{2\pi J} i\right]}{N M^2} - g \right\} \mathfrak{M} \tag{11}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{M}}{H} = \bar{\varkappa} = \frac{\frac{N M^2}{6\pi^2 J}}{n_0^2 - n^2 - \frac{g N M^2}{6\pi^2 J} + \frac{kn}{2\pi J} i} \tag{12}$$

wird.

Wir setzen

$$\left\{ \begin{array}{ll} n_0^2 - \frac{g N M^2}{6\pi^2 J} = n_0'^2, & \\ \frac{N M^2}{6\pi^2 J n_0'^2} & = \varkappa_0, \\ \frac{k}{2\pi J n_0'} & = \varepsilon \end{array} \right. \tag{13}$$

und nennen n_0' die scheinbare Eigenschwingungszahl, $\varkappa_0$ die Anfangssuszeptibilität, ε die Dämpfungskonstante. Dann wird nach Gleichung (12)

$$4\pi\bar{\varkappa} = \frac{4\pi\varkappa_0}{1 - \left(\frac{n}{n_0'}\right)^2 + \varepsilon \frac{n}{n_0'} i}. \tag{14}$$

Die Suszeptibilität ist also eine komplexe Größe, wir dürfen somit setzen

$$4\pi\bar{\varkappa} = a - b\,i. \tag{15}$$

Dann gilt nach der einen Maxwellschen Gleichung

$$-\operatorname{rot} E = (1 + 4\pi\bar{\varkappa}) \frac{\partial H}{\partial t} = (1 + a) \frac{\partial H}{\partial t} - b\,i \frac{\partial H}{\partial t},$$

oder, da $\frac{\partial H}{\partial t} = 2\pi n i H$ ist,

$$-\operatorname{rot} E = (1 + a) \frac{\partial H}{\partial t} + 2\pi n b H. \tag{16}$$

Setzen wir schließlich

$$a = 4\pi\varkappa = \mu - 1; \quad 2\pi n b = 4\pi\varrho, \tag{17}$$

so folgt

$$-\operatorname{rot} E = \mu \frac{\partial H}{\partial t} + 4\pi\varrho H. \tag{18}$$

Infolge der Dämpfung der Magnetonenschwingungen ist also die magnetische Induktion nicht mehr der Feldstärke proportional, sondern es tritt eine Phasenverschiebung auf infolge des Faktors ϱ, den wir wegen der Analogie mit der entsprechenden elektrischen Größe die magnetische Leitfähigkeit nennen wollen.

Durch Trennung des reellen und imaginären Teils ergibt sich nach Gleichungen (14), (15) und (17)

$$(19)\quad \begin{cases} \varkappa = \varkappa_0 \dfrac{1-\left(\dfrac{n}{n_0'}\right)^2}{\left[1-\left(\dfrac{n}{n_0'}\right)^2\right]^2+\varepsilon^2\left(\dfrac{n}{n_0'}\right)^2}; \\ \varrho = 2\pi\varkappa_0 n_0'\varepsilon \dfrac{\left(\dfrac{n}{n_0'}\right)^2}{\left[1-\left(\dfrac{n}{n_0'}\right)^2\right]^2+\varepsilon^2\left(\dfrac{n}{n_0'}\right)^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben also die Abhängigkeit der Suszeptibilität $\varkappa$ und der magnetischen Leitfähigkeit ϱ von der Schwingungszahl n.

Die Funktionen

$$y = \frac{\varkappa}{\varkappa_0}; \quad \text{sowie} \quad z = \frac{\varrho}{2\pi\varkappa_0 n_0'}$$

hängen also nicht nur von der Variablen

$$x = \frac{n}{n_0'},$$

sondern auch von dem Parameter ε ab. Umgekehrt müssen also ε, n_0' und $\varkappa_0$ bestimmbar sein, wenn man etwa $\varkappa$ für verschiedene Schwingungszahlen beobachtet. Wir wollen deshalb die Funktionen

$$(20)\quad y = \frac{1-x^2}{(1-x^2)^2+\varepsilon^2x^2}; \qquad z = \frac{\varepsilon x^2}{(1-x^2)^2+\varepsilon^2x^2}$$

diskutieren.

Für $x = 0$ ist $y = 1$,
$x = 1$ $y = 0$,
$x = \infty$ $y = 0$.

Ferner ist $\dfrac{dy}{dx} = 0$

für $x_1^2 = 1-\varepsilon$; $y_1 = \dfrac{1}{\varepsilon(2-\varepsilon)}$ (Maximum),

$x_2^2 = 1+\varepsilon$; $y_2 = -\dfrac{1}{\varepsilon(2-\varepsilon)}$ (Minimum).

Das Maximum existiert natürlich nur für $\varepsilon < 1$.

Für kleine Werte von x (sehr langsame Schwingungen) gilt $y = 1 + (1 - \varepsilon^2)\, x^2$, d. h. die Suszeptibilität nimmt anfänglich mit der Schwingungszahl zu oder ab, je nachdem ε kleiner oder größer als Eins ist.

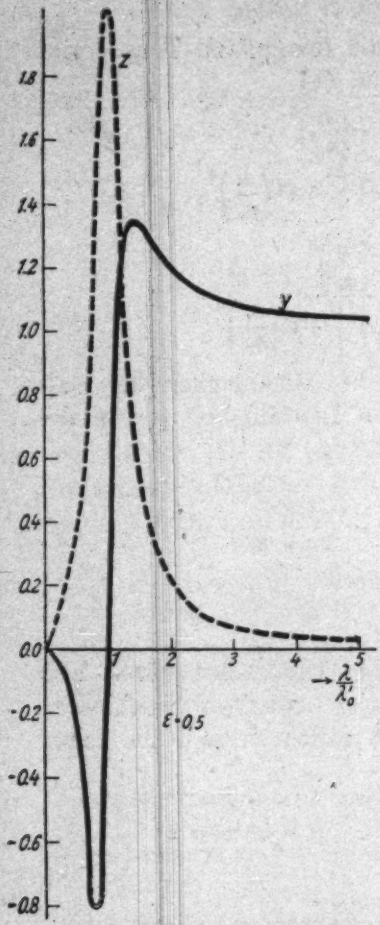


Fig. 2.

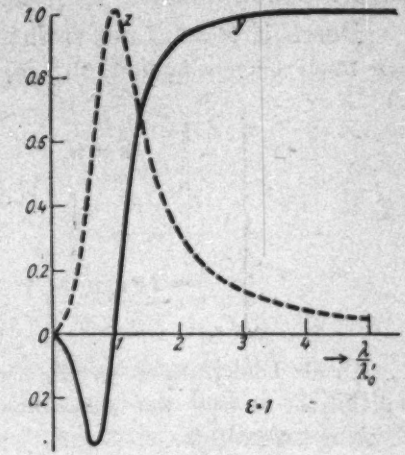


Fig. 3.

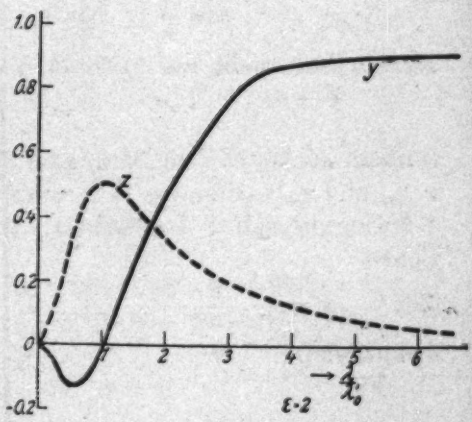


Fig. 4.

In den Figg. 2—4 haben wir y und z zur Veranschaulichung für die drei speziellen Werte $\varepsilon = 0{,}5$; $\varepsilon = 1$; $\varepsilon = 2$ gezeichnet, dabei aber als Abszisse

$$\frac{1}{x} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

gewählt, wo λ die Wellenlänge, λ_0' die scheinbare Eigenwellenlänge bedeutet.

Aus diesen Kurven folgt, daß die Permeabilität bei kleiner Dämpfung im allgemeinen mit der Schwingungszahl bis zu einem Maximum wächst außer in der Region der anomalen Dispersion, die sich von

$$\frac{n}{n_0'} = \sqrt{1-\varepsilon} \quad \text{bis} \quad \frac{n}{n_0'} = \sqrt{1+\varepsilon}$$

erstreckt. Für $n < n_0'$ ist das Material paramagnetisch, für $n > n_0'$ diamagnetisch und für sehr große Schwingungszahlen magnetisch indifferent.

Die magnetische Leitfähigkeit ist wesentlich positiv.

Für $x = 0$ ist $z = 0$,
$x = 1$ „ $z = 1/\varepsilon$,
$x = \infty$ „ $z = 0$.

Ferner ist

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = 1,$$

d. h. die magnetische Leitfähigkeit hat ihr Maximum für $n = n_0'$.

§ 2. Die Permeabilität für den stationären Fall.

Um die Permeabilität des Nickels für den stationären Fall zu messen, benutzten wir die folgende Anordnung (Fig. 5).

Die enge Magnetisierungsspule S_1 von 35 cm Länge hatte $n_1 = 9{,}40$ Windungen pro Zentimeter; sie war mittels des Stromwenders C_1 mit drei Akkumulatoren der Spannung $E = 6{,}10$ Volt und dem Widerstande R_1 in Serie geschaltet.

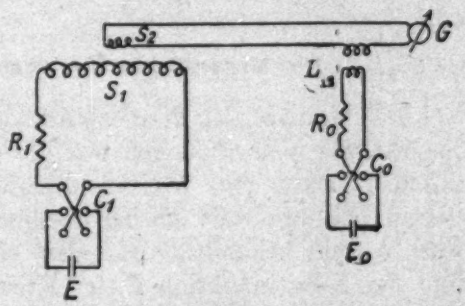


Fig. 5.

In der Spule S_1 befand sich ein Bündel, das aus 22 Nickeldrähten vom mittleren Durchmesser 0,585 mm und der Länge 35 cm bestand. Dieses Bündel war von der Spule S_2 umgeben, die $N_2 = 392$ Windungen hatte und mit dem ballistischen Galvanometer G verbunden war.

Zur Eichung desselben diente die wechselseitige Induktion L_{12}, deren Sekundärspule sich im Galvanometerkreis

befand, während die Primärspule mit einer bekannten elektromotorischen Kraft E_0, einem bekannten Widerstande R_0 und dem Kommutator C_0 den Eichkreis bildete.

Kommutiert man den Magnetisierungsstrom i_1, so erhält man einen ballistischen Ausschlag a, der sich nach der Formel

$$2 B N_2 q = 2 \mu \cdot 4 \pi n_1 i_1 N_2 q = D a \tag{21}$$

berechnet. B ist hierbei die Induktion im Bündel des Gesamtquerschnitts q. D hängt von der ballistischen Empfindlichkeit des Galvanometers ab und bestimmt sich durch

$$2 L_{12} i_0 = D a_0 , \tag{22}$$

wo a_0 den Ausschlag bedeutet, der durch Kommutieren des Eichstromes i_0 entsteht.

Als Korrektion war noch die endliche Dicke der Spule S_2 zu berücksichtigen, welche bewirkt, daß nicht alle Kraftlinien durch das Ferromagnetikum gingen, sondern einige neben dem Drahtbündel direkt durch die Spule S_2.

Auf sorgfältige Entmagnetisierung und Benutzung sehr kleiner Ströme i_1 wurde besonders geachtet, damit die Messung auch wirklich die Anfangspermeabilität ergab. Auf diese Weise erhielten wir $\mu_0 = 11{,}8$.

§ 3. Die Meßmethode für langsame Schwingungen.

Die Methode der Permeabilitätsbestimmung für elektrisch-magnetische Schwingungen war die der Messung des logarithmischen Dekrements δ eines elektrischen Schwingungskreises, dessen Leitungsdraht aus ferromagnetischem Material gebildet war. δ steht bekanntlich mit dem elektrischen Widerstande w und der Selbstinduktion L des Kreises in der Beziehung

$$\delta = \frac{w}{2 n L} ,$$

so daß, wenn man δ mittels der Bjerknesschen Resonanzmethode ermittelt und L aus den Dimensionen berechnet, der Widerstand w abgeleitet werden kann, der seinerseits für Schwingungen von der Permeabilität abhängig ist.

Die Versuchsanordnung war, je nachdem es sich um langsamere oder schnellere Schwingungen handelte, etwas ver-

schieden. Gehen wir zunächst auf die Versuchsanordnung für erstere ein.[1])

Die Löschfunkenstrecke F der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie (Fig. 6) des elektrischen Schwingungskreises I wurde mittels des Induktors J gespeist, der mit einem A.E.G.-Turbinenunterbrecher betrieben wurde. Dieser Kreis, dessen Kondensator C_1 ein variabler Glimmerkondensator der Firma Huth war, induzierte auf den zweiten rechteckigen Schwingungskreis II, dieser wieder auf den dritten III. C_2 und C_3 sind geeichte variable Luftkondensatoren der Firma Huth.

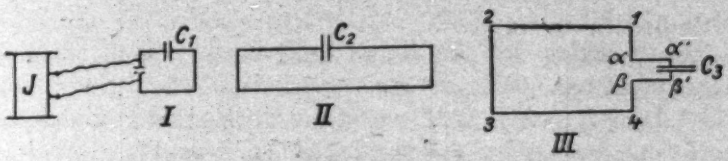


Fig. 6.

Der Schwingungskreis III war sorgfältig rechteckig konstruiert, so daß die Selbstinduktion L des Kreises $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ aus Kupferdraht nach der Formel

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{L_a}{4} = l \ln \frac{2lb}{a(l+\sqrt{l^2+b^2})} + b \ln \frac{2lb}{a(b+\sqrt{l^2+b^2})} \\ - 2\,(l+b-\sqrt{l^2+b^2}) \end{aligned} \right.$$

berechnet werden kann, unter l und b die Seitenlängen des Rechtecks, unter a den Drahtradius verstanden. Es ist jedoch zu bemerken, daß das nach Gleichung (23) berechnete L_a nur die sogenannte äußere Selbstinduktion ergibt. Zu ihr ist die von der Schwingungszahl abhängige innere Selbstinduktion L_i zu addieren. In welcher Weise diese ermittelt wurde, werden wir später sehen.

α und β waren die eigentlichen Klemmen der Kapazität, es war also noch eine schädliche Selbstinduktion $\alpha', \alpha, \beta, \beta'$ der Kondensatorzuleitungen vom Werte P vorhanden.

Diese wurde empirisch ermittelt, indem das Rechteck $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ durch ein anderes derselben Breite, aber veränderter Länge mit der äußeren Selbstinduktion L_a' ersetzt wurde. Man beobachtete die Resonanz des Kreises III auf

1) Vgl. Max Wien, Ann. d. Phys. 25. S. 625. 1908.

II mit jedem dieser beiden Rechtecke, und zwar mittels eines schwach gekoppelten Meßkreises IV, der ein Brandessches Vakuumthermoelement und ein Hagen-Rubenssches Panzergalvanometer enthielt.

Tritt die Resonanz bei den Kapazitäten C_3 bzw. C_3' ein, so gilt

$$(L_a + L_i + P)\, C_3 = (L_a' + L_i' + P)\, C_3' , \tag{24}$$

woraus sich

$$P = \frac{(L_a + L_i)\, C_3 - (L_a' + L_i')\, C_3'}{C_3' - C_3} \tag{25}$$

berechnen läßt.

Ganz genau ist allerdings diese Formel nicht, denn die Selbstinduktion zweier in Serie geschalteter Selbstinduktionen L und P ist $L + P + 2M$, wo M der wechselseitige Induktionskoeffizient der beiden Selbstinduktionen bedeutet. Dieser aber ändert sich streng genommen auch, wenn man die Dimensionen des Rechtecks variiert. Da aber nur die Länge desselben verändert wurde, die Breite aber konstant blieb, somit die benachbarten Teile der Rechtecke a, 1, 2, 3, 4, β und a', a, β, β' unverändert blieben, so kann die *Änderung* von M nichts ausgemacht haben, zumal es sich bei der Bestimmung von P nur um eine Korrektionsgröße handelte. Was man durch Formel (25) bestimmt, ist somit nicht P, sondern $P + 2M$, doch das interessiert uns auch gerade, denn durch Addition zu L erhält man $L + P + 2M$, d. i. die Gesamtselbstinduktion.

In Formel (25) kommen die inneren Selbstinduktionen L_i und L_i' vor, die von der Stromverteilung im Draht, also von der Schwingungszahl abhängen, somit unbekannt sind. Bei unserer Anordnung sind dieselben aber im Vergleich zu L_a und L_a' so klein, daß man sie in erster Näherung vernachlässigen kann.

Berechnet man auf diese Weise P aus Gleichung (25) und ermittelt die Schwingungszahl n aus der Thomsonschen Formel

$$2\pi n = \frac{1}{\sqrt{C_3 (L_a + L_i + P)}} \tag{26}$$

wiederum in erster Näherung unter Vernachlässigung von L_i, so hat man dann die Möglichkeit, nach der Stefan-Rayleighschen Beziehung (vgl. weiter unten) L_i zu berechnen

und dann mittels Gleichungen (25) und (26) genaue Werte für P und n zu erzielen.

Ersetzt man, wie es bei unserem Meßverfahren notwendig ist, das Kupferdrahtrechteck $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ durch eins aus Nickeldraht, so wurde die innere Selbstinduktion für dieses, das von der Permeabilität abhängt, nicht etwa, wie oben, errechnet, sondern die Gesamtselbstinduktion durch Resonanz der Kreise II und III experimentell bestimmt.

Das Meßverfahren war nun das folgende. Man stimmte die ziemlich eng gekoppelten Kreise I und II aufeinander ab und nahm die Resonanzkurve auf, welche dem lose mit dem Kreise III gekoppelten Kreise II entsprach. Diese Resonanzkurve beobachtete man einerseits mit einem Rechteck $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ aus Kupfer, andererseits aus Nickel bei derselben Periode der Wellen. Die beiden Rechtecke aus Kupfer und Nickel hatten die gleichen Abmessungen, und ihre Koppelungen mit dem Kreise II waren in beiden Fällen zum Überfluß die gleichen.

Die mit dem Kupferrechteck III ermittelte Resonanzkurve ergibt die Summe des Dekrements des Kreises II, d. h. der erregenden Wellen, und des durch Joulesche Wärme im Kupfer des Kreises III hervorgerufenen Dekrements; die mit dem ferromagnetischen Rechteck in III aufgenommene Kurve dagegen die Summe des Dekrements des Kreises II und des durch den Widerstand des ferromagnetischen Drahtes erzeugten Dekrements. Die Differenz der beiden so beobachteten Dekremente ist also von der Dämpfung des Kreises II unabhängig und gibt direkt die Differenz der Dekremente, die dem Widerstande des Ferromagnetikums und des Kupfers entsprechen.

Das Dekrement, welches dem Kupferwiderstande entspricht, ist eine kleine, wie wir sehen werden, leicht berechenbare Korrektionsgröße, so daß wir in der Lage sind, einerseits die durch den ferromagnetischen Draht allein erzeugte Dämpfung zu berechnen, andererseits aber auch die Dämpfung der erregenden Wellen (im Kreise II), welche auf III wirken.

§ 4. Theorie der Methode für langsame Schwingungen.

Es handelt sich darum, Widerstand und innere Selbstinduktion eines Drahtes von kreisförmigem Querschnitt für

elektrische Schwingungen zu berechnen, ein längst gelöstes Problem, das auf die Stefan-Rayleighschen Formeln führt. Jedoch hat man bisher stets angenommen, daß keine magnetische Leitfähigkeit existiert, auf deren Vorhandensein wir durch die Molekulartheorie hingewiesen worden sind.

Wir wollen deshalb die Rechnung unter der allgemeineren Voraussetzung, daß sowohl die Suszeptibilität wie auch die magnetische Leitfähigkeit von Null verschieden sind, neu durchführen, jedoch annehmen, daß die erregenden Wellen ungedämpft sind. Durch eine besondere Betrachtung im § 6 werden wir erkennen, daß diese Voraussetzung wegen der Kleinheit der Dämpfung der erregenden Wellen vollauf gerechtfertigt ist.

Die Maxwellschen Gleichungen nehmen unter unseren Voraussetzungen die Form an

$$\text{rot } H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\sigma E, \tag{27}$$

$$-\text{rot } E = \mu \frac{\partial H}{\partial t} + 4\pi\varrho H. \tag{28}$$

Vernachlässigen wir im Leiter den Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom, was im Gebiete Hertzscher Wellen erlaubt ist, und nehmen ferner an, daß die Schwingungen rein periodisch mit der Frequenz $\omega = 2\pi n$ sind, so erhalten wir

$$\text{rot } H = 4\pi\sigma E, \tag{29}$$

$$-\text{rot } E = (\mu\omega i + 4\pi\varrho) H = \mu' \omega i H. \tag{30}$$

Durch Einführung von

$$\mu' = \mu\left(1 - \frac{4\pi\varrho}{\mu\omega} i\right) = \mu(1 - \gamma i), \tag{31}$$

wo

$$\gamma = \frac{4\pi\varrho}{\mu\omega} = \frac{2\varrho}{\mu n} \tag{32}$$

ist, haben wir also formal unseren Fall auf den nicht existierender magnetischer Leitfähigkeit zurückgeführt.

Wir können uns also im weiteren an die Ableitungen anderer Autoren halten.

Ist die Wellenlänge so groß, daß der elektromagnetische Zustand als quasistationär aufgefaßt werden kann, und die Krümmung des Drahtes so klein, daß wir ihn als geradlinig

ansehen können, so hat der elektrische Vektor E, welcher der Drahtachse parallel ist, den Wert[1])

$$E = A\, J_0 (k r)\, e^{i \omega t}, \tag{33}$$

wo A eine Konstante, J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung und erster Art, r den Abstand von der Drahtachse bedeutet und

$$k^2 = -\, 4 \pi \sigma \mu' \omega i \tag{34}$$

ist.

Um Widerstand und Selbstinduktion zu definieren, konstruieren wir mit Cohn (a. a. O. S. 362) eine Fläche S, welche den Außenraum des Drahtkreises zu einem einfach zusammenhängenden macht, deren Randkurve der Länge l also auf der Drahtoberfläche verläuft. Den Induktionsfluß Q durch diese Fläche zerlegen wir in zwei Bestandteile Q' und Q'', welche von dem Strome j und dem „fremden" Felde mit der elektromotorischen Kraft E_l herrührt.

Dann gilt nach der zweiten Maxwellschen Gleichung, wenn a den Radius des kreisförmigen Drahtquerschnitts bezeichnet,

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = l E(a), \tag{35}$$

$$-\frac{\partial Q'}{\partial t} = \mathsf{E}_l . \tag{36}$$

Ferner setzen wir

$$Q' = j L_a . \tag{37}$$

Dann ist bei einem merklich geradlinigen Drahte von kreisförmigem Querschnitt L_a von der Stromverteilung über den Drahtquerschnitt und von der Schwingungszahl unabhängig, denn $\frac{L_a}{2} j^2$ bedeutet die magnetische Energie des *Außenraums*.

Subtrahieren wir Gleichung (35) von (36), berücksichtigen, daß $Q = Q' + Q''$ ist, und benutzen Gleichung (37), so erhalten wir

$$\mathsf{E}_l = l E(a) + L_a \frac{\partial j}{\partial t} . \tag{38}$$

Sind E_l und j einfach harmonische Funktionen der Zeit von der Frequenz ω, so gibt es stets reelle, von der Zeit unab-

1) Vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900. S. 357.

hängige, doch im allgemeinen von der Frequenz abhängige Größen w und L, welche die Gleichung

$$\mathsf{E}_f = wj + L\frac{\partial j}{\partial t} \tag{39}$$

befriedigen. Diese nennen wir Widerstand und Selbstinduktion.

Nach Gleichungen (38) und (39) gilt

$$wj + (L - L_a)\frac{\partial j}{\partial t} = l\,E(a). \tag{40}$$

Bevor wir diese beiden Größen tatsächlich berechnen, wollen wir die physikalische Bedeutung von w ermitteln.

Hierzu dient uns der Poyntingsche Satz

$$\left\{\begin{aligned} -\int \Sigma_n\, dS &= \int \sigma E^2\, d\tau + \int \varrho H^2\, d\tau \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{\mu H^2}{8\pi}\, d\tau + \int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\, d\tau\right\}, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

der aus Gleichungen (27) und (28) folgt.

Wenden wir diese Gleichung auf den Innenraum des Drahtes an, so ist S die Drahtoberfläche und

$$-\int \Sigma_n\, dS = \frac{1}{4\pi} E \cdot H \cdot 2\pi a\, l\,. \tag{42}$$

Nun ist aber nach Gleichung (29)

$$H \cdot 2\pi a = 4\pi j\,, \tag{43}$$

also

$$-\int \Sigma_n\, dS = E(a)\, j \cdot l\,, \tag{44}$$

somit wegen Gleichungen (40) und (41)

$$\left\{\begin{aligned} wj^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L - L_a}{2} j^2\right) &= \int \sigma E^2\, d\tau + \int \varrho H^2\, d\tau \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{\mu H^2}{8\pi}\, d\tau + \int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\, d\tau\right\}. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

Bilden wir die zeitlichen Mittelwerte der Terme dieser Gleichung und bezeichnen dieselben durch eckige Klammern, so ergibt sich schließlich

$$w[j^2] = \left[\int \sigma E^2\, d\tau\right] + \left[\int \varrho H^2\, d\tau\right]. \tag{46}$$

Das Produkt aus dem Widerstand und dem Quadrat der effektiven Stromstärke ist gleich der Summe der Jouleschen Wärme (Reibung der Leitungselektronen) und der Magnetisierungswärme (Reibung der Magnetonen).

Diese Magnetisierungswärme existiert, trotzdem von Hysteresis nicht die Rede ist. (Sie ist das Produkt der Reibung bei den Schwingungen der Magnetonen um stabile Gleichgewichtslagen, während die Hysteresiswärme durch die Reibung beim Umklappen der Magnetonen aus einer labilen in eine stabile Gleichgewichtslage erzeugt wird.)

Nachdem wir so die Bedeutung von w erkannt haben, wollen wir w und L wirklich berechnen.

Nach Gleichung (40) ergibt sich, wenn wir die sogenannte innere Selbstinduktion $L_i = L - L_a$ einführen,

$$w + i\omega L_i = \frac{l E(a)}{j}. \tag{47}$$

Nun ist aber nach Gleichung (43)

$$4\pi j = 2\pi a H(a) = \frac{2\pi a}{i\omega} \frac{\partial H(a)}{\partial t}. \tag{48}$$

Da nun nach der zweiten Maxwellschen Gleichung

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu' \frac{\partial H}{\partial t} \tag{49}$$

ist, so folgt

$$4\pi j = \frac{2\pi a}{i\omega\mu'} \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_a \tag{50}$$

und wegen Gleichung (47)

$$w + i\omega(L - L_a) = 2 l \omega \mu' i \left[\frac{E}{r \frac{\partial E}{\partial r}}\right]_{r=a}. \tag{51}$$

Dividieren wir durch den Widerstand des Drahtes für stationäre Ströme w_0 und führen den Widerstand pro Längeneinheit

$$w_1 = \frac{w_0}{l} = \frac{1}{\pi \sigma a^2}$$

ein, so erhalten wir mit Berücksichtigung von Gleichung (33) und der bekannten Beziehung $J_0'(x) = -J_1(x)$

$$\frac{w + i\omega L_i}{w_0} = \left[\frac{x}{2} \frac{J_0(x)}{J_1(x)}\right]_{x=ka}. \tag{52}$$

Nun hat für alle unsere Beobachtungen $k a$ einen ziemlich großen Wert, also stellen wir die Besselschen Funktionen

durch ihre halbkonvergenten Entwicklungen dar. Da nach Gleichung (34)

$$(53) \qquad i k a = 2\alpha(\Gamma + i\Gamma'),$$

wo zur Abkürzung

$$(54) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\pi \mu n}{w_1}}; \quad \Gamma = \sqrt{\sqrt{1+\gamma^2}+\gamma}; \quad \Gamma' = \sqrt{\sqrt{1+\gamma^2}-\gamma}$$

gesetzt ist, und $i k a$ einen positiv reellen Bestandteil hat, gilt

$$(55) \qquad \begin{cases} J_0(x)\sqrt{2\pi x} = S_0(-2ix)e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \\ J_1(x)\sqrt{2\pi x} = S_1(-2ix)e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}. \end{cases}$$

Da ferner

$$(56) \qquad \frac{S_0(x)}{S_1(x)} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \cdots$$

ist, erhalten wir

$$(57) \qquad \begin{cases} \dfrac{w + i\omega L_i}{w_0} = \dfrac{k a i}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{16 k a i} + \cdots \\ \qquad\qquad = \alpha(\Gamma + i\Gamma') + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3(\Gamma - i\Gamma')}{64\alpha\sqrt{1+\gamma^2}} + \cdots \end{cases}$$

Die Zerlegung in reellen und imaginären Teil ergibt

$$(58) \qquad \begin{cases} \dfrac{w}{w_0} = \alpha\Gamma + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3\Gamma}{64\alpha\sqrt{1+\gamma^2}} + \cdots \\ \dfrac{L_i\omega}{w_0} = \alpha\Gamma' - \dfrac{3\Gamma'}{64\alpha\sqrt{1+\gamma^2}} + \cdots \end{cases}$$

Das sind die Verallgemeinerungen der bekannten Stefan-Lord Rayleighschen Formeln für den Fall, daß $\gamma \neq 0$ ist.

Schließlich haben wir noch zu sehen, wie μ sich aus dem logarithmischen Dekrement ableitet, denn dieses ist mittels Aufnahme von Resonanzkurven der Messung direkt zugänglich.

In einem aus Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand bestehenden Schwingungskreise ist bekanntlich das logarithmische Dekrement

$$(59) \qquad \delta = \frac{w\pi}{L\omega} = \frac{w}{2nL} = \frac{w}{2n(L_a + L_i)}.$$

Ist nun n sehr groß, so wird nach Gleichung (54) und (58)

$$\frac{w}{w_0} = \alpha\Gamma, \quad L_1 = 0.$$

Somit folgt in diesem Grenzfalle

$$\delta = \frac{w_1 l \alpha \Gamma}{2 n L_a} = \frac{l\Gamma}{2 L_a}\sqrt{\frac{\pi \mu w_1}{n}}. \tag{60}$$

Hieraus ergibt sich

$$\mu^* = \mu\Gamma^2 = \mu\left[\sqrt{1+\gamma^2}+\gamma\right] = \left(\frac{2 L_a \delta}{l}\right)^2 \frac{n}{\pi w_1}. \tag{61}$$

Diese Kombination $\mu^* = \mu[\sqrt{1+\gamma^2}+\gamma]$ von μ und γ ist es, die nach unserer Beobachtungsmethode der Messung direkt zugänglich ist. Wir wollen μ^* die *scheinbare Permeabilität* des Materials nennen, scheinbar insofern, als es die Permeabilität wäre, wenn keine magnetische Leitfähigkeit existierte.

Ein Ferromagnetikum hat eben für jede Wellenlänge zwei charakteristische magnetische Konstanten, genau so wie in der Optik auch für jede Wellenlänge zwei Konstanten, Brechungsexponent und Absorptionskoeffizient, das Material definieren.

Es versteht sich, daß Gleichung (60) nur für äußerst schnelle Schwingungen gilt. Sonst müssen wir die aus Gleichung (59) folgende genauere Formel

$$\delta = \frac{w_1 l \alpha \Gamma}{2 n L_a} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4\alpha\Gamma} + \frac{3}{64\alpha^2\sqrt{1+\gamma^2}}}{1 + \frac{w_1 l \alpha \Gamma'}{2 n \pi L_a}\left(1 - \frac{3}{64\alpha^2\sqrt{1+\gamma^2}}\right)} \tag{62}$$

heranziehen.

Diese Gleichung ist wesentlich komplizierter, weil der Korrektionsfaktor sowohl μ wie γ enthält, die beide unbekannt sind. Deshalb ist es ratsamer, zunächst nach Gleichung (60) bzw. (61) zu rechnen und dann nachträglich, wenn nötig, die gefundenen Werte gemäß Gleichung (62) zu korrigieren.

§ 5. Die Meßmethode für schnelle Schwingungen.

Für kurze Wellen bedienten wir uns der folgenden Versuchsanordnung. Wir erzeugten stehende elektrische Wellen in zwei parallelen ferromagnetischen Drähten AB und $A'B'$ von ungefähr 0,5 mm Durchmesser, deren gegenseitiger Abstand 21 mm betrug. Dieselben waren durch zwei Kupfer-

brücken miteinander verbunden, von denen die eine AA' fest, die andere BB' mikrometrisch verschiebbar war (Fig. 7). Bei der Anordnung war sorgfältig die Nähe von Metallen vermieden.

Als Oszillatoren O dienten solche, wie sie zuerst von Mie[1]) und später von seinem Schüler Rukop[2]) verwendet worden waren. Da diese Erreger eingehend beschrieben worden sind, ist es unnötig, näher auf dieselben einzugehen.

Der lose mit dem Paralleldrahtkreis gekoppelte Oszillator wurde mit einem mittleren Induktorium J und Turbinenunterbrecher betrieben und funktionierte mit großer Regelmäßigkeit, wie sich aus den Ausschlägen des Galvanometers G,

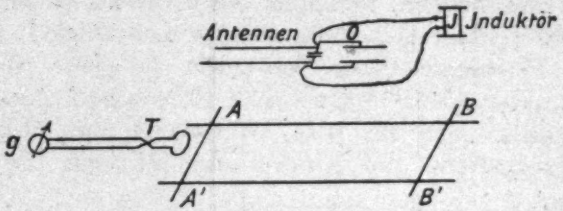


Fig. 7.

das mit dem Brandesschen Vakuumthermokreuz T magnetisch an den Paralleldrahtkreis gekoppelt war, ersehen ließ.

Eine kleine Schwierigkeit bereitete die erstmalige Abstimmung der Antennen des Oszillators auf seinen eigenen Schwingungskreis, doch das liegt in der Natur der Sache, da die Dämpfung dieser Erreger so gering ist, daß die Resonanz sich auf einen äußerst geringen Bereich erstreckt. Des weiteren hatten wir mit der schlechten Qualität des Leuchtgases zu kämpfen, durch welche die Stoßerregung stark beeinträchtigt wurde. Erst als wir das Gas von der in ihm befindlichen Kohlensäure und anderen bei der Destillation von Quebrachoholz mit entwickelten Säuren durch ein KOH-Vorgelege und vom Wasser durch ein $CaCl_2$-Rohr befreit hatten, funktionierte der Erreger gut.

Für jede Wellenlänge mußte natürlich ein besonderer Erreger konstruiert werden.

---

1) G. Mie, Physik. Zeitschr. 11. S. 1035. 1910.
2) H. Rukop, Ann. d. Phys. 42. S. 492. 1913.

Es wurde stets die Resonanz beobachtet, die einem Brückenabstand von einer Wellenlänge entsprach. Derselbe war dann ungefähr gleich dem Vierfachen der Antennenlänge.

§ 6. Theorie der Methode für schnelle Schwingungen.

Bei der Ableitung der für den nicht quasistationären Fall gültigen Formeln, die für die im vorigen Paragraphen beschriebene Versuchsanordnung gilt, folgen wir wieder den Ausführungen von Cohn[1]), berücksichtigen aber die magnetische Leitfähigkeit und nehmen das Vorhandensein einer fremden elektromotorischen Kraft E_f an.

Die Fig. 8 stelle einen Längsschnitt durch die Paralleldrähte dar. Wir wenden die zweite Maxwellsche Gleichung

$$(63) \qquad -\frac{\partial Q}{\partial t} = \int E_s\, ds,$$

in der Q den Induktionsfluß bedeutet, auf das Rechteck $abcd$ an, das in der Richtung der Pfeile umlaufen werde. Es sei $\overline{bc} = \overline{ad} = 1$. Dann gilt

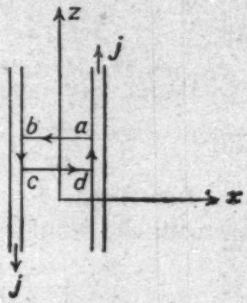


Fig. 8.

$$(64) \qquad \mathsf{E}_f - L_a \frac{\partial j}{\partial t} = \int_a^b E_s\, ds + \int_c^d E_s\, ds + \Big[E_z(+) - E_z(-) \Big],$$

wenn die Zeichen + und — als Argumente von E sich auf den in positiver bzw. negativer z-Richtung durchströmten Draht beziehen.

Ferner ist

$$(65) \qquad \int_a^b E_s\, ds = \frac{e}{C},$$

wenn L_a die äußere Selbstinduktion der stationär durchströmten Doppeldrähte, C ihre elektrostatische Kapazität, beide auf die Längeneinheit berechnet, bedeuten, und e die Ladung der Längeneinheit bezeichnet.

Hieraus ergibt sich

$$(66) \qquad \mathsf{E}_f - L_a \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial e}{\partial z} + [E_z(+) - E_z(-)].$$

1) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900. S. 475.

Da aber aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial j}{\partial z} = -\frac{\partial e}{\partial t} \tag{67}$$

folgt, so erhalten wir

$$-\frac{\partial E_f}{\partial t} + L_a \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = \frac{1}{C}\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left[E_z(+) - E_z(-)\right]. \tag{68}$$

Sind j und E rein periodische Funktionen der Zeit mit der Frequenz ω, die eine Phasenverschiebung gegeneinander haben können, so kann man stets zwei Konstante w und L finden, so daß die Gleichung gilt

$$E_z(+) - E_z(-) = wj + (L - L_a)\frac{\partial j}{\partial t}. \tag{69}$$

Damit wird aus Gleichung (68) die Telegraphengleichung

$$\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + \frac{w}{L}\frac{\partial j}{\partial t} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \frac{1}{L}\frac{\partial E_f}{\partial t}. \tag{70}$$

Den Term der rechten Seite nehmen wir als gedämpfte harmonische Funktion an und erhalten somit

$$\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + \frac{w}{L}\frac{\partial j}{\partial t} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = A_e^{-\Delta_1 t} \sin \omega_1 t\,. \tag{71}$$

A ist eine Funktion von z und läßt sich zwischen den Brücken $z = 0$ und $z = l$ darstellen durch

$$A = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_\varkappa \cos \frac{\varkappa \pi z}{l}. \tag{72}$$

Ferner setzen wir

$$j = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} j_\varkappa \cos \frac{\varkappa \pi z}{l}\,, \tag{73}$$

wodurch die Grenzbedingungeen an den Brücken

$$\frac{\partial j}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = l$$

erfüllt sind. Auf diese Weise wird

$$\frac{d^2 j_\varkappa}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{dj_\varkappa}{dt} + \frac{\varkappa^2 \pi^2}{l^2 LC} j_\varkappa = A_\varkappa e^{-\Delta_1 t} \sin \omega_1 t\,. \tag{74}$$

Setzt man

$$\frac{w}{L} = 2\Delta_2\,; \quad \frac{\varkappa^2 \pi^2}{l^2 LC} = \omega_{2\varkappa}^2 + \Delta_1^2\,, \tag{75}$$

so hat man das Problem auf die gewöhnliche Schwingungsgleichung

$$(76)\qquad \frac{d^2 j_\varkappa}{dt^2} + 2\,\Delta_2 \frac{dj_\varkappa}{dt} + (\omega_{2\varkappa}^2 + \Delta_2^2) j_\varkappa = A_\varkappa e^{-\Delta_1 t} \sin \omega_1 t$$

zurückgeführt. Uns interessiert für den Fall der Resonanz

$$\omega_{2\varkappa} = \omega_1 = \omega$$

der Wert des logarithmischen Dekrements

$$(77)\qquad \delta_2 = \frac{2\pi\Delta_2}{\omega} = \frac{\pi w}{L\omega},$$

welches wir jetzt berechnen wollen.

Aus Gleichung (69) folgt

$$(78)\qquad \frac{E_2(+)\,E_2(-)}{j} = w + i\omega(L - L_a).$$

Sieht man von der Krümmung der Drahtoberfläche ab, in der die Strömung ausschließlich verläuft, und führt als Argument von E die Normale h des Drahtes (positiv nach innen) ein, so folgt aus Gleichung (33) und (55)

$$(79)\qquad E(h) = E(o)\,e^{-ikh},$$

also

$$(80)\qquad j = 2\pi\alpha\sigma E(0)\int_0^\infty e^{-ikh}\,dh = \frac{2\pi\alpha\sigma E(0)}{ik}$$

und

$$(81)\qquad \frac{E_2(+)}{j} = \frac{E_2(-)}{-j} = \frac{ik}{2\pi\alpha\sigma}.$$

Folglich ergibt Gleichung (78) mit Berücksichtigung von Gleichung (53) und (54)

$$(82)\qquad w + i\omega(L - L_a) = \frac{2\alpha(\Gamma + i\Gamma')}{\pi\alpha^2\sigma},$$

d. h.

$$(83)\qquad \begin{cases} w = 2\Gamma\sqrt{\pi\mu n w_1}, \\ 2\pi n L_i = 2\Gamma'\sqrt{\pi\mu n w_1}. \end{cases}$$

Der Widerstand ist also sehr groß, da n beträchtliche Werte hat, dagegen nähert sich aus demselben Grunde L_i der Null, es kann also $L = L_a + L_i$ mit L_a identifiziert werden.

Aus Gleichung (77) und (83) berechnet sich somit das logarithmische Dekrement zu

$$(84)\qquad \delta_2 = \frac{\pi}{L_a}\Gamma\sqrt{\frac{2\mu w_1}{\omega}} = \frac{\Gamma}{L_a}\sqrt{\frac{\pi\mu w_1}{n}}.$$

Diese Gleichung ist von der für den stationären Fall berechneten Gleichung (60) inhaltlich nicht verschieden, weil jetzt L_a die äußere Selbstinduktion des *Doppel*leiters pro Längeneinheit bedeutet, während früher derselbe Buchstabe die gesamte äußere Selbstinduktion des Drahtes der Länge l darstellte.

Somit ergibt sich unter Berücksichtigung von Gleichung (54) und (61) aus (84) der Wert für die scheinbare Permeabilität

$$\mu^* = \mu\,\Gamma^2 = \mu\left[\sqrt{1+\gamma^2}+\gamma\right] = (\delta_2 L_a)^2 \frac{n}{\pi w_1}. \tag{85}$$

Es sei noch hinzugefügt, daß L_a in dieser Formel den Wert

$$L_a = 4 \ln \frac{d-a}{a} \tag{86}$$

hat, wenn d den Abstand der Drähte vom Radius a bedeutet.

Die Formeln (58) und (83) stellen den Widerstand unter der Voraussetzung dar, daß die Primärschwingungen, welche die Wellen erregen, ungedämpft sind. Wir müssen also noch untersuchen, welchen Einfluß das Dekrement δ_1 des Erregers (d. h. des Kreises II in § 3 (Fig. 6) bzw. der Antennen in § 5 (Fig. 7) auf die Formel (61) bzw. (85) hat.

Dabei dürfen wir δ_1 stets als sehr kleine Größe annehmen, da der in Betracht kommende Wert $\delta_1/2\pi$ bei unseren Messungen stets kleiner als 0,015 war.

Wir haben also in Gleichung (52) ω durch $\omega\left(1+i\frac{\delta_1}{2\pi}\right)$ zu ersetzen, und ebenso in Gleichung (53) und (54). Dann wird aus der für schnelle Schwingungen geltenden Gleichung (57)

$$\frac{w + i L_i \omega\left(1+i\frac{\delta_1}{2\pi}\right)}{w_0} = \frac{k a i}{2} = \alpha(\Gamma + i\Gamma')\left(1+i\frac{\delta_1}{4\pi}\right). \tag{87}$$

Zerlegung in reellen und imaginären Teil ergibt

$$\begin{cases} \dfrac{w - \omega\frac{\delta_1}{2\pi} L_i}{w_0} = \alpha\left(\Gamma - \Gamma'\dfrac{\delta_1}{4\pi}\right), \\ \dfrac{\omega L_i}{w_0} = \alpha\left(\Gamma' + \Gamma\dfrac{\delta_1}{4\pi}\right). \end{cases} \tag{88}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit $\delta_1/2\pi$ und addiert sie zur ersten, so erhält man

$$\frac{w}{w_0} = \alpha\left(\Gamma + \frac{\delta_1}{4\pi}\Gamma'\right) = \alpha\,\Gamma\left(1+\frac{\delta_1}{4\pi}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right), \tag{89}$$

oder durch Quadrierung

$$w^2 = l^2 \pi \mu n w_1 \left(\Gamma^2 + \frac{\delta_1}{2\pi} \right), \tag{90}$$

da $\Gamma \Gamma' = 1$ ist. Schließlich ergibt Gleichung (59)

$$\mu \left[\sqrt{1+\gamma^2} + \gamma + \frac{\delta_1}{2\pi} \right] + \left(\frac{2 L_a \delta_2}{l} \right)^2 \frac{n}{\pi w_1}. \tag{91}$$

Da nun $\delta_1/2\pi$ stets äußerst klein bei unseren Messungen war, können wir an dieser Stelle den Einfluß der Dämpfung der erregenden Wellen vernachlässigen und mit Gleichung (61) bzw. (85) rechnen.

§ 7. Auswertung der Resonanzkurven.

Aus den Resonanzkurven wurde nach der Bjerknesschen Theorie[1]) die Summe der logarithmischen Dekremente der erregenden und der erregten Schwingung nach der bekannten Formel[2])

$$y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\Theta^2}} \tag{92}$$

ermittelt, aus der sich

$$\Theta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2\pi} = |x| \sqrt{\frac{y}{1-y}} \tag{93}$$

ergibt. Hier bedeutet die Abszisse x die Verstimmung

$$1 - \frac{n_2}{n_1} = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

(λ_1 und λ_2 die resp. Wellenlängen), während die Ordinate y das Verhältnis des Galvanometerausschlags e zu dem maximalen Galvanometerausschlag e_0 bedeutet, denn diese Ausschläge sind den Quadraten der effektiven Stromstärken proportional.

Infolge der schlechten Qualität des Leuchtgases, das zur Erregung der Löschfunken diente, ging bei den kürzesten Wellen die Resonanzkurve manchmal in größeren Abständen von der Resonanzstelle nicht mehr merklich auf Null zurück, der Erreger sandte also — optisch gesprochen — ein schwaches

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **55**. S. 121. 1895.

2) J. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen u. drahtlose Telegraphie. Stuttgart 1905. S. 595.

kontinuierliches Spektrum aus, dem sich eine helle homogene Linie überlagerte.

Um trotz dieses Residuums, welches bei der Resonanzkurve blieb, die Dekrementensumme ermitteln zu können, verfuhren wir folgendermaßen.

Nach Gleichung (93) ist

$$\frac{e}{e_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_1}{\Theta}\right)^2}.$$

Führen wir $e_0 - e = z$ als neue Ordinate ein (vgl. Fig. 9), so erhalten wir für zwei verschiedene Kurvenpunkte

$$(94) \qquad \frac{z_1}{e_0} = \frac{\left(\frac{x_1}{\Theta}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_1}{\Theta}\right)^2}; \qquad \frac{z_2}{e_0} = \frac{\left(\frac{x_2}{\Theta}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_2}{\Theta}\right)^2},$$

woraus sich

$$(95) \qquad \Theta = x_1 x_2 \sqrt{\frac{z_1 - z_2}{z_2 x_1^2 - z_1 x_2^2}}$$

ergibt.

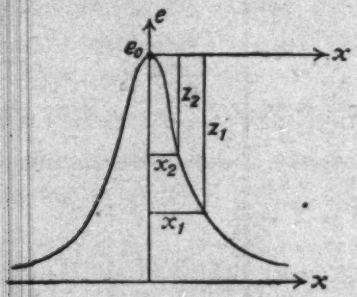


Fig. 9.

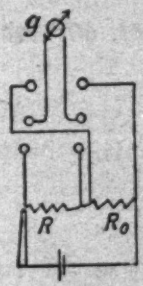


Fig. 10.

§ 8. Bestimmung des Widerstandes der Längeneinheit.

In unseren Formeln kommt der Widerstand w_1 der Längeneinheit des Drahtes vor. Derselbe wurde dadurch gemessen, daß ein Galvanometer G von großem Widerstand als Spannungsmesser an die Enden eines vom Strom durchflossenen Drahtstückes R bekannter Länge, sodann mittels Umlegens der Quecksilberwippe C an die Klemmen eines vom selben Strom durchflossenen bekannten Widerstands R_0 (vgl. Fig. 10) gelegt wurde.

Es ergab sich

Widerstand	Galvanische Ablenkung		
	I	II	III
$R_0 = 0{,}4\ \Omega$	106,0	106,0	106,0
$R_0 = 0{,}3\ \Omega$	79,5	79,5	79,5
R	105,5	106,5	106,2

Jeder Galvanometerausschlag ist das Mittel aus zwei Ausschlägen nach rechts und links, die mittels eines in der Figur nicht gezeichneten Kommutators hervorgerufen wurden.

Aus den Beobachtungen folgt

$$R = 0{,}3996\ \Omega,$$

Länge 80,6 cm,

$$w_1 = 496{,}0 \cdot 10^1.$$

w_1 ist in elektromagnetischen Einheiten gemessen.

§ 9. Die Ergebnisse für lange Wellen.

Die Dimensionen des Rechtecks aus Kupferdraht, welcher den Schwingungskreis III bildete (vgl. § 8), waren die folgenden

$$l = 47{,}7\text{ cm}; \quad b = 14{,}5\text{ cm}; \quad a = 0{,}0305\text{ cm}.$$

Daraus berechnet sich nach Formel (23) $L_a = 1453{,}4$ cm. Da die schädliche Selbstinduktion des Kondensators zu $P = 47$ cm bestimmt war, folgt $L_a + P = 1500$ cm.

Die Kapazität, welche Resonanz des Kreises III mit dem Kreise II ergab, bestimmte sich mittels der Eichkurve des Kondensators zu 496 cm, d. h. im elektromagnetischen System zu $C = 496 \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$, so daß sich mittels der Lord Kelvinschen Formel für die Schwingungszahl der angenäherte Wert

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(L_a + P)}} = 5{,}537 \cdot 10^6\ \frac{1}{\text{sec}}$$

ergibt. Angenähert ist dieser Wert nur, weil eigentlich $L_a + P + L_i$ in Rechnung gezogen werden müßte, wir aber die innere Selbstinduktion L_i als unbekannt fortgelassen haben. Mittels des genäherten Wertes für n können wir dieselbe aber berechnen und dann n korrigieren.

Nach Gleichung (54) gilt für Kupfer ($\mu = 1$)

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi n}{w_1}} = a\pi\sqrt{n\sigma}\ .$$

Da aber die Leitfähigkeit $\sigma = 5{,}88 \cdot 10^{-4}$ ist, so ergibt sich $\alpha = 5{,}467$. Für so große Argumente gibt es eine bequeme Näherungsformel für L_i[1]), nämlich

$$\frac{L_i 2\pi n}{w_0} = 1{,}007\,\alpha - 0{,}040\,, \tag{96}$$

wo w_0 den Widerstand für $n = 0$ bedeutet. Da die Drahtlänge 121 cm ist, so ist $w_0 = 121\,w_1$ leicht berechenbar, und es ergibt sich $L_i = 11{,}1$, so daß

$$L = L_a + L_i + P = 1511$$

ist. Nun berechnet sich der genaue Wert von n gemäß

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}} \qquad \text{zu} \qquad n = 5{,}516 \cdot 10^6\,\frac{1}{\text{sec}}\,.$$

Durch Aufnahme von Resonanzkurven ergibt sich, wenn der Kreis III aus Nickeldraht bestand, durch direkte Auswertung zweier Paare von Meßreihen nach Gleichung (92)

$\delta_1 + \delta = 0{,}2730$ bzw. $0{,}2502$. Mittel $\delta_1 + \delta = 0{,}2616$.

Bestand er aus Kupferdraht,

$\delta_1 + \delta_0 = 0{,}0568$ bzw. $0{,}0603$. Mittel $\delta_1 + \delta_0 = 0{,}0585$.

Hier bedeutet δ_1 das logarithmische Dekrement des Kreises II, δ bzw. δ_0 das des Kreises III, wenn er aus Nickel- bzw. Kupferdraht gebildet war. Also war

$$\delta - \delta_0 = 0{,}2616 - 0{,}0585 = 0{,}2031.$$

Der Wert von δ_0 berechnet sich nun gemäß Gleichung (59) nach

$$\delta_0 = \frac{w}{2nL}\,,$$

wo

$$w = w_0\,(0{,}997\,\alpha + 0{,}277) \tag{97}$$

ist[2]), und es ergibt sich mit

$$\alpha = 5{,}467; \quad n = 5{,}516 \cdot 10^6; \quad L = 1511; \quad \delta_0 = 0{,}0242,$$

so daß schließlich

$$\delta = 0{,}2031 + 0{,}0242 = 0{,}2273$$

wird.

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. S. 1141. 1903.
2) Vgl. J. Zenneck, a. a. O.

Die Selbstinduktion L' des Kreises III aus Nickeldraht ergibt sich durch Resonanzbeobachtung bezüglich des Kreises II; dieselbe trat ein für $C' = 462{,}7$ cm, so daß

$$C' \cdot L' = C \cdot L = 496 \cdot 1511,$$

d. h.

$$L' = 1620$$

ist. Bei so langen Wellen ist, wie man später leicht bestätigen kann, $\gamma = 0$ (vgl. Gleichung (82)), also nach (54) $\Gamma = 1$. Somit gilt für den Widerstand des Nickeldrahtes (58) oder bequemer (97), und es folgt aus Gleichung (59)

$$2\,n\,L'\,\delta = w_0\,(0{,}997\,\alpha + 0{,}277). \tag{98}$$

Da der Draht 121 cm lang war, w_1 aber nach § 8 $496{,}0 \cdot 10^4$ ist, so gilt $w_0 = 121 \cdot 496 \cdot 10^4$. Somit berechnet sich aus Gleichung (98)

$$\alpha = 6{,}511.$$

Schließlich ergibt sich aus Gleichung (54)

$$\mu = \frac{\alpha^2\,w_1}{\pi\,n}, \tag{99}$$

woraus

$$\mu = 12{,}13 \quad \text{für} \quad n = 5{,}516 \cdot 10^6$$

bei Nickel folgt, und da $\gamma = 0$ ist, hat μ^* denselben Wert.

§ 10. Die Ergebnisse für kurze Wellen.

Für kurze Wellen ergaben sich die folgenden Resultate.

λ in cm	Beobachtet in Ni $\delta_1 + \delta$	Beobachtet in Cu $\delta_1 + \delta_0$	Diff. $\delta - \delta_0$	δ_0	δ	Mittel δ	μ^*
100,4	0,0707	0,0247	0,0460	0,0054	0,0514	0,0506	14,67
	0,0659	0,0214	0,0445	0,0054	0,0499		
60,5	0,0647(a)	0,0225(b)	0,0422	0,0042	0,0464	0,0444	18,73
	0,0624	0,0242(c)	0,0382	0,0042	0,0424		
36,0	0,0689(d)	0,0350	0,0339	0,0032	0,0371	0,0354	20,01
	0,0690	0,0384	0,0306	0,0032	0,0338		
31,5	0,0687(e)	0,0397	0,0290	0,0030	0,0320	0,0346	21,85
	0,0713(f)	0,0371	0,0342	0,0030	0,0372		
22,8	0,1170	0,0935(g)	0,0235	0,0026	0,0261	0,0261	17,17
21,2	0,1161(h)	0,0983(i)	0,0178	0,0025	0,0203	0,0204	11,28
	0,0960	0,078	0,0180	0,0025	0,0205		

Die erste Kolonne enthält die Wellenlänge, die sich ohne weiteres aus dem Abstande der festen Brücke von der beweglichen ergibt. Die zweite Kolonne enthält das aus der Resonanzkurve ermittelte logarithmische Dekrement bei Nickeldrähten, oder vielmehr die Summe der Dekremente des Doppeldrahtkreises δ und der Antennen des Senders δ_1, denn diese Summe mißt man nach der Resonanzmethode. Die dritte Kolonne gibt die entsprechenden Werte, wenn die Nickeldrähte durch Kupferdrähte ersetzt waren (δ_0 Dekrement des Doppeldrahtkreises aus Kupfer). Die vierte Kolonne enthält die Differenz der Werte der zweiten und dritten Kolonne, die fünfte gibt δ_0, welches nach Gleichung (85) und (86) für $\mu = 1$ und $\gamma = 0$

$$(100) \qquad \delta_0 = \frac{1}{4a \ln \frac{d-a}{a}} \sqrt{\frac{1}{n\sigma}} = \frac{1}{4a \ln \frac{d-a}{a}} \sqrt{\frac{\lambda}{c\sigma}},$$

wo $d = 2{,}10$ cm den Drahtabstand, $a = 0{,}025$ cm ihren Radius, λ die Wellenlänge, $c = 3 \cdot 10^{10}$ die Lichtgeschwindigkeit, σ die Leitfähigkeit des Kupfers bedeutet. Die sechste Kolonne enthält die Summe der Zahlen der vierten und fünften, d. h. das Dekrement im Nickelkreis, wenn der Sender ungedämpft wäre, die siebente die Mittelwerte von δ, die achte die nach Gleichung (85) und (86) berechnete scheinbare Permeabilität des Nickels.

Hier ist $d = 2{,}10$ cm; $a = 0{,}0275$ cm; $w_1 = 496 \cdot 10^4$ (vgl. § 8). Bei den Messungen für $\lambda = 21{,}2$ zeigt sich, was wir manchmal festzustellen Gelegenheit hatten, daß in zwei zu verschiedenen Zeiten angestellten Meßreihen $\delta_1 + \delta$ ziemlich verschieden ist, dagegen δ doch fast die gleichen Werte hat; hier hat sich die Dämpfung des Senders eben in der Zwischenzeit geändert. Doch das schadet nichts, da $\delta_1 + \delta$ und $\delta_1 + \delta_0$ stets unmittelbar hintereinander bestimmt waren.

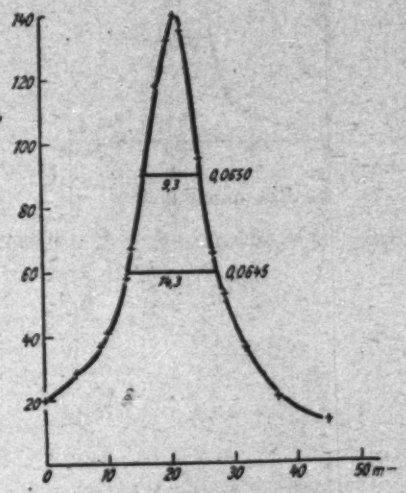
Man sieht deutlich, daß $\delta_1 + \delta$ sowie $\delta_1 + \delta_0$ für lange Wellen (§ 9) stark verschieden sind, sich aber mit abnehmender Wellenlänge immer mehr einander nähern. Da man nun ihre Differenz $\delta - \delta_0$ gebraucht, so ist klar, daß die Genauigkeit der Methode mit abnehmender Wellenlänge immer geringer wird.

Um nicht zu ausführlich zu werden, wollen wir nicht alle Beobachtungszahlen wiedergeben, wohl aber die einiger herausgegriffener Resonanzkurven, die wir in der Tabelle mit den

Buchstaben *a* bis *i* bezeichnet haben. Es ist zu bemerken, daß die Galvanometerempfindlichkeit durch Nebenschlüsse in geeigneter Weise geändert wurde, so daß die Maximalausschläge verschiedener Resonanzkurven nicht miteinander vergleichbar sind.

Kurve *a* (Fig. 11)
Ni $\lambda = 60{,}5$ cm

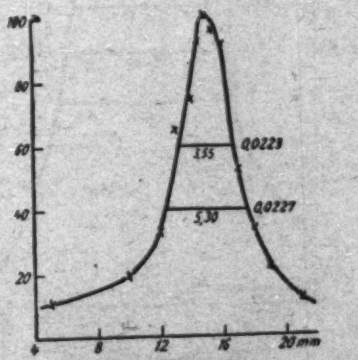
Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.
0	20
5	28
8	37
10	41
13	58
14	67
16	90
18	118
20	132
21	140
22	135
25	95
27	66
29	52
32	36
37	21
45	13



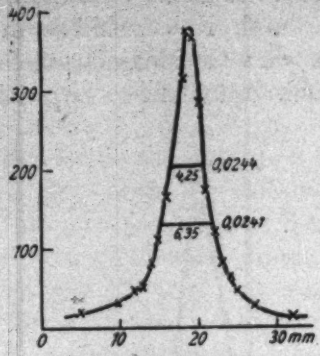
Resonanzkurve *a*
Nickel $\lambda = 60{,}5$ cm $\delta_1 + \delta = 0{,}0647$
Fig. 11.

Kurve *b* (Fig. 12)
Cu $\lambda = 60{,}5$ cm

Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.
5	11
10	19
12	33
13	65
14	74,5
14,5	93
15	101
15,4	96
16	92
17	53
18	34
19	22
21	12



Resonanzkurve *b*
Kupfer $\lambda = 60{,}5$ cm $\delta_1 + \delta_0 = 0{,}0225$
Fig. 12.



Resonanzkurve *c*

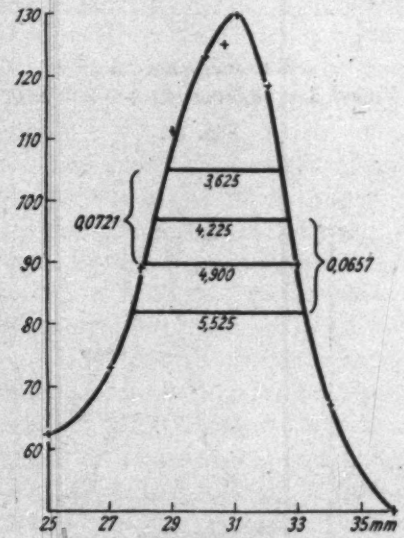
Kupfer $\lambda = 60{,}5$ cm $\delta_1 + \delta_0 = 0{,}0242$

Fig. 13.

Kurve *c* (Fig. 13)

Cu $\lambda = 60{,}5$ cm

Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.
5	18
10	32
12	47
13	49
14	81
15	110
16	165
18	315
18,5	373
19	363
20	286
21	173
22	121
23	79
24	65
25	45
27	27
32	13



Resonanzkurve *d*

Nickel $\lambda = 36{,}0$ cm $\delta_1 + \delta = 0{,}0689$

Fig. 14.

Kurve *d* (Fig. 14)

Ni $\lambda = 36{,}0$ cm

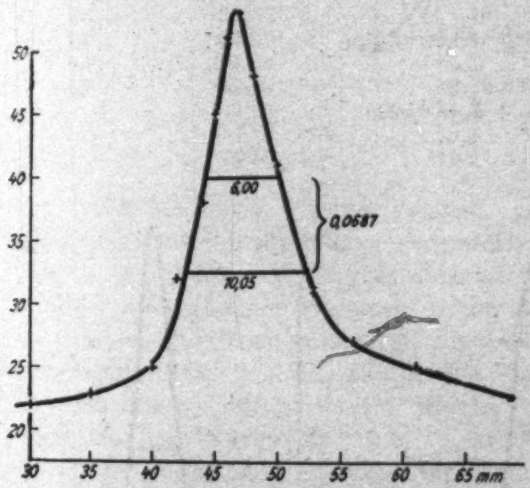
Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.
25	62
27	73
28	89
29	111
30	123
30,6	125
31	129,5
32	118,5
33	90
34	67
36	50

Kurve *e* (Fig. 15)
Ni $\lambda = 31{,}5$ cm

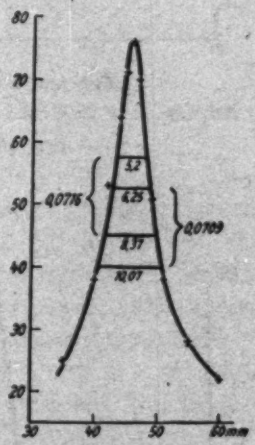
Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.
30	22
35	23
40	25
42	32
44	38
45	45
46	51
47	53
48	48
50	41
53	31
56	27
61	25
70	23

Kurve *f* (Fig. 16)
Ni $\lambda = 31{,}5$ cm

Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.
35	25
40	38
42	53
44	64
45	71
46	76
47	70
49	51
51	38
55	28
60	22



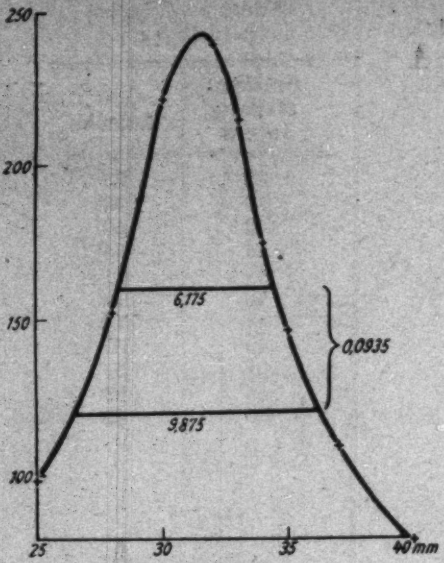
Resonanzkurve *e* Nickel $\lambda = 31{,}5$ cm $\delta_1 + \delta = 0{,}0687$
Fig. 15.



Resonanzkurve *f*
Nickel $\lambda = 31{,}5$ cm
$\delta_1 + \delta = 0{,}0713$
Fig. 16.

Kurve *g* (Fig. 17) Cu $\lambda = 22{,}8$ cm

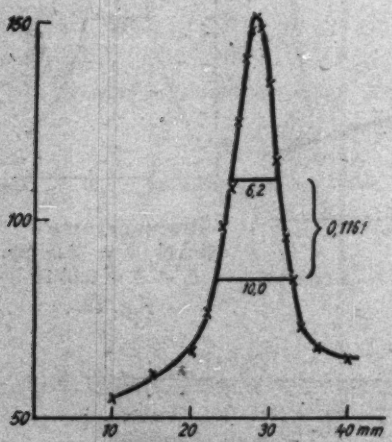
Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.	Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.
25	99	34	174
28	152	35	146
30	221	37	109
32	239	40	89
33	214		



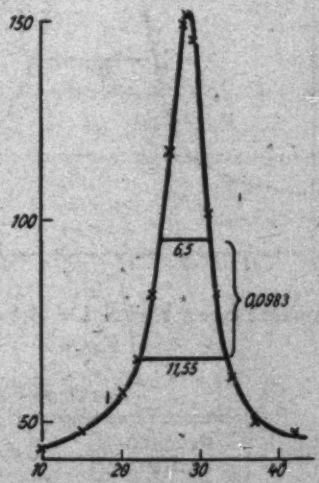
Resonanzkurve g
Kupfer $\lambda = 22{,}6$ cm $\delta_1 + \delta_0 = 0{,}0935$
Fig. 17.

Kurve h (Fig. 18)
Ni $\lambda = 21{,}2$ cm

Brücken-stellung in mm	Galv. Ausschl.
10	55
15	61
20	67
22	76
24	98
25	108
26	125
27	141
28	148
28,5	151
29	148
30	134
31	115
32	96
33	85
34	73
36	68
40	65



Resonanzkurve h
Nickel $\lambda = 21{,}2$ cm
$\delta_1 + \delta = 0{,}1161$
Fig. 18.



Resonanzkurve i
Kupfer $\lambda = 21{,}2$
$\delta_1 + \delta_0 = 0{,}0983$
Fig. 19.

Kurve *i* (Fig. 19) Cu $\lambda = 21{,}2$ cm

Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.	Brückenstellung in mm	Galv. Ausschl.
10	43	28,5	151
15	47	29	145
20	57	31	102
22	65	32	82
24	82	34	61
26	117	37	50
28	149	42	47

Stellen wir die Resultate zusammen, so erhalten wir

Schwingungszahl n in 1/sec	Wellenlänge λ in cm	μ^*
0	∞	11,8
$5{,}52 \cdot 10^6$	$5{,}44 \cdot 10^3$	12,13
$2{,}99 \cdot 10^8$	100,4	14,67
$4{,}96 \cdot 10^8$	60,5	18,73
$8{,}33 \cdot 10^8$	36,0	20,01
$9{,}52 \cdot 10^8$	31,5	21,85
$13{,}16 \cdot 10^8$	22,8	17,17
$14{,}16 \cdot 10^8$	21,2	11,28

Auch an Eisen wurden Versuche gemacht. Diese zeigen zweifellos eine Abnahme der Permeabilität für kleine Wellenlängen ($\lambda = 20$ cm) gegenüber dem stationären Wert, jedoch sind die quantitativen Resultate zu ungenau, um veröffentlicht zu werden, die Resonanzkurven zeigen vielfach Assymmetrien im Gegensatz zu den Ergebnissen bei Nickel, und eine einzelne Resonanzkurve ergibt häufig überhaupt keinen konstanten Wert für das Dekrement.

Diese Messungen müßten mit noch weniger gedämpften Wellen, wie man sie jetzt mittels Vakuumröhren erzeugt, wiederholt werden.

§ 11. Die molekularen Konstanten.

Um die Versuchsergebnisse mit der Theorie (§ 1) zu vergleichen, haben wir den Konstanten der Gleichungen (19) durch Probieren die folgenden Werte gegeben.

$$4\pi\varkappa_0 = 11{,}0; \quad \varepsilon = 1{,}3; \quad n_0' = 1{,}234 \cdot 10^9$$

oder

$$\lambda_0' = \frac{3 \cdot 10^{10}}{n_0'} = 24{,}3 \text{ cm}.$$

Mit diesen berechnet sich nach Gleichung (19) die folgende Tabelle.

$\frac{n_0'}{n} = \frac{\lambda}{\lambda_0'}$	$\frac{n}{n_0'}$	$\mu = 1 + 4\pi\varkappa$	$\mu\gamma = \frac{2\varrho}{n}$	π^*	$\varrho \cdot 10^{-8}$	λ in cm
10	0,1000	11,92	1,434	13,43	0,885	243
6	0,1667	11,77	2,402	14,41	2,472	145,8
4	0,2500	11,48	3,633	15,66	5,607	97,2
3	0,3333	11,00	4,873	16,90	10,02	72,9
2	0,5000	9,377	7,259	19,12	22,41	48,6
1,5	0,6667	6,767	8,995	20,26	37,02	36,5
1,3	0,7692	4,850	9,423	20,01	44,74	31,6
1	1,000	0,000	8,461	16,92	52,24	24,3
0,8	1,250	−1,094	6,045	12,19	46,65	19,4
0,5	2,000	−1,094	1,814	3,932	22,40	12,2
0	∞	1,000	0,000	1,000	0,00	0,0

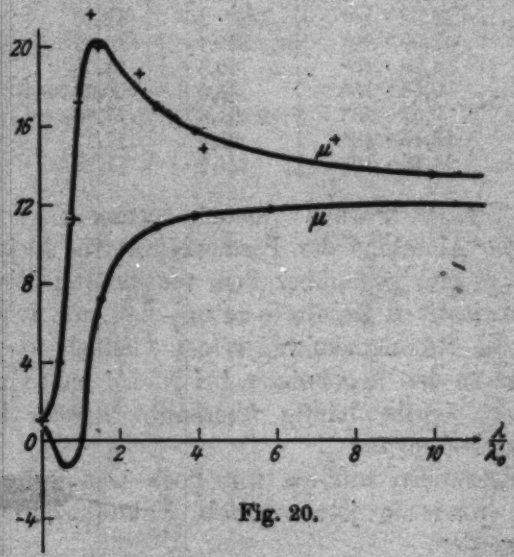


Fig. 20.

Die Fig. 20 stellt die theoretischen Werte von μ und μ^* als Funktionen von λ/λ_0' dar. Die Kreuze bedeuten die beobachteten Werte von μ^*. Bedenkt man, daß die Werte für $\lambda = \infty$ und $\lambda = 5{,}44 \cdot 10^3$ wegen des zu großen Maßstabes nicht mit in das Diagramm eingezeichnet werden konnten, daß diese Punkte aber praktisch auf die theoretische Kurve fallen (11,8 bzw. 12,13 anstatt 12,0) und daß für sehr kleine Wellenlängen

(Licht) $\mu = 1$ ist[1]), so muß man die Übereinstimmung befriedigend nennen.

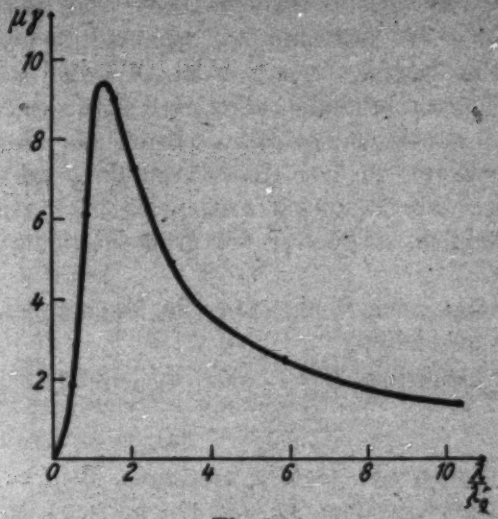


Fig. 21.

Fig. 21 gibt die Werte von $\mu\,\gamma = 2\,\varrho/n$ [vgl. Gleichung (82)] als Funktion von λ/λ_0'.

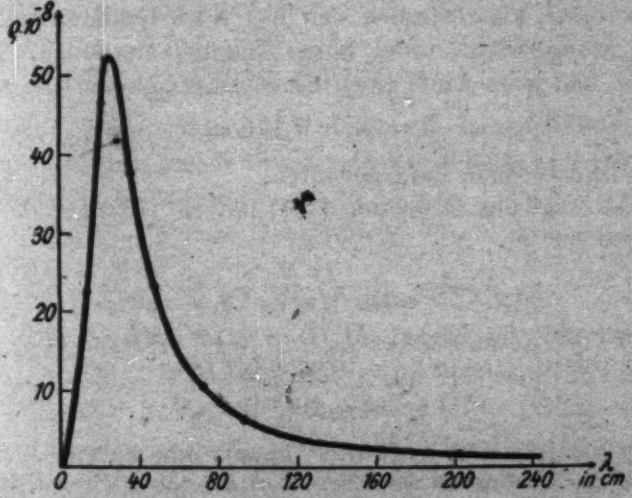


Fig. 22.

Die letzten beiden Kolonnen der Tabelle sowie die Fig. 22 stellen die magnetische Leitfähigkeit als Funktion der Wellen-

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 11. S. 900. 1903.

länge dar. Diese Größe ist, soviel wir wissen, bisher noch nicht bestimmt worden.[1])

Aus Fig. 20 ersieht man deutlich, daß die scheinbare Permeabilität μ^* ein Maximum hat, während die wahre Permeabilität μ keins besitzt, da $\varepsilon > 1$ ist. Würden wir nicht auf Grund der Theorie erkannt haben, daß man eine magnetische Leitfähigkeit annehmen muß, so hätten die Ergebnisse der Beobachtungen uns zu dem Glauben geführt, daß die Permeabilität infolge von Resonanz größer als im stationären Fall wird. Tatsächlich verhindert die große Reibung aber dieses Anschwellen.

Es erübrigt noch, einige auf die Magnetonen bezügliche Zahlenwerte abzuleiten.

1. *Das Trägheitsmoment.* Nach Gleichung (13) ist

$$\frac{N M^2}{6\pi^2 J n_0'^2} = \varkappa_0 . \tag{101}$$

$\varkappa_0$ und n_0' haben wir soeben bestimmt, $NM = M_\infty$ ist die Sättigungsmagnetisierung, M das magnetische Moment eines Elementarmagneten. Kennt man alle diese Größen, so läßt sich das Trägheitsmoment J in absolutem Maße berechnen.

Nun bedeutet N die Anzahl Elementarmagnete in der Volumeinheit, also befinden sich $N\,a/d$ im Grammatom, unter a das Atomgewicht, unter d die Dichte verstanden. Nimmt man an, daß jedes Atom einen Elementarmagneten hat, so muß

$$\frac{N a}{d} = N_0 = 6{,}175 \cdot 10^{23} \tag{102}$$

die Avogadrosche Zahl bedeuten.

Also folgt aus Gleichung (101) mittels (102) für das Trägheitsmoment J

$$J = \frac{2 a M_\infty^2}{3\pi (4\pi \varkappa_0) n_0'^2 N_0 d} . \tag{103}$$

Nun gilt für Nickel M_∞ [2]) $= 521$; $4\pi\varkappa_0 = 11{,}0$; $n_0' = 1{,}234 \cdot 10^9$; $a = 58{,}68$; $d = 8{,}86$, also folgt

$$J = 369 \cdot 10^{-40} \text{ g cm}^2.$$

---

1) Vgl. jedoch W. Arkadiew, Physik. Zeitschr. 14. S. 928. 1913, der für $\varrho_{max.}$ fast genau denselben Wert berechnet wie wir, trotzdem andere numerische Werte bei ihm beträchtlich von unseren abweichen.

2) P. Weiß u. G. Foëx, Journ. d. Phys. (5) 1. S. 805. 1911. Tab. 14. Die Autoren haben sich dort versehen. Die Werte von N, das unserem g entspricht, müssen eine Zeile tiefer gesetzt werden, und oben in der Kolonne ist die Zahl 13090 hinzuzufügen.

2. *Dämpfungskonstante und Reibungsfaktor.* Ferner können wir aus ε die Dämpfungskonstante $\Delta = k/2J$ sowie den Reibungsfaktor k bestimmen. Jene ist dadurch definiert, daß ein aus der Ruhelage abgelenktes Magneton freie Schwingungen nach dem Gesetze $\vartheta = C e^{-\Delta t} \sin \sqrt{(2\pi n_0)^2 - \Delta^2}\, t$ ausführt, dieser gibt, mit der Winkelgeschwindigkeit multipliziert, direkt das Moment der Reibungskraft.

Nach Gleichung (18) ist

$$\Delta = \frac{k}{2J} = \pi n_0' \varepsilon, \tag{104}$$

so daß wir erhalten

$$\Delta = 5{,}04 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{sec}}; \quad k = 3{,}72 \cdot 10^{-28}\ \text{g cm}^2 \text{sec}^{-1}.$$

3. *Die Eigenschwingungszahl.* Die wahre Eigenschwingungszahl n_0 steht mit der scheinbaren n_0' in der durch Gleichung (18) gegebenen Beziehung

$$n_0^2 = n_0'^2 + \frac{g N M^2}{6\pi^2 J} = n_0'^2 (1 + g \varkappa_0). \tag{105}$$

Die Konstante g des Weißschen Feldes ist von Weiß und Foëx[1]) durch magnetische Messungen oberhalb des Curieschen Punktes ermittelt worden, und zwar gelten die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \chi_m (T - \Theta) = C_m, \\ \Theta = C_m g d, \end{cases} \tag{106}$$

in denen χ_m die auf ein Mol bezogene Suszeptibilität, T die absolute Temperatur, Θ die des Curie-Punktes, d die Dichte des Materials bedeutet. So ergab sich

$$g = 13090,$$

also folgt

$$n_0 = 1{,}32 \cdot 10^{11}; \quad \lambda_0 = 2{,}27 \text{ mm}.$$

Die Eigenwellenlänge ist also viel kleiner als die scheinbare Eigenwellenlänge ($\lambda_0' = 243$ mm). Das liegt am Vorhandensein des starken Weißschen Strukturfeldes $g M$ [vgl. Gleichung (10)].

4. *Das logarithmische Dekrement.* Das logarithmische Dekrement der Eigenschwingungen eines Magnetons ergibt sich aus der Beziehung

$$\delta = \frac{\Delta}{n_0}. \tag{107}$$

1) P. Weiß u. G. Foëx, a. a. O. S. 805. Unser g ist Weiß' N.

Da $\delta = 0{,}0881$ folgt, so ist die Einstellung ausgesprochen periodisch mit sehr geringer Dämpfung. Das erscheint auf den ersten Blick merkwürdig, da die Permeabilitätskurve (Fig. 20) den Charakter eines aperiodischen Vorgangs hat, erklärt sich aber wiederum durch das starke Strukturfeld. Seine Existenz ist nämlich nach Gleichung (13) einer Verminderung der Eigenschwingungszahl äquivalent, und wir wissen, daß eine solche Verminderung eine periodische Bewegung aperiodisch machen kann.

5. *Das molekulare Feld.* Nach Gleichung (2) ist das molekulare Feld

$$A = \frac{4\pi^2 n_0^2 J}{M} \cdot \tag{108}$$

Ersetzen wir J durch Gleichung (103) und berücksichtigen, daß nach (102)

$$\frac{N_0 d M}{a} = N M = M_\infty$$

ist, und daß (105) praktisch mit $n_0^2 = n_0'^2 g \varkappa_0$ identisch ist, da $g \varkappa_0$ sehr groß gegen 1 ist, so erhalten wir

$$A = \tfrac{2}{3} g M_\infty , \tag{109}$$

d. h.

$$A = 4{,}55 \cdot 10^6 \text{ Gauss.}$$

Es mag wunderbar erscheinen, daß die Magnetonen bei so großen Molekularfeldern überhaupt durch äußere Felder merklich gerichtet werden können, jedoch ist zu bedenken, daß das kleinste Feld H bereits eine Magnetisierung M hervorruft und diese wieder ein Strukturfeld $g M$ in Richtung von H, so daß die richtende Feldstärke $K = H + g M$ ist, und dieser Wert kann allerdings den Wert von A leicht mehrfach übertreffen. Es sei übrigens bemerkt, daß aus paramagnetischen Beobachtungen Molekularfelder derselben Größenordnung sich ergeben.[1])

6. *Dimensionen des Magnetons.* Über die Form des Magnetons ist nichts Genaueres bekannt. Wir wissen, daß dasselbe keinesfalls eine Kugel sein kann, da diese diamagnetische

1) Vgl. R. Gans, Ann. d. Phys. 50. S. 163. 1916.

Erregung hervorrufen würde.[1]) Trotzdem können wir von einem mittleren Durchmesser D sprechen und

$$J = \frac{m}{10} D^2 \tag{110}$$

setzen, unter m die Masse des Elementarmagneten verstanden. Dividieren wir beiderseits durch das magnetische Moment M des Magnetons und ersetzen J/M mittels Gleichung (108), so erhalten wir

$$D^2 = \frac{10\,M}{m} \frac{A}{4\pi^2 n_0^2} = \frac{10\,A}{4\pi^2 n_0^2} \frac{N\,M}{N\,m}. \tag{111}$$

$N\,M$ ist gleich M_∞. Identifizieren wir die Elementarmagnete mit den Atomen, d. h. nehmen wir an, daß das Magneton mit dem Atom starr verbunden ist, was natürlich einigermaßen hypothetisch ist, so ist $N\,m = d$ die Dichte, so daß

$$D^2 = \frac{5}{2\pi^2} \frac{A\,M_\infty}{n_0^2\,d}. \tag{112}$$

Daraus berechnet sich

$$D = 0{,}624 \cdot 10^{-6}\ \text{mm},$$

eine Zahl, die durchaus von der Größenordnung ist, die nach anderen Methoden für die Molekulardimensionen gefunden worden ist.

La Plata, Instituto de Fisica. April 1919.

---

1) R. Gans, Gött. Nachr. 1910. S. 197; Ann. d. Phys. 49. S. 149. 1916.

(Eingegangen 16. August 1920.)

2. *Die Permeabilität des Nickels für kurze Hertzsche Wellen und die Messungen von Arkadiew;*

von Richard Gans.

Im Begriffe, die von Loyarte und mir[1]) gemachte, längst fertige Arbeit abzusenden, erhalte ich endlich nach Jahren die Annalen der Physik und sehe, daß Arkadiew[2]) neuerdings wieder die Permeabilität ferromagnetischer Materialien für schnelle Schwingungen bestimmt hat, und zwar durch Messung der Amplitudenabnahme elektrischer Wellen längs zweier parallelen Drähte.

Um unsere Beobachtungen mit den seinigen vergleichen sowie durch dieselben vervollständigen zu können, da er bis zu viel kleineren Wellen vorgedrungen ist, müssen wir uns zunächst einmal fragen, was die von Arkadiew sogenannte Permeabilität in Wirklichkeit bedeutet.

Dazu betrachten wir zeitlich ungedämpfte Sinuswellen, die sich längs der Drähte fortpflanzen, und deren Stromstärke j der Gleichung gehorcht[3])

$$(1) \qquad L_a \frac{\partial^2 j}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} - (w + \omega L_i i) \frac{\partial j}{\partial t} .$$

Hier bedeuten C, L_a, L_i und w bzw. die Kapazität, äußere, innere Selbstinduktion und Widerstand der Längeneinheit des Doppelleiters.

Setzen wir an

$$(2) \qquad j = j_0 e^{i(\omega t - \varkappa z)} ,$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehung[4])

1) R. Gans u. R. G. Loyarte, Ann. d. Phys. **64.** S. 209. 1921.

2) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. (4) **58.** S. 105. 1919.

3) Vgl. R. Gans u. R. G. Loyarte, a. a. O. Gleichungen (68) u. (69), wenn man in (68) die fremde E.M.K. $E_f = 0$ setzt.

4) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900. S. 472.

$$\frac{1}{C L_a} = c^2 = 9 \cdot 10^{20} \tag{3}$$

$$s^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - C(w + \omega L_i i)\omega i. \tag{4}$$

Ist $C(w + \omega L_i\, i)\,\omega$ klein gegen ω^2/c^2, so ergibt sich

$$s = \frac{\omega}{c}\left\{1 + \frac{c^2}{2} C L_i - \frac{c^2}{2\omega} C w i\right\}, \tag{5}$$

so daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Phasen

$$v = \frac{c}{1 + \frac{c^2}{2} C L_i} \tag{6}$$

wird, während die Amplituden nach dem Gesetze e^{-px} abnehmen, wo

$$p = \frac{c}{2} C w \tag{7}$$

ist.

Mißt man p und berechnet C aus Drahtradius a und Drähteabstand d nach der bekannten Formel

$$C = \frac{1}{4c^2 \ln \frac{d-a}{d}}, \tag{8}$$

so kann man nach (7) w ermitteln.

Nun ist aber[1])

$$\frac{w^2}{4\pi n w_1} = \mu\left[\sqrt{1+\gamma^2} + \gamma\right]. \tag{9}$$

Es ist also von Arkadiew, der $\gamma = 0$ setzt, gerade das gemessen und als Permeabilität bezeichnet worden, was wir scheinbare Permeabilität μ^* genannt haben. Diese Größe ist eine Kombination der Permeabilität μ und der Größe[2])

$$\gamma = \frac{2\varrho}{\mu n},$$

wo ϱ die magnetische Leitfähigkeit bedeutet.

Nun haben wir auf Grund der Molekulartheorie μ^* als Funktion von λ/λ_0' berechnet ($\lambda = c/n$ Wellenlänge; $\lambda_0' = 24{,}9$ cm scheinbare Eigenwellenlänge der Magnetonenschwingungen), indem wir als weitere Konstanten $4\pi\varkappa_0 = 11{,}0$; $\varepsilon = 1{,}9$ angenommen haben ($\varkappa_0$ Anfangssuszeptibilität für $n = 0$;

1) R. Gans u. R. G. Loyarte, a. a. O. Formel (83) u. (54).
2) A. a. O. Formel (32).

$\pi n_0' \varepsilon$ Dämpfungskonstante der Magnetonenschwingungen) und haben die nachstehende Figur erhalten.[1])

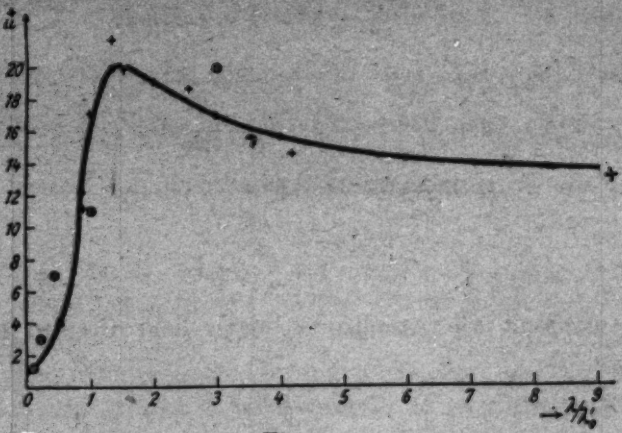


Fig. 1.

Die Kreuze in derselben bedeuten unsere Beobachtungswerte, die Kreise die Arkadiews (a. a. O. S. 186). Erinnern wir noch daran, daß unsere Werte für $\lambda = \infty$ und $\lambda = 5{,}44 \cdot 10^3$ cm auch auf der Kurve liegen, so kann man unsere Theorie und somit unsere numerischen Werte von μ und ϱ (Gans und Loyarte, Figg. 20 u. 22) als Funktionen der Wellenlänge als hinreichend bestätigt betrachten.

Würde man die Differenz der Phasengeschwindigkeit v gegenüber der Ausbreitungsgeschwindigkeit c im freien Raume genügend genau messen können, so ergäbe sich nach (6) L_i. Es ist aber[2])

$$\frac{\pi n L_i^2}{w_i} = \mu \left[\sqrt{1+\gamma^2} - \gamma\right]. \tag{10}$$

Somit könnten wir aus (9) und (10) durch direkte Messungen μ und γ für jede Wellenlänge ermitteln, während wir aus (9) allein nur mittels Zuhilfenahme der Theorie diese beiden Größen einzeln bestimmt haben.

La Plata, Instituto de Fisica. 25. April 1920.

1) A. a. O. Fig. 20.
2) A. a. O. Formel (83) u. (54).

(Eingegangen 16. August 1920.)

3. *Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale;* *von P. P. Ewald.*

Inhalt: I. 1. Elektrostatische Potentiale. 2. Elektrodynamische Potentiale. 3. Ziel der Arbeit. — II. 1. Thetafunktionen einer Veränderlichen. Zusammenhang zwischen Thetafunktionen und Gitterproblemen. 2. Ableitung der Transformationsformel für Thetafunktionen von 3 Veränderlichen. — III. 1. Potentiale als Summen von Einzelwirkungen (randloser Kristall). 2. Potentialumformung, Trennungsstelle E. Gesamtpotential eines einfachen Gitters. 3. Erregendes Potential eines einfachen Gitters. 4. Gesamtes und erregendes Potential im zusammengesetzten Gitter, Strukturfaktor. — IV. 1. Übergang zu elektrostatischen Potentialen, dimensionslose Größen. 2. Beispiel: Gitterenergie von Steinsalz. 3. Beispiel: Gitterenergie von Flußspat.

I.

1. Bei den Untersuchungen über den Aufbau der Kristalle und ihre Eigenschaften tritt die Notwendigkeit auf, gewisse Potentiale nicht nur als allgemeinen Ausdruck zu kennen, sondern ihren Zahlenwert an irgendeiner Stelle des vom Gitter erfüllten Raumes zu ermitteln. *Das elektrostatische Potential* eines Ionengitters z. B. ist

$$\varphi(P) = \sum \frac{\varepsilon_{P'}}{R_{PP'}}, \tag{1}$$

wo unter P' ein Atom des Gitterverbandes, unter $\varepsilon_{P'}$ seine Ladung, und unter $R_{PP'}$ sein Abstand vom Aufpunkt P verstanden ist und das Summenzeichen sich auf alle Atome P' bezieht. Dies Potential gibt die Arbeit an, die notwendig ist, um eine positive Einheitsladung (wir benutzen gewöhnliche elektrostatische Einheiten) aus dem Unendlichen an den Ort P zu bringen. Wünscht man die Energie zu kennen, die im ganzen Gitterverband aufgespeichert ist, so ist diese[1])

1) Vgl. etwa M. Born und A. Landé, Berl. Ber. 45. S. 1048 bis 1068. 1918.

$$A = \tfrac{1}{2}\sum_P \varepsilon_P \varphi'(P) = \tfrac{1}{2}\sum_P \sum_{P'}{}' \frac{\varepsilon_P \varepsilon_{P'}}{R_{PP'}}; \tag{2}$$

hierbei fällt der Ort P jetzt mit einem Gitteratom zusammen und der Beitrag $\varepsilon_P \varphi'_{(P)}$, den dieses Atom zum Gesamtpotential liefert, unterscheidet sich von dem obigen Ausdruck (1) durch die Berücksichtigung der Ladung ε_P statt 1 und dadurch, daß beim Hineinrücken des Aufpunkts P in den Gitterpunkt das unendlich werdende Glied aus der Summe (1) fortzulassen ist, das mit $R_{PP'} = 0$ entsteht. (Dies bedeutet der Akzent am Summenzeichen.) Die auf eine Grundzelle des Kristalls entfallende Energie erhält man, wenn der Punkt P nur die zu der Zelle gehörenden Atomlagen durchläuft. Um numerische Werte angeben zu können, sind die Koordinaten der Gitterpunkte zur Berechnung der $R_{PP'}$ zu verwenden, außerdem muß aber die Summe weitgehend umgeformt werden, damit ihre Konvergenz verbessert wird, die in der Form (2) sehr schlecht ist.

Derartige Berechnungen der Gitterenergie sind in der letzten Zeit wiederholt durchgeführt worden, nachdem E. Madelung[1]) eine Methode dafür angegeben und am Steinsalzgitter erprobt hat. Ich erwähne die Berechnung für den Gittertypus ZnS (Zinkblende) von M. Born und E. Bormann[2]) und für CaF_2 (Flußspat) von A. Landé[3]), die später von Frl. Bormann[4]) berichtigt worden ist.

Gitterpotentiale, die sich nach (2) aus Potentialen des Typus

$$\varphi'(P) = \sum_{P'}{}' \frac{\varepsilon_{P'}}{R_{PP'}} \tag{3}$$

zusammensetzen, sind erheblich schwieriger in eine geeignete schnell konvergente Gestalt zu bringen, als Potentiale des Typus (1), in denen der Aufpunkt nicht mit einem Gitterpunkt zusammenfällt. Das Madelungsche Verfahren bezieht sich gerade auf diesen Fall und besteht darin, das Potential des Gitters ohne den Aufpunkt aus dem Potential von Halb-

1) E. Madelung, Phys. Zeitschr. 19. S. 524. 1919.
2) M. Born u. E. Bormann, Ann. d. Physik 63. S. 218. 1920.
3) A. Landé, Verh. D. Phys. Ges. 20 S. 217. 1918.
4) E. Bormann, Zeitschr. f. Physik 1. 55. 1920.

geraden, Geraden und Ebenen zusammenzusetzen, die in regelmäßiger Weise gemäß der Gitterstruktur mit Atomen besetzt sind. Die Potentiale, die von diesen Elementen des Gesamtgitters stammen, lassen sich jeweils in schnellkonvergente Formen bringen, so daß die numerische Rechenarbeit gering wird. Eine der Hauptschwierigkeiten des Verfahrens besteht darin, den geometrischen Überblick über die Lage und Besetzung von Halbgeraden, Geraden und Ebenen nicht zu verlieren. In der Tat ist Herrn Landé durch Fortlassen einer Netzebene beim CaF_2 ein Fehler unterlaufen. Doch bedarf die Geometrie der Gitter ja stets — auch bei der unten anzugebenden Rechenweise — eingehenden Studiums.

2. *Elektrodynamische Potentiale* treten in der Kristalloptik auf. Sie sind charakterisiert durch Summen wie

$$\mathfrak{P}(P) = \sum_{P'} \frac{\tilde{\mathfrak{p}}_{P'}\left(t - \frac{R_{PP'}}{c}\right)}{R_{PP'}}. \tag{4}$$

Die Summe stellt das (vektorielle Hertzsche) Potential zur Zeit t im Aufpunkt P dar, hervorgebracht durch Einzelwirkungen, die von den Momenten $\tilde{\mathfrak{p}}_{P'}$ der Atome P' ausgehen. Gegenüber (1) besteht der wesentlichste Unterschied in dem Auftreten der „Retardierung", d. h. das Moment $\tilde{\mathfrak{p}}_{P'}$ muß wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder mit dem Wert in Rechnung gesetzt werden, den es zur Zeit $\left(t - \frac{R_{PP'}}{c}\right)$ hatte.

In dem für die Optik wichtigsten Fall der Ausbreitung einer ebenen Welle im Kristall haben die Momente die Form[1])

$$\tilde{\mathfrak{p}}_{P'} = \mathfrak{p}_{P'} e^{-i\omega t + i(\mathfrak{k}\mathfrak{R}_{P'})}, \tag{5}$$

$\mathfrak{k}$ heißt hierin der Ausbreitungsvektor der Welle. Er hat die Größe ω/q (ω die Frequenz, q die Phasengeschwindigkeit der Welle) und seine Richtung ist die der Wellennormalen. Denn das skalare Produkt $(\mathfrak{k}\mathfrak{R}_{P'})$, wo $\mathfrak{R}_{P'}$ der Fahrstrahl zum Atom P' von einem beliebigen festen Anfangspunkt aus ist, hat auf den Ebenen senkrecht $\mathfrak{k}$ konstante Werte. — $\mathfrak{p}_{P'}$ ist die (vektorielle) maximale Amplitude des Momentes von P'.

1) Vgl. M. Born, Dynamik d. Kristallgitter. Leipzig, Teubner, 1915. (§ 23 und 24.)

Geht man mit dem Ansatz (5) in (4) ein, und zugleich durch Fortlassen des gemeinsamen zeitlichen Faktors $e^{-i\omega t}$ von $\mathfrak{P}$ zur Amplitude $\mathfrak{P}$ über, so ist der Typ eines optischen Potentials

$$\mathfrak{P}(P) = \sum \mathfrak{p}_{P'} \frac{e^{iK_0 R_{PP'} + i(\mathfrak{k}\mathfrak{R}_{P'})}}{R_{PP'}}, \tag{6}$$

wo $K_0 = \frac{\omega}{c}$ die Ausbreitungskonstante des Einzelfeldes ist. Die Summe bezieht sich auf alle Atome P' und ist dadurch zu vereinfachen, daß alle Atome, die dem gleichen einfachen Translationsgitter angehören, in gleicher Weise schwingen, d. h. gleiches $\mathfrak{p}_{P'}$ haben. (So wie sie in den elektrostatischen Potentialen gleiche Ladung $\varepsilon_{P'}$ haben.)

Wir beschreiben nun das Gitter durch die drei „Achsenvektoren" $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, die zusammen ein einfaches Translationsgitter mit den Punkten

$$\mathfrak{R}_l = l_1 \mathfrak{a}_1 + l_2 \mathfrak{a}_2 + l_3 \mathfrak{a}_3 = \sum l_i \mathfrak{a}_i \quad (i = 1, 2, 3,\ l_i \text{ ganzzahlig}) \tag{7}$$

definieren, sowie durch die „Basis", die T Atome enthalten möge und sich in gleicher durch T Fahrstrahlen $\mathfrak{r}_t$ zu beschreibender Weise um jeden Gitterpunkt $\mathfrak{R}_l$ wiederholt, so daß

$$\mathfrak{R}_{P'} = \mathfrak{R}_l + \mathfrak{r}_t = \sum l_i \mathfrak{a}_i + \mathfrak{r}_t . \tag{7'}$$

Die analogen Punkte jeder Basisgruppe, d. h. solche mit gleichem $\mathfrak{r}_t$ bilden zusammen ein einfaches Translationsgitter und wir können das Gesamtpotential (6) am Punkte $P = \mathfrak{r}$ so aufteilen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P}(\mathfrak{r}) &= \sum_t \mathfrak{p}_t e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_t)} \cdot \sum \frac{e^{iK_0 R_{PP'} + i(\mathfrak{k}\mathfrak{R}_l)}}{R_{PP'}} \\ &= \sum_t \mathfrak{p}_t e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_t)} \cdot \Pi(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_t) . \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Hierin ist Π der skalare Anteil des von einem einfachen Translationsgitter herrührenden Vektorpotentials:

$$\Pi(\mathfrak{r}) = \sum_{l_i} \frac{e^{iK_0 |\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}| + i(\mathfrak{k}\mathfrak{R}_l)}}{|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|} \tag{9}$$

und die Aufgabe ist auf die Berechnung der dreifach unendlichen Summe (9) reduziert. Sie entspricht dem elektrostatischen Potential (1) eines Translationsgitters mit der Ladung $\varepsilon = 1$, in welches sie formal übergeht, wenn K_0 und $\mathfrak{k}$ verschwinden.

Wieder aber genügt für die Zwecke der Kristalloptik die Kenntnis von Π nicht, sondern es ist nötig, den Grenzwert des Potentials zu wissen, wenn der Aufpunkt $\mathfrak{r}$ in einen Gitterpunkt $\mathfrak{R}_{l'}$ des Translationsgitters einrückt. Der von dem betr. Gitterpunkt selbst herrührende, wie $\frac{1}{|\mathfrak{R}_{l'} - \mathfrak{r}|}$ unendlich werdende Anteil ist dabei fortzulassen. Wir nennen dies Potential mit dem in der Dispersionstheorie üblichen Namen *„erregendes Potential"*, weil aus ihm die Kraft gewonnen wird, welche das betr. Atom zu seinen Schwingungen erregt und schreiben es, indem wir das Fortlassen des Wertetripels $l' = (l_1', l_2', l_3')$ aus der Summe durch den Akzent andeuten,

$$\Pi_{l'}(\mathfrak{r}) = \sum_{l}{}' \frac{e^{iK_0|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}| + i(\mathfrak{k}\mathfrak{R}_l)}}{|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|}. \tag{10}$$

Da seine Ableitungen am Punkte $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}_l'$ gebraucht werden, muß es, bevor zum lim $(\mathfrak{r} = \mathfrak{R}_l')$ geschritten wird, auch für etwas abweichende Werte von $\mathfrak{r}$ bekannt sein. Das erregende Potential entspricht genau dem elektrostatischen (3) eines Translationsgitters mit Einheitsladungen und geht mit $K_0 = \mathfrak{k} = 0$ in φ' über.

Wie bei φ' beruht auch hier die Schwierigkeit der Berechnung auf dem Auslassen des einen Gitterpunktes aus dem Gesamtpotential. Ich habe in meiner Dissertation[1]) eine Methode zur numerischen Rechnung angegeben, bei der nicht wie bei der Madelungschen das Potential aus einzelnen Elementen zusammengesetzt wird, sondern zunächst das Gesamtpotential Π [Gleichung (9)] gebildet und hiervon die Wirkung des einen Gitterpunktes abgezogen wird; daraufhin kann der Grenzübergang ausgeführt werden, der den Aufpunkt in den Gitterpunkt führt. Diese Methode, die auf der Transformationsformel der Thetafunktionen beruht, wurde seinerzeit benutzt, um für ein rhombisches Translationsgitter von gegebenem Achsenverhältnis die Doppelbrechung numerisch zu berechnen.

3. Die Wichtigkeit, welche die Berechnung der Kristallpotentiale gewonnen hat, veranlaßt mich, meine Berechnungsmethode *in zweierlei Hinsicht zu erweitern. Erstens* nämlich,

1) Dispersion und Doppelbrechung von Elektronengittern (Kristallen). München 1912; auch Ann. d. Phys. 49. S. 1. 1916.

sie auf *schiefwinklige Kristallgitter auszudehnen.* Dies schien zunächst einige Schwierigkeiten zu bereiten, weil Summen, die bei orthogonalem Gitter durch das Produkt von drei einfachen ϑ-Funktionen von je einer Variablen dargestellt werden, im allgemeinen Fall eine verwickelte ϑ-Funktion von drei Variablen geben. Es zeigt sich aber, daß bei geeigneter Bezeichnungsweise diese Schwierigkeiten in der Tat sehr gering sind. Es ist einer der zahlreichen Fälle von Kristallgitterrechnungen, in denen der Gebrauch von zwei zueinander reziproken Systemen von Achsenvektoren ungeheure Vereinfachungen für die Beschreibung und Auffassung der Formeln herbeiführt, ohne natürlich in mathematischer Hinsicht neues zu bieten. Nur unsrer Gewöhnung, fast alles in rechtwinkligen Koordinaten zu rechnen, ist es zuzuschreiben, daß das Hilfsmittel der reziproken Vektoren nicht viel allgemeiner in Gebrauch ist. Zwingen uns äußere Umstände, wie z. B. schiefwinklige Kristallgitter, zum Abweichen von dieser Übung, so sind reziproke Vektoren die angemessene und unvermeidliche Ausdrucksform.[1])

Die zweite Erweiterung gegenüber den in meiner Dissertation durchgeführten Betrachtungen ist der *Übergang auf elektrostatische Potentiale,* indem

$$K_0 = 0, \qquad \mathfrak{k} = 0$$

gesetzt wird. Dieser Übergang ist natürlich nicht möglich für ein einzelnes Translationsgitter, sondern nur für solche zusammengesetzten Gitter, deren Basis neutral ist. Dann läßt er sich aber ohne Schwierigkeit ausführen und man er-

---

1) Man vergleiche C. Runge, Vektoranalysis. Leipzig, S. Hirzel, 1919. Sind $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3$ drei Vektoren, so sind die zu ihnen reziproken $\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{b}_3$ definiert durch die sechs Gleichungen (wir benutzen die Bezeichnungen der Enzykl. d. math. Wiss.)

$$(\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_i) = 1, \qquad (\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_\varkappa) = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3, \quad i \neq \varkappa).$$

Die $\mathfrak{a}_i$ sind auch die reziproken zu den $\mathfrak{b}_i$. Ist A das von den $\mathfrak{a}_i$, B das von den $\mathfrak{b}_i$ aufgespannte Volum,

$$A = (\mathfrak{a}_1\,[\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3]), \qquad B = (\mathfrak{b}_1\,[\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3]), \qquad B = 1/A\ ,$$

so ist

$$\mathfrak{b}_1 = \frac{[\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3]}{A}, \ \ldots; \quad \mathfrak{a}_1 = \frac{[\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3]}{B}, \ \ldots \text{ u. zykl. Vert.}$$

Für jeden beliebigen Vektor gelten die identischen Darstellungen:

$$\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{a}_1\,(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{a}_2\,(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{a}_3\,(\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{r}) \equiv \mathfrak{b}_1\,(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{b}_2\,(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{b}_3\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{r}).$$

hält auf diese Weise aus den zur Berechnung elektrodynamischer Potentiale geeigneten Formeln solche für die elektrostatischen Potentiale, die an Bequemlichkeit der Handhabung den Madelungschen Formeln nicht nachstehen dürften. Es wird von den Besonderheiten der Kristallstruktur und der persönlichen Vorliebe des Rechners abhängen, welche von beiden Methoden schneller zum Ziele führt. Jedenfalls dürfte es nicht unerwünscht sein, über zwei voneinander völlig unabhängige Rechnungsweisen zu verfügen.

II.

1. Unsere erste Aufgabe ist die Ableitung der Transformationsformel einer ϑ-Funktion von 3 Variablen in einer für unsere Zwecke übersichtlichen Form. Mathematisch neues bietet diese Formulierung nicht, welche übrigens durch Spezialisierung der sehr allgemeinen Transformationsformel in A. Krazers Lehrbuch der Thetafunktionen[1]) entnommen werden kann. Ihre Neuableitung in den geeigneten Bezeichnungen ist fast einfacher und setzt nur die wohlbekannte Transformationsformel für eine gewöhnliche ϑ-Funktion von einer Variablen und einem Periodenverhältnis voraus. Die dabei auftretende elementare vektorielle Umrechnung habe ich im Text unterdrückt und gebe dafür auf Anregung von Hrn. A. Sommerfeld in einer Anmerkung eine interessantere Ableitung.

Eine einfache ϑ-Funktion ist als Reihe bekanntlich definiert durch die Summe von Exponentialfunktionen, deren Exponent den Summenzeiger im zweiten Grade enthält. Letzterer heiße l und laufe von $-\infty$ bis $+\infty$. Indem man das einzelne Summenglied nach Fourier in eine Summe auflöst, und die Reihenfolge der Summationen vertauscht, erhält man eine Umformung der Summe, die als Transformationsformel bezeichnet wird.[2]) Sie besagt im besonderen Falle die Identität folgender Summen:

1) Leipzig, Teubner, 1903, S. 108.

2) Der Physiker wird sich den Inhalt der Transformationsformel gern durch die *Wärmeleitung in einem Drahtring* veranschaulichen:

Der Drahtring (x von 0 bis 2π) besitze zur Zeit $t = 0$ einen Wärmepol von der Stärke 1 im Punkt $x = 0$. Gefragt ist nach der Temperaturverteilung zur Zeit t.

1. *Methode der Wärmepole* (*d'Alembertsche Lösung*). Man denke sich den Drahtring aufgeschnitten auf das Stück $-\pi$ bis $+\pi$ der x-Achse

$$(13)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau(l+g)^2+2(l+g)u} = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\, e^{\frac{u^2}{\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\tau}l^2-2\pi i l\left(\frac{u}{\tau}-g\right)}.$$

Als Wurzelwert ist dabei derjenige zu nehmen, dessen reeller Teil positiv ist. u heißt das Argument, τ der Modul der ϑ-Funktion und g ist ein Teil der Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$. Doch ist ein Eingehen auf die Bedeutung dieser Größen für die Periodi-

---

gelegt. Eine in diesem Abschnitt periodische Lösung mit einem Wärmepol im Punkte $x = 0$ erhält man durch sukzessive Spiegelung, d. h. Belegung der x-Achse mit Einheitspolen in den Punkten $x = 2\pi l$ (l ganzzahlig). Das Abklingen der Temperatur von einem Einheitspol nach Ort und Zeit geschieht nach der Funktion

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \quad (\xi = \text{Abstand vom Pol}).$$

Also ist die gesuchte Temperaturverteilung im Ring

$$U_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(2\pi l - x)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 l^2 \frac{1}{t} + \pi l \frac{x}{t}}.$$

2. *Methode der Fourierentwicklung.* Die gesuchte Temperaturverteilung muß die räumliche Periode 2π haben, also die Fourierentwicklung

$$U = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_l e^{ilx} \qquad \left(A = Fu(t)\right).$$

Damit die Differentialgleichung der Wärmeleitung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$ befriedigt ist, muß sein

$$-l^2 A_l = \frac{\partial A_l}{\partial t}, \qquad A_l = a_l e^{-l^2 t}, \quad (a_l = \text{konst}).$$

Der Anfangszustand für $t = 0$ (U = Zackenfunktion Z vom Inhalt 1 im Punkt $x = 0$) verlangt

$$a_l = \frac{1}{2\pi} \int Z(\xi) e^{-il\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}.$$

Daher ist

$$U_2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-l^2 t + ilx}.$$

Der Vergleich von U_1 und U_2 gibt die obige Formel für $g = 0$, $u = ix/2$, $t = \tau$ (vgl. H. v. Helmholtz, Vorlesungen Bd. VI. S. 142).

zitätseigenschaften der ϑ-Funktionen im folgenden nicht erforderlich, da uns allein die Gleichheit der beiden Reihen interessiert. Nur soviel sei an dieser Stelle *über den Zusammenhang zwischen ϑ-Funktionen und Kristallgittern* bemerkt: Die ϑ-Funktion von *einem* komplexen Argument u teilt bekanntlich die u-Ebene in Periodenparallelogramme, in denen sich der Wert der Funktion bis auf einen Faktor wiederholt. Ebenso wird der $2p$-dimensionale Raum, in dem sich die p komplexen Veränderlichen einer Funktion von p Argumenten bewegen, in ein Zellensystem von Periodenparallelotopen aufgeteilt, in denen die Funktionswerte sich bis auf einfache Faktoren wiederholen. Der Quotient zweier ϑ mit gleichem Periodensystem ist eine $2p$-fach streng periodische Funktion, und es gilt der Satz, daß jede $2p$-fach periodische Funktion sich durch solche ϑ-Quotienten darstellen läßt. Die Kristallgitterpotentiale (1) bzw. (9) sind nun 3-fach periodische bzw. bis auf einen einfachen Faktor periodische Funktionen. Ihre Periodizität im Reellen wird sich als Ausschnitt aus dem R^{VI} der Argumente einer ϑ-Funktion von 3 komplexen Variablen darstellen lassen. Die Bearbeitung der Charakteristikentheorie der mehrfachen ϑ im Hinblick auf die Bedürfnisse der Kristallgitterrechnungen würde gewiß manchen beachtenswerten Zusammenhang zutage fördern, der einen auf funktionentheoretischer Basis beruhenden direkten Ausdruck solcher Potentiale gestatten würde.

2. Betrachten wir nun eine *ϑ-Funktion von 3 Argumenten*, die wir uns in kurzer Schreibweise durch folgende Reihe geben:

$$\Theta = \sum_{l_1 l_2 l_3}^{-\infty \ldots +\infty} e^{-\mathfrak{q}_l^2 + i(\mathfrak{q}_l \mathfrak{v})}. \tag{14}$$

Hierin sind $\mathfrak{q}_l$ und $\mathfrak{v}$ Vektoren, $(\mathfrak{q}_l \mathfrak{v})$ ihr skalares Produkt. $\mathfrak{q}_l$ ist so definiert: es seien $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ drei beliebige Vektoren, l_1, l_2, l_3 drei ganze Zahlen und α_1, α_2, α_3 drei Parameter. Dann soll sein:

$$\mathfrak{q}_l = (l_1 + \alpha_1)\mathfrak{b}_1 + (l_2 + \alpha_2)\mathfrak{b}_2 + (l_3 + \alpha_3)\mathfrak{b}_3 = \sum (l_i + \alpha_i)\mathfrak{b}_i. \tag{15}$$

Denken wir uns mit den Vektoren $\mathfrak{b}_i$ das Translationsgitter hergestellt, so ist $\mathfrak{q}_l$ der Fahrstrahl zu einem Gitterpunkt dieses Gitters vom Punkt $-\mathfrak{A} = -\sum \alpha_i \mathfrak{b}_i$ aus, $\mathfrak{q}_l^2 = (\mathfrak{q}_l \mathfrak{q}_l)$ das

Quadrat seiner Länge. Die Summe bezieht sich auf sämtliche Gitterpunkte des $\mathfrak{b}_i$-Gitters.

Der Exponent eines e-Termes lautet in ausgeschriebener Form

$$(16) \quad E = -\sum_i \sum_\varkappa (l_i + \alpha_i)(l_\varkappa + \alpha_\varkappa)(\mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_\varkappa) + i \sum_i (l_i + \alpha_i)(\mathfrak{b}_i \mathfrak{v}).^1)$$

Nur im Fall, daß die $\mathfrak{b}_i$ ein orthogonales Vektorensystem bilden, reduziert sich der erste quadratische Term auf die Summe von drei Quadraten. Dies bedeutet, daß die Funktion Θ in das Produkt von drei einfachen ϑ-Funktionen der Form (13) zerfällt, in denen $\frac{i}{2}(\mathfrak{b}_i \mathfrak{v})$ die Argumente sind. Dieser Fall findet sich bei Kristallen mit orthogonalen Achsensystem verwirklicht und ist der früher von mir untersuchte.

Die Konvergenz der Summe (14) ist gesichert, wenn die Größen $\mathfrak{b}_i, \alpha_i$ reell sind und mithin $\mathfrak{q}_i$ der reelle Fahrstrahl ist, wie oben beschrieben. Nichts hindert jedoch die vorstehenden Größen als komplex anzusehen, solange die Summen konvergent bleiben.

Man kann nun die Summe (14) umformen, indem man die Gleichheit (13) schrittweise auf die Summen nach l_1, l_2, l_3 anwendet. Nach einer elementaren, aber in ihrem Verlauf nicht sehr übersichtlichen Rechnung, bei der sich frühzeitige Einführung der zu den $\mathfrak{b}_i$ reziproken $\mathfrak{c}_i$ empfiehlt, gelangt man zu folgender Transformationsformel[2]):

---

1) Es wird kaum zu Verwechslungen Anlaß geben können, daß i sowohl als Index, wie als imaginäre Einheit auftritt. In der Bezeichnungsweise von Krazer (S. 30/31) wäre, wie der Vergleich der dortigen Formeln mit (16) zeigt, $\Theta = \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \left([(\mathfrak{b}\,\mathfrak{v})] \right)_{(\mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_\varkappa)}$.

2) Eleganter und übersichtlicher als auf dem oben angegebenen Wege läßt sich die Transformationsformel der dreifachen Theta wie folgt begründen, — ich verdanke den Hinweis darauf Hrn. A. Sommerfeld, der seinerzeit den Zusammenhang von Thetafunktionen und Wärmeleitungsproblemen als Thema zum Habilitationsvortrag eingereicht hatte.

Es sei eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

aufzustellen, die in dem aus drei Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ gebildeten parallelepipedischen Grundbereich periodisch sein soll und zur Zeit $t = 0$ im Punkt mit dem Fahrstrahl $\mathfrak{B}$ einen Wärmepol hat. Allgemeine Sätze

Bestimmen 3 Vektoren $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3$ *zusammen mit einem vierten* $\mathfrak{A}$ *und 3 Summenzeigern* l_1, l_2, l_3 *einen „Summationsvektor"*

$$\mathfrak{q}_l = l_1\,\mathfrak{b}_1 + l_2\,\mathfrak{b}_2 + l_3\,\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{A}; \tag{15}$$

---

besagen die Eindeutigkeit der Lösung und wir können, indem die Lösung in zwei Formen aufgestellt wird, durch Vergleich die gewünschte Transformationsformel entnehmen.

Die *d'Alembertsche Lösung* dieses Problems wird erhalten, indem mit den Vektoren $\mathfrak{a}_i$ ein Gitter errichtet wird, dessen Gitterpunkte die Fahrstrahlen

$$\mathfrak{R}_l = l_1\,\mathfrak{a}_1 + l_2\,\mathfrak{a}_2 + l_3\,\mathfrak{a}_3 \qquad (l = \text{Indextripel!}) \tag{b}$$

haben. Man setzt nun zur Zeit $t = 0$ in alle Punkte $\mathfrak{R}_l + \mathfrak{B}$ einen Einheitspol ein, der bekanntlich eine Temperaturverteilung

$$u = \frac{1}{\pi^{3/2}}\,\frac{1}{(4t)^{3/2}}\,e^{-\frac{R^2}{4t}}$$

erzeugt, wo R der Abstand Pol-Aufpunkt ist. Indem man $R^2 = (\mathfrak{R}_l + \mathfrak{B} - \mathfrak{r})^2$ einsetzt, wird die gesuchte Lösung für den Aufpunkt $\mathfrak{r}$:

$$U = \frac{1}{\pi^{3/2}}\,\frac{1}{(4t)^{3/2}}\sum_l e^{-\frac{1}{4t}(\mathfrak{R}_l + \mathfrak{B} - \mathfrak{r})^2}\,. \tag{c}$$

Andererseits stelle man die *Lösung nach Fourier* her. Sie hat die Form

$$U = \sum A_l\,e^{2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})}, \tag{d}$$

wobei die „Fouriervektoren" $2\pi\,\mathfrak{h}_l$ durch die zu den $\mathfrak{a}_i$ reziproken Achsen $\mathfrak{b}_i$ bestimmt sind:

$$2\pi\,\mathfrak{h}_l = 2\pi(l_1\,\mathfrak{b}_1 + l_2\,\mathfrak{b}_2 + l_3\,\mathfrak{b}_3). \tag{e}$$

Denn nur so läßt sich erreichen, daß alle Summenglieder in (d) ihren Wert beibehalten, wenn $\mathfrak{r}$ um $\{n_1\,\mathfrak{a}_1 + n_2\,\mathfrak{a}_2 + n_3\,\mathfrak{a}_3\}$ (n_i ganzzahlig) vermehrt wird. Die Koeffizienten A_l sind Funktionen von l und t und zunächst so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung (a) befriedigt wird. Nun ist bekanntlich das Resultat der Operation Δ angewandt auf eines der Glieder von (d) (dies hat dieselbe räumliche Abhängigkeit wie eine ebene Welle vom Ausbreitungsvektor $2\pi\,\mathfrak{h}_l$) nichts anderes als ein Faktor $-(2\pi\,\mathfrak{h}_l)^2$, der zum Glied hinzutritt. Wir erhalten somit aus (a) für A_l:

$$\frac{\partial A_l}{\partial t}\cdot e^{2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})} + A_l\,4\pi^2\,\mathfrak{h}_l^2\,e^{2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})} = 0,$$

$$\text{integriert:} \qquad A_l = C_l\,e^{-4\pi^2 \mathfrak{h}_l^2 \cdot t}. \tag{f}$$

Der Faktor C_l, der noch von l abhängen kann, ist aus der Anfangsbedingung zu bestimmen, daß für $t = 0$, $U = 0$ bis auf den Punkt $\mathfrak{r} = \mathfrak{B}$, wo U mit dem Inhalt 1 unendlich wird („Zackenfunktion"). Nun bestimmt sich der Koeffizient C_l des Gliedes $e^{2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})}$ in der Fourierentwicklung einer Funktion $Z(\mathfrak{r})$ bekanntlich so:

$$C_l = \frac{1}{v_a}\int Z(\mathfrak{r})\,e^{-2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})}\,dv\,. \tag{g}$$

sind ferner $\mathfrak{c}_i$ *die zu den* $\mathfrak{b}_i$ *reziproken Vektoren,* v_d *der von den* $\mathfrak{b}_i$ *aufgespannte Rauminhalt und* $\mathfrak{p}_i$ *ein zweiter Summationsvektor:*

$$\mathfrak{p}_i = \pi(l_1\mathfrak{c}_1 + l_2\mathfrak{c}_2 + l_3\mathfrak{c}_3), \tag{17}$$

so gilt für jedes Argument $\mathfrak{v}$ *die Gleichheit:*

$$\sum_{l_1,l_2,l_3}^{-\infty\ldots+\infty} e^{-\mathfrak{q}_l^2 + i(\mathfrak{q}_l\,\mathfrak{v})} = \frac{\pi^{3/2}}{v_d} \sum_{l_1,l_2,l_3}^{-\infty\ldots+\infty} e^{-\left(\mathfrak{p}_l - \frac{\mathfrak{v}}{2}\right)^2 + 2i(\mathfrak{p}_l\,\mathfrak{R})}. \tag{18}$$

Das Integral rechter Hand ist dabei über alle Punkte $\mathfrak{r}$ des Entwicklungsbereiches zu erstrecken, v_a ist der Inhalt dieses Bereichs. Im Fall unserer „Zackenfunktion" ergibt sich:

$$C_l = \frac{1}{v_a}\int e^{-2\pi i(\mathfrak{b}_l\,\mathfrak{B})}. \tag{h}$$

Somit lautet die Fouriersche Lösung unseres Problems:

$$U = \frac{1}{v_a}\sum_l e^{-4\pi^2 b_l^2 t + 2\pi i(\mathfrak{b}_l,\,\mathfrak{r}-\mathfrak{B})}. \tag{i}$$

Der Vergleich der beiden Lösungen (c) und (i) liefert die Transformationsformel der Thetafunktion. Um sie klar hervortreten zu lassen, schaffen wir die Variable t fort, indem wir setzen: $\frac{a_i}{2\sqrt{t}} = b_i$. Dementsprechend wird, wenn c_i die zu den b_i reziproken Vektoren sind, $c_i = 2\sqrt{t}\,b_i$; führen wir

$$\mathfrak{Q}_i = \frac{\mathfrak{N}_i}{2\sqrt{t}}, \quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}}{2\sqrt{t}}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{r}}{2\sqrt{t}}, \quad \mathfrak{H}_i = 2\sqrt{t}\,\mathfrak{h}_i$$

ein, so behalten die drei ersten Größen ihre Bedeutung von Fahrstrahlen im primären, die letzte als Fahrstrahl im reziproken Gitter bei, nur daß als ersteres das zeitlich variable Gitter aus den $\mathfrak{b}_i$ zugrunde liegt. Nennen wir schließlich v_d das aus den $\mathfrak{b}_i$ gebildete Volumen, so ist:

$$v_d = \frac{1}{(2\sqrt{t})^3}\,v_a.$$

Der Vergleich von (c) und (i) ergibt nun:

$$\frac{1}{\pi^{3/2}}\sum_l e^{-(\mathfrak{Q}_l + \mathfrak{A} - \mathfrak{v})^2} = \frac{1}{v_d}\sum_l e^{-(\pi\mathfrak{H})^2 + 2\pi i(\mathfrak{H}_l,\,\mathfrak{v}-\mathfrak{A})}$$

oder auch:

$$\sum_l e^{-(\mathfrak{Q}_l + \mathfrak{A})^2 + 2(\mathfrak{Q}_l + \mathfrak{A},\,\mathfrak{v})} = \frac{\pi^{3/2}}{v_d}\sum_l e^{-(\pi\mathfrak{H}_l - i\mathfrak{v})^2 - 2\pi i(\mathfrak{H}_l\,\mathfrak{A})}.$$

Ersetzen wir hierin schließlich noch $\mathfrak{v}$ durch $i\frac{\mathfrak{v}}{2}$, $\mathfrak{Q}_l + \mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{q}_l$ und $\pi\mathfrak{H}_l$ durch $\mathfrak{p}_l$, so ergibt sich die in Gleichung (18) des Textes ausgesprochene Transformation.

Die vektorielle, invariante Schreibweise der Exponenten ist bei Transformationen in den Bezugsachsen oder in den Summenzeigern sehr bequem, wovon man sich bei den Rechnungen an Steinsalz bzw. Flußspat überzeugen möge.

III.

1. Bevor wir die eigentliche Summierung der in (3) bezw. (4) aufgeschriebenen Einzelwirkungen in Angriff nehmen, müssen wir fragen, von welcher Art die Konvergenz dieser Summen ist. Die Notwendigkeit, sich mit dieser Frage zu befassen, erhellt daraus, daß eine Summe von Termen, die wie $1/R$ abnehmen, über ein allseits unbegrenztes Kristallgitter erstreckt, unmöglich konvergieren kann, es sei denn, daß positive und negative Faktoren der Terme eine geeignete Vernichtung der Einzelbestandteile bewirken. Aber auch dann kommt es auf die Reihenfolge der Summierung — allgemein auf die Summationsvorschrift — an, durch die erst einer von beliebig vielen errechenbaren Werten als der physikalisch richtige Summenwert herausgehoben wird. Beim endlichen Gitterstück treten derartige Unbestimmtheiten nicht auf und man könnte ihnen aus dem Wege gehen, wenn man einen aus endlich vielen Zellen bestehenden Kristall betrachten würde. Man würde aber hiermit eine sehr große Komplikation der Verhältnisse in Kauf nehmen, die aus der Ungleichwertigkeit der Zellen je nach ihrer Lage gegen den Rand hervorgeht: die reine Periodizität, das hervorstechende Merkmal des Kristalls, wäre in den Formeln verdeckt. Dabei ist es einleuchtend, daß die physikalisch wichtigen Erscheinungen aufgeteilt werden können in Volum- oder Materialeigenschaften, die wesentlich von der inneren Struktur, und in Oberflächen-(Rand-)erscheinungen, die vom Vorhandensein der Berandung herrühren. Letztere interessieren uns hier nicht, da es zunächst auf die Berechnung der Materialeigenschaften ankommt.[1])

1) Ich möchte hier auf das von mir über die optischen Potentiale (Ann. d. Phys. 49. S. 11 u. 12. 1916) gesagte verweisen, um mich nicht zu wiederholen. Man vergleiche dazu die Behandlung durch C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 48. S. 1—56. 1915, insbesondere § 2, auch bei R. Lundblad, Untersuchungen über die Optik d. disperg. Medien, Uppsala Univ Årsskrift 1920, besonders III, 2.

Die Summationsvorschrift, durch die im folgenden die Materialeigenschaften herausgeschält werden, ohne daß die Periodizität im Kristall verdeckt würde, besteht in folgendem: es wird zunächst der Wert der Summen aufgesucht, der entstehen würde, wenn die Momente bzw. Ladungen der Atome in großer Entfernung vom Aufpunkt exponentiell abnehmen würden. Anstatt ε/R wird

$$\varepsilon \frac{e^{-K'R}}{R}, \quad \text{statt} \quad \mathfrak{p} \frac{e^{iK_0R}}{R} \quad \text{wird} \quad \mathfrak{p} \frac{e^{iK_0R-K'R}}{R}$$

summiert, in beiden Fällen also Glieder, die wie e^{iK_0R} abnehmen, wo K_0 einen positiv imaginären Anteil besitzt. Dieser Anteil selbst darf beliebig klein sein, so daß in endlicher Entfernung vom Aufpunkt nur unmerkliche Abänderungen des wirklichen Zustandes entstehen. Doch genügt er, um die absolute Konvergenz der Summen zu erzwingen. Der Kristall verschwimmt sozusagen in großen Entfernungen, ohne je plötzlich abzubrechen. Alle Eigenschaften, die wir als Materialeigenschaften bezeichnen, d. h. solche, die aus einer gewissen beschränkten Umgebung stammen und sich deshalb unabhängig von der Begrenzung an allen gleichwertigen Punkten eines Kristallgitters wiederfinden, müssen aus diesem *randlos aufhörenden Kristall* berechenbar sein. Für sie ist der physikalisch richtige Wert der Summen derjenige, der in der Grenze für verschwindenden Imaginärteil von K_0 hervorgeht.

2. Zur Auswertung des Potentials (9) bedienen wir uns der folgenden Darstellung der zu summierenden Einzelwirkungen:

Sei für den Augenblick $R = |\mathfrak{R}_i - \mathfrak{r}|$ die Entfernung eines Atoms vom Aufpunkt, so ist

$$\frac{e^{iK_0R}}{R} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^{\infty} e^{-R^2\varepsilon^2 + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon. \tag{20}$$

Der Integrationsweg erstreckt sich von 0 bis ∞, muß aber aus dem Punkt 0 derart herausgeführt werden, daß der

(20') reelle Teil von $\frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}$ für kleine ε negativ ist, etwa auf dem Wege von Fig. 1. Auf die Ableitung dieser Integraldarstellung gehe ich hier nicht ein, sondern verweise auf meine Dissertation.

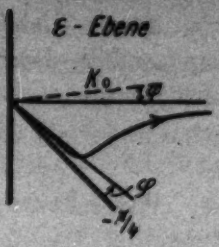


Fig. 1.

Setzen wir die Darstellung in (9) ein, so wird das Potential:

$$(21) \qquad \Pi(\mathfrak{r}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^{\infty} \sum e^{-(\mathfrak{R}_i - \mathfrak{r})^2 \varepsilon^2 + i(\mathfrak{k}\mathfrak{R}_i) + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon .$$

Reihenfolge von Integration und Summation durften hierbei vertauscht werden; letztere bezieht sich auf alle Gitterpunkte $\mathfrak{R}_i$ des einfachen Translationsgitters,

$$(7) \qquad \mathfrak{R}_i = l_1 \mathfrak{a}_1 + l_2 \mathfrak{a}_2 + l_3 \mathfrak{a}_3 .$$

Die Funktion unter dem Integral ist eine ϑ-Funktion von 3 durch die Lage des Aufpunktes $\mathfrak{r}$ bestimmten Argumenten, auf die wir nunmehr die Transformationsformel (18) anwenden wollen. Wir vergleichen mit den auf der rechten Seite dieser Formel vorkommenden Bezeichnungen, indem wir setzen:

$$\frac{\mathfrak{v}}{2} = \mathfrak{r}\varepsilon ; \quad \mathfrak{p}_i = \pi \sum l_i c_i = \varepsilon \mathfrak{R}_i = \varepsilon \sum l_i \mathfrak{a}_i ;$$

mithin

$$c_i = \frac{\varepsilon}{\pi} \mathfrak{a}_i ,$$

$$2\pi a_i = (\mathfrak{k}\mathfrak{a}_i), \quad |D| = \frac{1}{|C|} = \frac{\pi^3}{\varepsilon^3} \frac{1}{V}, \quad \text{wo } V = (\mathfrak{a}_1 [\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3])$$

das Elementarvolumen des Atomgitters ist.

Hiernach ergeben sich für die in (18) links stehenden Größen folgende Werte, *wenn mit* $\mathfrak{b}_i$ *die zu den Gitterachsen* $\mathfrak{a}_i$ *reziproken Vektoren bezeichnet werden:*

$$\mathfrak{b}_i = \frac{\pi}{\varepsilon} \mathfrak{b}_i ; \quad \mathfrak{q}_l = \sum \left(l_i + \frac{(\mathfrak{k}\mathfrak{a}_i)}{2\pi} \right) \frac{\pi}{\varepsilon} \mathfrak{b}_i .$$

Beachtet man, daß

$$\sum \mathfrak{b}_i (\mathfrak{k}\mathfrak{a}_i) \equiv \mathfrak{k} ;$$

und führt weiter den bei allen Kristallgitterrechnungen auftretenden *Fahrstrahl im reziproken Gitter*

$$(22) \qquad \mathfrak{h}_l = l_1 \mathfrak{b}_1 + l_2 \mathfrak{b}_2 + l_3 \mathfrak{b}_3$$

ein, dessen Richtung mit der Normale jener Gitterebene zusammenfällt, deren Millersche Indizes $\{l_1 l_2 l_3\}$ sind[1]); so läßt sich schreiben

$$q_l = \frac{1}{2s}(2\pi \mathfrak{h}_l + \mathfrak{k}).$$

Wir erhalten so die mit (21) äquivalente Darstellung

$$\Pi(\mathfrak{r}) = \frac{2\pi}{V} \int_{(0)}^{\infty} \sum e^{-(2\pi \mathfrak{h}_l + \mathfrak{k})^2 \frac{1}{4s^2} + i(2\pi \mathfrak{h}_l + \mathfrak{k}, \mathfrak{r}) + \frac{K_0^2}{4s^2}} \frac{ds}{s^2}, \tag{23}$$

oder indem noch eingeführt wird

$$\mathfrak{R}_l = 2\pi \mathfrak{h}_l + \mathfrak{k}: \tag{22'}$$

$$\Pi(\mathfrak{r}) = \frac{2\pi}{V} \int_{(0)}^{\infty} \sum \frac{e^{-(\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2)\frac{1}{4s^2} + i(\mathfrak{R}_l \mathfrak{r})}}{\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2} \frac{ds}{s^2}. \tag{23'}$$

Die Summation bezieht sich diesmal darauf, daß der Fahrstrahl $\mathfrak{h}_l$ alle Punkte des reziproken Gitters durchläuft. Der Vektor $\mathfrak{R}_l$ ist das 2π-fache desjenigen Fahrstrahls zum Punkte l $(= l_1, l_2, l_3)$ des reziproken Gitters, der vom Anfangspunkt $\left(-\frac{\mathfrak{k}}{2\pi}\right)$ aus gezogen wird.

Es sei betont, daß die Gleichheit der Integranden in (21) und (23) für jeden Wert von s gilt, für den die Summen konvergieren — und das ist dank (20') auf dem ganzen Integrations-

---

1) Definition der Millerschen Indizes $h_1 h_2 h_3$: die Ebene schneidet die Achsenrichtungen in den Punkten

$$\frac{a_1}{h_1}, \frac{a_2}{h_2}, \frac{a_3}{h_3},$$

vgl. Fig. 2. Daher Normalenrichtung der Ebene gegeben durch das Vektorprodukt aus 2 Seiten:

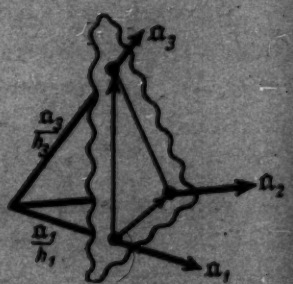


Fig. 2.

$$\left[\frac{a_2}{h_2} - \frac{a_1}{h_1}, \frac{a_3}{h_3} - \frac{a_1}{h_1}\right]$$
$$= \frac{1}{h_2 h_3}[a_2 a_3] + \frac{1}{h_1 h_2}[a_1 a_2] + \frac{1}{h_1 h_3}[a_3 a_1] = \frac{(a_1 [a_2 a_3])}{h_1 h_2 h_3} \cdot \mathfrak{h}.$$

weg der Fall.[1]) Es ist also erlaubt, *bei einer gewissen Stelle E der Integration eine, von da ab die andere Darstellung zu gebrauchen.* Hierin liegt die Verwertung der Formeln zur numerischen Rechnung. In Formel (21) ist die Konvergenz der Reihe bei großen ε gut, während sie bei kleinen ε schlecht ist infolge der Kleinheit von K_0, das zur Berechnung der elektrotatischen Potentiale sogar gegen 0 gehen soll. Umgekehrt aber ist die Konvergenz der Summe in (23) für große ε schlecht, für kleine ε auch bei $K_0 = 0$ gut.

Beide Darstellungen ergänzen sich und man wird zur numerischen Rechnung geeignete Formeln erhalten, wenn für kleine Werte von ε (23), für große ε (21) benutzt wird, indem eine Trennungsstelle $\varepsilon = E$ auf dem Integrationsweg eingeführt wird, bei der die eine Darstellung zugunsten der anderen verlassen wird:

$$(24)\quad \begin{cases} \Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}, \\ \Pi^{(1)} = \dfrac{2\pi}{V} \int\limits_{(0)}^{E} \sum e^{-\Re_l^2 \frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2} + i(\Re_l, \tau)} \dfrac{d\varepsilon}{\varepsilon^3}, \\ \Pi^{(2)} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{E}^{\infty} \sum e^{-(\Re_l - \tau)^2 \varepsilon^2 + i(\tau \Re_l) + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon. \end{cases}$$

Die Integration in $\Pi^{(1)}$ läßt sich allgemein ausführen, da

$$\int\limits_{(0)}^{E} e^{-\frac{A}{4\varepsilon^2}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3} = \frac{2}{A} e^{-\frac{A}{4E^2}}$$

ist, wenn der Integrand auf dem betr. Wege für $\varepsilon = 0$ verschwindet. Also ist:

$$(25)\qquad \Pi^{(1)} = \frac{4\pi}{V} \sum \frac{e^{-(\Re_l^2 - K_0^2)\frac{1}{4E^2} + i(\Re_l, \tau)}}{\Re_l^2 - K_0^2}.$$

---

1) Mit Ausschluß des Grenzpunktes $\varepsilon = 0$ in (21) und $\varepsilon = \infty$ in (23). Man überzeugt sich jedoch, daß der Ausschluß der Grenzpunkte auf dem Integrationsweg den Wert weder des Einzelintegrals (20) noch der Summe Π ändert, solange sie überhaupt endlich ist, dank den Faktoren $e^{-\frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}}$ und $\frac{1}{\varepsilon^3}$ in (21) bzw. (23).

Wählen wir insbesondere $E = \infty$, sodaß $\Pi^{(1)}$ unser gesamtes Potential darstellt, so erhalten wir *die bekannte Fourierdarstellung des Potentials*

$$\Pi = \frac{4\pi}{V} \sum \frac{e^{i(\mathfrak{R}_i \mathfrak{r})}}{\mathfrak{R}_i^2 - K_0^2}, \tag{25'}$$

deren Identität mit der z. B. von Born in seinem Buche (II, § 25) gegebenen Fourierentwicklung unschwer eingesehen wird. Das einzelne Summenglied in (25') stellt in Verbindung mit dem zeitlichen Periodizitätsfaktor $e^{-i\omega t}$ eine ebene Welle vom Ausbreitungsvektor $\mathfrak{R}_i$ dar, deren Amplitude um so größer ist, je mehr sich die Größe von $\mathfrak{R}_i$ der Ausbreitungskonstante $K_0 = \frac{\omega}{c}$ im leeren Raume nähert.[1])

Die ϑ-Transformationsformel (18) vermittelt also den gleichen Übergang wie diejenige für *ein* Argument beim Problem der Wärmeleitung im Ringe: von der „d'Alembertschen"[2]) zur Fourierschen Darstellung, vom Aufbau aus Quellen zum Aufbau aus Eigenfunktionen. Da jede Fourierentwicklung, deren Gültigkeitsbereich ein gewisses, durch 3 Vektoren $\mathfrak{a}_i$ festgelegtes Parallelepiped ist, nach den Fahrstrahlen $\mathfrak{h}$ zu den Punkten des zugehörigen reziproken Gitters fortschreitet[3]), so ist das Auftreten der reziproken Vektoren in der Transformationsformel (18) kein Zufall, sondern steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dieser Eigentümlichkeit der ϑ, das Bindeglied zwischen der d'Alembertschen und der Fourierschen Lösung zu sein.

3. Wichtiger für die meisten Zwecke und schwieriger zu berechnen als das Gesamtpotential (9) ist das erregende Po-

---

1) Die sog. Kugelkonstruktion der Theorie der Röntgeninterferenzen ist die geometrische Veranschaulichung des Potentials (25'). Vgl. Phys. Zeitschr. 14. S. 465, 1913 oder meine Habilitationsschrift Ann. d. Phys. 54. S. 519. 1917.

2) Bei Wärmeleitungsproblemen hat Laplace als erster die Lösung als Integral über die Wirkungen von Quellen aufgestellt; Fourier kennt diese Bedeutung der mathematischen Form (vgl. Enzyklop. d. math. Wiss. V, 4, § 5 und 6). Jedoch darf die Lösung hier wohl nach d'Alembert benannt werden, der die entsprechende Behandlung bei der Saite durchgeführt hatte.

3) Vgl. Anm. zu S. 262.

tential (10), das durch Fortlassen des von einem Gitterpunkte P stammenden Einzelpotentials aus (9) entsteht:

$$\Pi_P'(\mathfrak{r}) = \Pi(\mathfrak{r}) - \frac{e^{iK_0|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|+i(\mathfrak{t}\mathfrak{R}_P)}}{|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|}. \tag{26}$$

Die Integraldarstellung (20) gestattet, das Einzelpotential vom Gesamtpotential abzuziehen. $\Pi(\mathfrak{r})$ in $\Pi^{(1)}$ und $\Pi^{(2)}$ nach (24) aufteilend und die Integration in (20) ebenfalls in die Teile $0 \ldots E$, $E \ldots \infty$ zerlegend, sehen wir, daß sich aus der Summe $\Pi^{(2)}$ das auf $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_P$ bezügliche Glied gerade forthebt — wie ja verständlich ist, da in $\Pi^{(2)}$ jedes Summenglied die Wirkung eines Atoms darstellt. Drücken wir das Fortlassen des Gliedes $\mathfrak{R}_P$ bei der Summation durch das Zeichen $\sum_{(P)}$ aus.

An $\Pi^{(1)}$ hingegen ist das Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^{E} e^{-(\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r})^2\varepsilon^2+\frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon, \tag{27}$$

abzuziehen. Wird die wohlbekannte und tabulierte Fehlerfunktion[1])

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\, dx \tag{28}$$

eingeführt, so läßt sich das Integral exakt durch sie ausdrücken, wie im Anhang gezeigt wird:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{(0)}^{E} e^{-(\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r})^2\varepsilon^2+\frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon = i\frac{\sin K_0|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|}{|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|} \\ + \dfrac{1}{2|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|}\left\{ e^{iK_0|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|}\, \Phi\left(|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|E + \frac{iK_0}{E}\right)\right. \\ \left. + e^{-iK_0|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|}\, \Phi\left(|\mathfrak{R}_P-\mathfrak{r}|E - \frac{iK_0}{E}\right)\right\}. \end{cases} \tag{29}$$

Man hat demnach die folgenden streng gültigen Formeln für das erregende Potential:

---

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Teubner 1909.

$$
(30)\quad
\begin{cases}
\Pi_P'(\mathfrak{r}) = \Pi_P^{(1)}(\mathfrak{r}) + \Pi_P^{(2)}(\mathfrak{r}), \\
\Pi_P^{(1)}(\mathfrak{r}) = \dfrac{4\pi}{v}\sum \dfrac{e^{-\{\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2\}\frac{1}{4E^2} + i(\mathfrak{R}_l\,\mathfrak{r})}}{\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2} - i\dfrac{\sin K_0|\mathfrak{R}_P - \mathfrak{r}|}{|\mathfrak{R}_P - \mathfrak{r}|} \\
\quad - \dfrac{1}{2|\mathfrak{R}_P - \mathfrak{r}|}\left\{e^{iK_0|\mathfrak{R}_P - \mathfrak{r}|}\,\Phi\left(|\mathfrak{R}_P - \mathfrak{r}|\,E + \dfrac{iK_0}{E}\right)\right. \\
\quad \left. + e^{-iK_0|\mathfrak{R}_P - \mathfrak{r}|}\,\Phi\left(|\mathfrak{R}_P - \mathfrak{r}|\,E - \dfrac{iK_0}{E}\right)\right\}, \\
\Pi_P^{(2)}(\mathfrak{r}) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_E^\infty \sum_{(P)} e^{-(\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r})^2\varepsilon^2 + i(\mathfrak{r}\mathfrak{R}_l) + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}}\,d\varepsilon \\
\quad = \sum_{(P)}\left\{\dfrac{\cos K_0|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|}{|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|}\right. \\
\quad - \dfrac{1}{2|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|}\left[e^{iK_0|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|}\,\Phi\left(|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|\,E + \dfrac{iK_0}{2E}\right)\right. \\
\quad \left.\left. + e^{-iK_0|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|}\cdot\Phi\left(|\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|\,E - \dfrac{iK_0}{2E}\right)\right]\right\} e^{i(\mathfrak{r}\mathfrak{R}_l)}.
\end{cases}
$$

In $\Pi_P^{(2)}$ ist das Integral gemäß Formel (III) des Anhangs eingesetzt worden.

Was ist nun bezüglich der Konvergenz der Summen durch die Umformungen erreicht worden?

$\Pi_P^{(1)}$ ist offenbar sehr schnell konvergent, da die Summenglieder im wesentlichen abnehmen wie $\frac{1}{\mathfrak{h}_l^2}e^{-4\pi^2\mathfrak{h}_l^2\frac{1}{E^2}}$, wo $\mathfrak{h}_l$ der Fahrstrahl im reziproken Gitter ist, über dessen Punkte summiert werden muß. ($\mathfrak{R}_l$ ist nach (22′) von der Größenordnung $\mathfrak{h}_l$). Je *kleiner* E, um so besser die Konvergenz von $\Pi_P^{(1)}$.

Bei $\Pi_P^{(2)}$ scheint zunächst gegenüber der ursprünglichen Gestalt kein Fortschritt erzielt, da hier wieder Größen von der Ordnung $\frac{\cos K\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$ über die Gitterpunkte des Atomgitters zu summieren sind. Man sieht jedoch, daß dieser schlecht konvergente Teil der Summe sich heraushebt, sobald es bei größeren Werten der Entfernung $\mathfrak{R} = |\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|$ erlaubt ist, die Fehlerfunktion wie folgt anzunähern:

$$
(31)\qquad \Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-x^2}}{x}.
$$

Das einzelne Summenglied von $\Pi_p^{(2)}$ wird dann, indem der schlecht konvergierende Teil sich forthebt:

$$(32) \qquad \cdot \frac{E}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-(\mathfrak{R}_i-\mathfrak{r})^2 E^2 + \frac{K_0^2}{4E^2}}}{(\mathfrak{R}_i-\mathfrak{r})^2 E^2 + \frac{K_0^2}{4E^2}} \cdot e^{i(\mathfrak{l}\mathfrak{R}_i)}.$$

Dies heißt aber, daß die Summe in der gleichen Weise konvergiert wie $\Pi_p^{(1)}$, indem nämlich die Glieder abnehmen wie

$$\frac{1}{E\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\mathfrak{R}_i-\mathfrak{r})^2} e^{-(\mathfrak{R}_i-\mathfrak{r})^2 E^2}.$$

$(\mathfrak{R}_i - \mathfrak{r})$ ist der Fahrstrahl vom Aufpunkt zu den Punkten des Atomgitters. Die Konvergenz ist um so besser, je *größer* E.

Durch die Wahl der Übergangsstelle E haben wir es somit in der Hand, entweder die Reihen von $\Pi_p^{(1)}$ oder die von $\Pi_p^{(2)}$ zu beliebig schneller Konvergenz zu zwingen. Ein mittlerer Wert von E wird beide Reihen für die numerische Rechnung geeignet machen.

4. Handelt es sich nicht um das erregende, sondern um das *Gesamtpotential*, welches in einem Aufpunkt P zu bilden ist, der nicht mit einem Gitterpunkt zusammenfällt, so ist in $\Pi^{(2)}$ das vorher fortgelassene Glied mitzunehmen und in $\Pi^{(1)}$ fallen die abzuziehenden Terme fort.

Es ist also, indem wieder in $\Pi^{(1)}$ die Summe über das reziproke, in $\Pi^{(2)}$ über das Atomgitter erstrecht wird:

$$(33) \quad \begin{cases} \Pi(\mathfrak{r}) = \Pi^{(1)}(\mathfrak{r}) + \Pi^{(2)}(\mathfrak{r}), \\ \Pi^{(1)}(\mathfrak{r}) = \frac{4\pi}{V} \sum' \frac{e^{-\left\{\mathfrak{R}_i^2 - K_0^2\right\}\frac{1}{4E^2} + i(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{r})}}{\mathfrak{R}_i - K_0^2}, \\ \Pi^{(2)}(\mathfrak{r}) = \sum \left[\frac{\cos K_0 R_{1P}}{R_{1P}} - \frac{1}{2R_{1P}} \left\{ e^{iK_0 R_{1P}} \Phi\left(R_{1P}E + \frac{iK_0}{2E}\right) \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + e^{-iK_0 R_{1P}} \Phi\left(R_{1P}E - \frac{iK_0}{2E}\right) \right\} \right] e^{i(\mathfrak{l}\mathfrak{R}_i)}, \\ R_{1P} = |\mathfrak{R}_i - \mathfrak{r}|. \end{cases}$$

Wenn nun das ganze Gitter aus mehreren (T) Translationsgittern besteht, so ist nach (7) und (8), sowie (33)

$$(34) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}(\mathfrak{r}) = \sum_i \mathfrak{p}_i e^{i(\mathfrak{l}\mathfrak{r}_i)} \{\Pi^{(1)}(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i) + \Pi^{(2)}(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i)\} \\ \qquad = \mathfrak{P}^{(1)}(\mathfrak{r}) + \mathfrak{P}^{(2)}(\mathfrak{r}). \end{cases}$$

In $\Pi^{(2)}$ ist die Summe jetzt über alle Gitterpunkte, also über l und t zu erstrecken und der erste Bestandteil läßt sich übersichtlicher unter Einführung des Strukturfaktors[1])

$$\mathfrak{S}_l = \sum_t \mathfrak{p}_t e^{-2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r}_t)} \tag{35}$$

schreiben:

$$\mathfrak{P}^{(1)}(\mathfrak{r}) = \sum_l \mathfrak{S}_l \frac{e^{-\{\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2\}\frac{1}{4E^2} + i(\mathfrak{R}_l \mathfrak{r})}}{\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2}. \tag{36}$$

Die Bedeutung von $\mathfrak{S}_l$ zeigt sich, wenn $E = \infty$ gesetzt wird und sich das Potential auf $\mathfrak{P}^{(1)}$ reduziert: $\mathfrak{S}_l$ ist das gesamte Moment, mit dem die Basisgruppe an der Aussendung derjenigen ebenen Welle beteiligt ist, die durch das l^{te} Summenglied dargestellt wird. Diese Welle entsteht nach der Kugelkonstruktion aus der „einfallenden" Welle mit der Normalen $\mathfrak{k}$ durch „Reflexion" an der Ebene mit der Normalen $\mathfrak{h}_l$. Der im Strukturfaktor auftretende Phasenfaktor $(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})$ berücksichtigt das Heraustreten der einzelnen Atome der Basisgruppe aus der reflektierenden Ebene.

Schließlich sei noch angedeutet, daß auch im zusammengesetzten Gitter das erregende Potential für ein Atom P in zwei Teile zerlegt wird:

$$\mathfrak{P}_P(\mathfrak{r}) = \mathfrak{P}_P^{(1)}(\mathfrak{r}) + \mathfrak{P}_P^{(2)}(\mathfrak{r}),$$

die leicht aus (20) und (35) aufzuschreiben sind.

Hiermit brechen wir die Betrachtungen für das optische Potential ab, das nicht selbst, sondern dessen räumliche Ableitungen in der Optik Gegenstand der Berechnung sind. Diese Ableitungen können an den angegebenen Reihen gliedweise gebildet werden, während z. B. zweimalige gliedweise Differentiation der Fourierdarstellung (25′) nicht erlaubt ist, da sie zu nicht konvergenten Reihen führt. Die absolut konvergenten Darstellungen, die durch die Umformung gewonnen sind, stellen somit auch in dieser Hinsicht einen Fortschritt dar.

---

1) In der Theorie der Röntgeninterferenzen sind die Momente $\mathfrak{p}_t$ gleichgerichtet; es tritt deshalb in der üblichen Definition des Strukturfaktors der vektorielle Charakter nicht hervor.

IV.

1. Der *Grenzübergang von den optischen zu den elektrostatischen Potentialen*, der durch Verschwindenlassen von $\mathfrak{k}$ und K_0 und Ersetzen des Momentes $\mathfrak{p}$ durch die Ladung ε geschieht, ist natürlich nur möglich, wenn die Basisgruppe neutral ist. Indem wir das Gitter gemäß Gl. (7), (7') in einfache Translationsgitter (Index t) zerlegt denken, sprechen wir diese Bedingung so aus:

$$\sum \varepsilon_t = 0 \qquad t = 1, 2, \ldots T. \tag{37}$$

Das Gesamtpotential an irgend einem Aufpunkt $\mathfrak{r}$, der nicht mit einem Gitterpunkt zusammenfällt, wird aus (33) bis (36) erhalten, wenn dort $K_0 = \mathfrak{k} = 0$ gesetzt wird. Hierbei geht $\mathfrak{K}_t$ in $2\pi\mathfrak{h}_t$ über. Es wird:

$$\left\{\begin{aligned} &\Pi\ (\mathfrak{r}) = \Pi^{(1)}(\mathfrak{r}) + \Pi^{(2)}(\mathfrak{r}), \\ &\Pi^{(1)}(\mathfrak{r}) = \frac{1}{\pi V}\sum_t S_t \frac{e^{-\frac{\pi^2}{E^2}\mathfrak{h}_t^2 + 2\pi i(\mathfrak{h}_t \mathfrak{r})}}{\mathfrak{h}_t^2}; \\ &\qquad\qquad S_t = \sum_t \varepsilon_t e^{-2\pi i(\mathfrak{h}_t \mathfrak{r}_t)}, \\ &\Pi^{(2)}(\mathfrak{r}) = \sum_t \sum_l \varepsilon_t \frac{1 - \Phi(R_{ltP}E)}{R_{ltP}}; \quad R_{ltP} = |\mathfrak{R}_t + \mathfrak{r}_t - \mathfrak{r}|. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Das unendlich werdende Glied in $\Pi^{(1)}$ für $\mathfrak{h}_t = 0$ fällt wegen (37) fort, da der Strukturfaktor S_t Null wird. Übrigens hat, da es sich um ein skalares Potential handelt, der Strukturfaktor den Vektorcharakter eingebüßt. Beide Reihen konvergieren sehr gut.

Indem wir uns wieder dem für einen Gitterpunkt $\mathfrak{R}_{t'} + \mathfrak{r}_t$ geltenden *erregenden Potential* zuwenden, ist bei $\Pi^{(2)}$ das eine durch die Kombination (t', t') gekennzeichnete Glied fortzulassen, wie an der Summe angedeutet werden möge. Der von $\Pi^{(1)}$ abzuziehende Betrag wird aus (30) erhalten. Sonach ist:

$$\left\{\begin{aligned} &\Pi_{t't'}(\mathfrak{r}) = \Pi^{(1)}_{t',t'}(\mathfrak{r}) + \Pi^{(2)}_{t',t'}(\mathfrak{r}), \\ &\Pi^{(1)}_{t',t'}(\mathfrak{r}) = \frac{1}{\pi V}\sum_t S_t \frac{e^{-\frac{\pi^2}{E^2}\mathfrak{h}_t^2 + 2\pi i(\mathfrak{h}_t \mathfrak{r})}}{\mathfrak{h}_t^2} - \varepsilon_{t't'}\frac{\Phi(E\mathfrak{R}_{t't'P})}{R_{t't'P}}, \\ &\Pi^{(2)}_{t',t'}(\mathfrak{r}) = \sum_{t\,(t',t')_t} \sum \varepsilon_{lt} \frac{1 - \Phi(E\mathfrak{R}_{ltP})}{\mathfrak{R}_{ltP}}. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_t &= \sum_{t'} \varepsilon_t e^{-2\pi i(\mathfrak{h}_t \mathfrak{r}_t)}, \\ \mathfrak{R}_{ltP} &= |\mathfrak{R}_t + \mathfrak{r}_t - \mathfrak{r}|. \end{aligned}\right.$$

Schließlich erhält man hieraus den Faktor φ', Gl. (3), der gesamten beim Gitteraufbau gegen das Ion l', t' geleisteten Arbeit, indem man $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}_l' + \mathfrak{r}_t'$ werden läßt. Offenbar muß für alle Ionen des gleichen Translationsgitters t' derselbe Wert entstehen und wir dürfen $l' = (000)$ setzen. Es wird dann, da $\lim \frac{\Phi(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ist, aus (39)

$$(40)\quad \begin{cases} \varphi_{t'}' = \varphi_{t'}^{(1)} + \varphi_{t'}^{(2)}, \\ \varphi_{t'}^{(1)} = \dfrac{1}{\pi V} \sum_t' S_{tt'} \dfrac{e^{-\frac{\pi^2}{E^2}\mathfrak{h}_t^2}}{\mathfrak{h}_t^2} - \varepsilon_{t'} \dfrac{2E}{\sqrt{\pi}}; \\ \qquad\qquad S_{tt'} = \sum_t \varepsilon_t e^{2\pi i (\mathfrak{h}_t, \mathfrak{r}_{t'} - \mathfrak{r}_t)}, \\ \varphi_{t'}^{(2)} = \sum_{lt(\neq 0t')} \varepsilon_t \dfrac{1 - \Phi(E R_{ltt'})}{R_{ltt'}}; \quad R_{ltt'} = |\mathfrak{R}_l + \mathfrak{r}_t - \mathfrak{r}_{t'}|. \end{cases}$$

Am Summenzeichen für $\varphi_{t'}^{(1)}$ ist durch den Akzent daran erinnert, daß das Glied $\mathfrak{h}_t^2 = 0$ fortfällt.

Diese in Strenge gültigen Formeln für die elektrostatischen Potentiale bilden einfache geschlossene Ausdrücke und haben den Vorteil, daß die höheren Summenglieder sehr schnell abnehmen. Die Trennungsstelle E, von deren Wert die Summe $\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$ nicht abhängen kann, gibt der Formel eine gewisse Geschmeidigkeit, die noch eine Anpassung je nach dem speziellen zu berechnenden Gitter gestattet. Vergrößerung von E bedeutet Ersparnis von Gliedern in $\varphi^{(2)}$, Verkleinerung Ersparnis bei $\varphi^{(1)}$. Es ist übrigens zu beachten, daß E die Dimension einer reziproken Länge hat, wie die Integrationsvariable ε in (20), aus der es entstanden ist.

Um die Formel in den Dimensionen übersichtlicher zu schreiben, setzen wir $E = \eta/\delta$, indem unter δ irgend eine Längendimension des Kristallgitters verstanden wird. Dann wird

$$(40')\quad \begin{cases} \varphi_{t'}^{(1)} = \dfrac{\delta^2}{\pi V} \sum_{l,t}' S_{tt'} \dfrac{e^{-\frac{\pi^2}{\eta^2}\mathfrak{h}_t^2 \delta}}{\mathfrak{h}_t^2 \delta^2} - \dfrac{\varepsilon_{t'}}{\delta} \dfrac{2\eta}{\sqrt{\pi}}; \\ \qquad\qquad S_{tt'} = \sum_t \varepsilon_t e^{2\pi i (\mathfrak{h}_t, \mathfrak{r}_{t'} - \mathfrak{r}_t)}, \\ \varphi_{t'}^{(2)} = \dfrac{1}{\delta} \sum_{lt(\neq 0t')} \varepsilon_t \dfrac{1 - \Phi\left(\eta \dfrac{R_{ltt'}}{\delta}\right)}{R_{ltt'}/\delta}. \end{cases}$$

2. *Gitterenergie von Steinsalz.* Die Auswertung der obigen Formeln mag am Steinsalz und Flußspatgitter erläutert werden, deren Energien durch die Berechnungen von Madelung bzw. Landé-Bormann bekannt sind. Wir beschränken uns im Text auf die notwendigsten Erläuterungen.

Na^+ und Cl^- bilden je ein flächenzentriertes Gitter von der Würfelkante a.[1]) Wir wählen $\delta = a$. Achsen $\mathfrak{a}_i$ siehe Fig. 3a, zugehöriges Volum

$$V = \frac{a^3}{4}; \quad \mathfrak{r}_{Na} = 0, \; \mathfrak{r}_{Cl} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3).$$

Reziproke Achsen $\mathfrak{b}_i$ (vgl. Fig. 3b) ergeben für den Endpunkt von $\mathfrak{h}_i$ alle Punkte eines körperzentrierten Gitters von der Würfelkante $2/a$. Der Strukturfaktor ist

$$S_{l,\,Na} = \varepsilon(1 - e^{\pi i(l_1 + l_2 + l_3)}) = \begin{matrix} 0 \text{ für } \sum l_i \text{ gerade} \\ 2\varepsilon \text{ für } \sum l_i \text{ ungerade}. \end{matrix}$$

---

1) Die Geometrie der 3 Bravaisschen kubischen Gitter und ihrer Reziproken gestaltet sich folgendermaßen:

1. *Gewöhnliches kubisches Gitter.* Länge der Würfelkante a. 3 orthogonale Achsen $\mathfrak{a}_i$ beschreiben das Gitter als Translationsgitter. $V = a^3$. Die reziproken Vektoren $\mathfrak{b}_i$ fallen der Richtung und dem Sinn nach mit den $\mathfrak{a}_i$ zusammen, ihre Länge $1/a$, das von ihnen aufgespannte Volumen $B = 1/a^3$.

2. *Flächenzentriertes kubisches Gitter.* Als Translationsgitter beschrieben durch $\mathfrak{a}_i$ = halben Flächendiagonalen des Grundwürfels. $|\mathfrak{a}_i| = a/\sqrt{2}$. Da das Gitter auch aufgefaßt werden kann als bestehend aus 4 einfachen kubischen Gittern, ist $V = \frac{1}{4}a^3$. Die $\mathfrak{b}_i$ fallen in die Richtung der Würfelkörperdiagonalen,

$$|\mathfrak{b}_i| = \frac{\sqrt{3}}{a}, \quad B = \frac{4}{a^3},$$

s. Fig. 3.

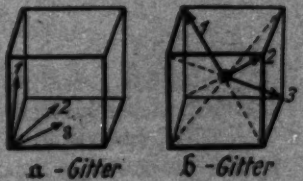


Fig. 3.

3. *Körperzentriertes kubisches Gitter* $\mathfrak{a}_i$ = halbe Körperdiagonalen,

$$|\mathfrak{a}_i| = a\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad V = \frac{a^3}{2};$$

die $\mathfrak{a}$-Achsen haben also die gleiche Lage, wie bei 2. die $\mathfrak{b}$-Achsen. Daher müssen diesmal die $\mathfrak{b}$-Achsen die Richtung der Flächendiagonalen haben, das eingeschlossene Volum ist $B = 2/a^3$, ihre Länge daher $\frac{\sqrt{2}}{a}$.

Betrachtet man die ganzen von den $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ gebildeten Gitter, so findet sich folgende Zuordnung, welche die obigen Tatsachen anders ausspricht:

Von den Gitterpunkten liefert also die Hälfte keinen Beitrag. Die übrigbleibenden Gitterpunkte sind diejenigen des „körperzentrierenden" Gitters, die insgesamt ein einfaches kubisches Gitter von der Kante $2/a$ bilden, in dem jedoch der Fahrstrahl $\mathfrak{h}_i$ vom *Zentrum* eines Elementarwürfels aus zu zählen ist:

$$\mathfrak{h}_i^2 = \{(H_1 - 1/2)^2 + (H_2 - 1/2)^2 + (H_3 - 1/2)^2\} \cdot 4/a^2 = 1/a^2 \sum (2H_i - 1)^2.$$

H_i sind wieder ganze Zahlen (die mit den l_i durch die gleiche Substitution zusammenhängen, welche die Achsen $\mathfrak{a}_i$ in die orthogonalen Achsen des einfachen kubischen Gitters überführt. Vgl. bei Flußspat den Übergang zu orthogonalen Achsen durch Substitution statt geometrisch am Gitter ausgeführt).

Abstand $R_{li\,\mathrm{Na}}^2 = \sum \left(l_i \frac{a}{2}\right)^2$; Ladung $\varepsilon_i = \begin{cases} +\varepsilon \text{ für } \sum l_i \text{ gerade} \\ -\varepsilon \text{ für } \sum l_i \text{ ungerade.} \end{cases}$

$$(41) \quad \begin{cases} \varphi_{\mathrm{Na}}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{a} \left\{ \frac{4}{\pi} \sum{}' 2 \cdot \frac{e^{-\frac{\pi^2}{\eta^2} \Sigma (2H_i - 1)^2}}{\sum (2H_i - 1)^2} - \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \right\} \\ \varphi_{\mathrm{Na}}^{(2)} = \frac{\varepsilon}{a} \sum (-1)^{\Sigma l_i} \frac{1 - \Phi\left(\eta/2 \sqrt{\Sigma l_i^2}\right)}{1/2 \sqrt{\Sigma l_i^2}} \end{cases}.$$

Erste numerische Berechnung: Wir wählen die Übergangsstelle η so, daß in beiden Reihen $\varphi^{(1)}$ und $\varphi^{(2)}$ die Summenglieder asymptotisch gleich schnell abnehmen. Wegen (31) gibt dies für große Werte der Summenzeiger:

$$\frac{4\pi^2}{\eta^2} = \frac{\eta^2}{4}, \qquad \eta = 2\sqrt{\pi}.$$

Atomgitter.	Reziprokes Gitter.
1. Gewöhnliches kubisches Gitter, Würfelkante a.	Gewöhnliches kubisches Gitter, Würfelkante $1/a$.
2. Flächenzentriertes kub. Gitter, Würfelkante a.	Körperzentriertes kub. Gitter, Würfelkante $2/a$.
3. Körperzentriertes kub. Gitter, Würfelkante a.	Flächenzentriertes kub. Gitter, Würfelkante $2/a$.

Ein *Translationsgitter* (einerlei ob Atomgitter oder reziprokes) mit Achsen $2\mathfrak{c}_i$ enthält die Punkte $\mathfrak{R} = l_1 \mathfrak{c}_1 + l_2 \mathfrak{c}_2 + l_3 \mathfrak{c}_3$, wo die l_i alle *geraden* Zahlen durchlaufen. Durch *Körperzentrierung* dieses Gitters entsteht ein Gitter, in dem die l_i nur die *„ungemischten"* Tripel durchlaufen, d. h. die l_i entweder alle gerade oder alle ungerade sind. Durch *Flächenzentrierung* des gewöhnlichen kubischen wird den l_i die Bedingung $\sum l_i$ = gerade Zahl auferlegt.

Also Rechenformeln:

$$(41') \quad \begin{cases} \varphi^{(1)}_{Na} = \frac{1}{a} \cdot 2\left\{ \sum \frac{e^{-\pi/4 \sum (2H_i - 1)^2}}{\pi/4 \sum (2H_i - 1)^2} - 2 \right\} \\ \varphi^{(2)}_{Na} = \frac{1}{a} 2\sqrt{\pi} \sum (-1)^{\sum l_i} \frac{1 - \Phi\sqrt{\pi(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)}}{\sqrt{\pi(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)}} \end{cases}.$$

Zur numerischen Rechnung tragen wir in die erste Spalte der Tabellen die Wertetripel der Indizes ein, in die zweite die Anzahl Glieder, die sich unter Berücksichtigung von Vertauschungen und Vorzeichenwechsel daraus bilden lassen. Die Bedeutung der weiteren Spalten erhellt genügend aus den Überschriften.

$\varphi^{(1)}_{Na}$	$(2H_i - 1)$	Anzahl	$\sum (2H_i - 1)^2$	Argum.	$e^{-\text{Arg.}}$	$\frac{e^{-\text{Arg.}}}{\text{Argum.}}$ Anz.
	111	8	3	2,356	0,09500	0,3226
	113	24	11	8,639	0,00018	0,0005
	133	24	19	14,91	—	
	⋮	⋮	⋮	⋮	—	
	⋮	⋮	⋮	⋮	—	
						0,3231

$$\frac{a}{\varepsilon} \varphi^{(1)} = -2 \cdot 1{,}677 = -3{,}3538.$$

$\varphi^{(2)}_{Na}$	l_i	$(\pm)\cdot$ Anzahl	$\sum l_i^2$	Argum.	$1 - \Phi$	$(1-\Phi)\frac{\text{Anzahl}}{\text{Argum.}}$
	001	− 6	1	1,7725	0,0122	− 0,0413
	011	+ 12	2	2,506	0,0004	+ 0,0019
	111	− 8	3	3,065	—	
	002	+ 6	4	—	—	
	⋮					
						− 0,0394

$$\frac{a}{\varepsilon} \varphi^{(2)}_{Na} = -2\sqrt{\pi} \cdot 0{,}0894 = -0{,}1403$$

$$\frac{a}{\varepsilon} \varphi_{Na} = -3{,}494(1)$$

Wie man sieht, konvergieren beide Reihen so stark, daß nur je zwei verschiedene Glieder berücksichtigt werden müssen, um die dritte Stelle hinter dem Komma noch mitzunehmen. Die gesamte beim Gitteraufbau zu leistende Arbeit ist, da $\varphi_{Cl} = -\varphi_{Na}$ und $-\varepsilon_{Cl} = \varepsilon_{Na} = \varepsilon$:

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{Na}\varphi_{Na} + \varepsilon_{Cl}\varphi_{Cl}) = \varepsilon\varphi_{Na} = -\frac{\varepsilon^2}{a} \cdot 3{,}494(1).$$

Zweite numerische Berechnung: Die Übergangsstelle η soll so groß gewählt werden, daß nur $\varphi^{(1)}$ zu berücksichtigen ist. Das größte Glied in $\varphi^{(2)}$ ist

$$2\,(1-\Phi(\eta/2))$$

und tritt sechsmal auf. $1-\Phi(2{,}9)$ ist nach den Funktionentafeln $< 0{,}0005$, also ist für eine Rechengenauigkeit von drei Dezimalstellen die geforderte Kleinheit von $\varphi^{(2)}$ gewiß erreicht, wenn $\eta = 2\pi$ genommen wird:

$$(41'') \qquad \varphi_{\mathrm{Na}} = \varphi^{(1)}_{\mathrm{Na}} = \frac{\varepsilon}{a}\left\{\frac{2}{\pi}\sum \frac{e^{-\frac{1}{4}\Sigma(2H_i-1)^2}}{1/4\,\Sigma(2H_i-1)^2} - 4\sqrt{\pi}\right\}.$$

$(2H_i-1)$	Anzahl	$\Sigma(2H_i-1)^2$	Argum.	$e^{-\text{Arg.}}$	$e^{-\text{Arg.}}\,\frac{\text{Anzahl}}{\text{Argum.}}$
111	8	3	0,75	0,47237	5,03861
113	24	11	2,75	0,06393	0,55777
133	24	19	4,75	0,00865	0,04373
115	24	} 27	6,75	0,00117	0,00556
333	8				
135	48	35	8,75	0,00016	0,00087
117	24	51	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮			
					5,64654

$$\varphi_{\mathrm{Na}} = \frac{\varepsilon}{a}\left\{\frac{2}{\pi}\cdot 5{,}64654 - 4\sqrt{\pi}\right\}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{a}\cdot 3{,}494(3).$$

Die Übereinstimmung mit dem zuerst berechneten Werte ist auf mehr als 1 Promille erreicht. Von dem Madelungschen Wert 3,487(6) bemerkt man eine geringfügige Abweichung (2 Promille), die ich infolge der guten Übereinstimmung meiner beiden Werte und da meine Reihen noch schneller konvergieren, als die Madelungschen, für reell halten möchte.

Es sei übrigens darauf aufmerksam gemacht, daß die Ausführung der numerischen Berechnung für zwei verschiedene Übergangsstellen *eine wirksame Kontrolle* gegen alle Arten von Rechenfehlern (systematische und unsystematische) bildet. Ein Auslassen von Teilen der Summe (wie bei Hrn. Landés Flußspatrechnung) zeigt sich sofort in der Diskrepanz der beiden Werte, ebenso wie Fehler in der Bestimmung des Strukturfaktors. Eine analoge Kontrolle besteht beim Madelungschen Verfahren darin, daß die Berechnung zweimal durchgeführt wird, indem das Gitter nach verschiedenen

Gittergeraden und -ebenen aufgelöst wird. Doch scheint mir die Rechenarbeit für die Kontrollrechnung bei meinem Verfahren wesentlich geringer zu sein, da man von den gleichen geschlossenen Formeln ausgeht wie für die erste Rechnung.

3. *Gitterenergie von Flußspat* (CaF_2). Die Ionen Ca^{++} und $2 \cdot F^-$ bilden drei flächenzentrierte Gitter (Achsen $\mathfrak{a}_i$ wie Fig. 3a).

$$r_{Ca} = 0, \qquad r_{F_1} = +\frac{1}{4}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3), \qquad r_{F_2} = -\frac{1}{4}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3).$$

Wir berechnen erst φ_{Ca}', dann φ_F', indem wir η so groß wählen, daß $\varphi^{(2)}$ vernachlässigt werden kann.

1. *Potential der Calciumionen* $\boxed{\varphi_{Ca}'}$.

Strukturfaktor:

$$S_{l,Ca} = \varepsilon\left(2 - e^{\frac{\pi i}{2}\sum l_i} - e^{-\frac{\pi i}{2}\sum l_i}\right) = 2\varepsilon\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\sum l_i\right),$$

$$= \begin{cases} 0 \\ 4\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{cases} \text{ wenn } \sum l_i \equiv \begin{cases} 0 \\ 2 \\ \pm 1 \end{cases} (\text{mod. } 4).$$

Als Länge δ wird, wie bei Steinsalz, die Würfelkante a gewählt. $V = \frac{1}{4}a^3$.

$$(42) \qquad \begin{cases} \varphi_{Ca}^{(1)} = \dfrac{a^2\varepsilon}{\pi V}\sum \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{e^{-\frac{\pi^2}{\eta^2}\mathfrak{b}_l^2 a^2}}{\mathfrak{b}_l^2 a^2} - \dfrac{2\varepsilon}{a} \cdot \dfrac{2\eta}{\sqrt{\pi}}, \\ \varphi_{Ca}^{(2)} = \dfrac{1}{a}\sum \varepsilon_i \dfrac{1 - \Phi\left(\eta \dfrac{R_{lll'}}{a}\right)}{R_{lll'}/a}. \end{cases}$$

Bestimmung von η: Der kleinste Abstand zweier Ionen liegt zwischen Ca und F-Ion, seine Länge: $\frac{1}{4}a\sqrt{3}$. Jedes Ca hat acht solche Nachbarn. Mit $\eta = 2\pi$ ist der größte Beitrag zu $\varphi_{Ca}^{(2)} \ldots \frac{\varepsilon}{a} 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1 - \Phi\left(\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$. Da $1 - \Phi\left(\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sim 0{,}0001$, ist dieser Beitrag etwa 0,0018 und kommt, wie der Gang der Rechnung zeigt, neben dem Gesamtwert von φ_{Ca}' nicht in Betracht. Festsetzung: $\eta = 2\pi$.

Einführung neuer Summenzeiger in $\varphi_{Ca}^{(1)}$ (geometrisch: Beziehung des aus den $\mathfrak{b}_i$ (Fig. 3b) gebildeten reziproken Gitters auf neue, orthogonale Achsen, algebraisch: Transformation der quadratischen Form $\mathfrak{b}_i^2$ in eine Summe von Quadraten).

Es ist $$\mathfrak{b}_l = \sum_i l_i \mathfrak{b}_i$$

$$\mathfrak{b}_l^2 = \sum_i \sum_\varkappa l_i l_\varkappa (\mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_\varkappa).$$

Fig. 3b wird entnommen:

$$\mathfrak{h}_i^2 = \frac{3}{a^2}, \qquad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3) = (\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3) = -\frac{1}{a^2}.$$

Hiermit

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_i^2 &= \frac{1}{a^2}\{3(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) - 2l_1l_2 - 2l_1l_3 - 2l_2l_3\},\\ &= \frac{1}{a^2}\{(\sum l_i - 2l_1)^2 + (\sum l_i - 2l_2)^2 + (\sum l_i - 2l_3)^2\},\\ &= \frac{1}{a^2}\{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2\}.\end{aligned}$$

Die neuen ganzzahligen Zeiger

$$H_1 = \sum l_i - 2l_1; \quad H_2 = \sum l_i - 2l_2; \quad H_3 = \sum l_i - 2l_3$$

sind die Endpunktskoordinaten des Fahrstrahls $\mathfrak{h}_i$ bezogen auf gewöhnliche kubische Achsen. Daß $\mathfrak{h}_i$ ein körperzentriertes Gitter durchläuft, zeigt sich darin, daß die H_i nur „ungemischte" Wertetripel annehmen ($H_1 \equiv H_2 \equiv H_3 \equiv \sum l_i \pmod 2$).

Strukturfaktor in H_i ausgedrückt: Da $\sum H_i = \sum l_i$ ist, folgt:

$$S_{H_i\,\mathrm{Ca}} = \begin{cases} 0 \\ 4e \\ 2e \end{cases} \text{ wenn } \sum H_i \equiv \begin{cases} 0 \\ 2 \\ \pm 1 \end{cases} \pmod 4.$$

Rechenformel für φ_{Ca} aus (42):

$$(42') \qquad \varphi_{\mathrm{Ca}} = \frac{e}{a}\frac{1}{\pi}\sum \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{e^{-\frac{1}{4}\sum H_i^2}}{\frac{1}{4}\sum H_i^2} - \frac{2e}{a} 4\sqrt{\pi}.$$

2. *Potential der Fluorionen* $\boxed{\varphi_{\mathrm{F}}^{(1)}}$.

Strukturfaktor für Ionen F_1 und F_2:

$$\begin{aligned} S_{li\,\mathrm{F}_1} &= -e\left(1 - 2e^{\frac{\pi i}{2}\sum l_i} + e^{\pi i \sum l_i}\right);\\ &= e^{\frac{\pi i}{2}\sum l_i} \cdot S_{li\,\mathrm{Ca}}\\ &= e^{\frac{\pi i}{2}\sum H_i} \cdot S_{H_i\,\mathrm{Ca}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{li\,\mathrm{F}_2} &= -e\left(1 - 2e^{-\frac{\pi i}{2}\sum l_i} + e^{-\pi i \sum l_i}\right)\\ &= e^{-\frac{\pi i}{2}\sum l_i} \cdot S_{li\,\mathrm{Ca}}\\ &= e^{-\frac{\pi i}{2}\sum H_i} \cdot S_{H_i\,\mathrm{Ca}}.\end{aligned}$$

Da $S_{H_i\,Ca}$ eine gerade Funktion von $\sum H_i$ ist, fällt der imaginäre Teil der Potentiale von selbst fort. Man erhält als *Rechenformel:*

$$(43)\quad \varphi_{F_{1,2}}' = \frac{1}{a}\frac{1}{\pi}\sum e^{\pm\frac{\pi i}{2}\sum H_i}\, S_{H_i\,Ca}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{4}\sum H_i^2}}{\frac{1}{4}\sum H_i^2} + \frac{\varepsilon}{a}4\sqrt{\pi}\,.$$

3. *Gitterenergie pro Gitterkubus* a^3. Wir erhalten mit den ursprünglichen Achsen a_i für die im Volum a^3 enthaltene Energie gemäß (2):

$$A = \tfrac{1}{2}\{2\varepsilon\varphi_{Ca}' - \varepsilon\varphi_{F_1}' - \varepsilon\varphi_{F_2}'\}.$$

Die im Würfel von der Kante a enthaltene Energie ist viermal so groß, also

$$(44)\quad \begin{cases} 4A = 2\varepsilon\{2\varphi_{Ca}' - \varphi_{F_1}' - \varphi_{F_2}'\}, \\ \quad = \frac{2\varepsilon^2}{a}\frac{1}{\pi}\sum\begin{Bmatrix}0\\4\\2\end{Bmatrix}\left\{2 - e^{\frac{\pi i}{2}\sum H_i} - e^{-\frac{\pi i}{2}\sum H_i}\right\} \\ \qquad\qquad \cdot\frac{e^{-\frac{1}{4}\sum H_i^2}}{\frac{1}{4}\sum H_i^2} - \frac{\varepsilon^2}{a}48\sqrt{\pi}\,. \end{cases}$$

Der aus den beiden ersten Faktoren zusammengesetzte Strukturfaktor hat folgende Werte:

$$(44')\quad \mathfrak{S} = \begin{Bmatrix}0\\4\\2\end{Bmatrix}\left\{2 - 2\cos\frac{\pi}{2}\sum H_i\right\} = \begin{cases}0\\16\\4\end{cases} \text{wenn } \sum H_i \equiv \begin{matrix}0\\2\\\pm 1\end{matrix} \pmod 4.$$

Nach dieser Formel erfolgt die *numerische Berechnung* (vgl. Tabelle auf folgender Seite):

Der numerische Faktor steht in guter Übereinstimmung (1 Proz.) mit dem von Frl. Bormann berechneten: 46,93.

Das Beispiel des Flußspatgitters zeigt besser als das des besonders einfachen Steinsalzgitters wie die Methode bei Kristallen mit verwickelter Struktur anzuwenden ist. Man behält die allgemeinen Formeln möglichst lange bei, indem man sie auf den besonderen Fall bezieht und gestaltet dadurch die numerische Rechnung kurz und gedrungen. Es scheint mir gegenüber der Madelungschen Methode ein Vorzug zu sein, daß die Ermittlung der einzelnen Geraden- und Ebenenlagen und -abstände fortfällt. Notwendig ist nur die Kenntnis des kleinsten vorkommenden *Atom*abstandes, um danach die Tren-

H_i	$\sum H_i^2$	$\frac{1}{4}\sum H_i^2$	S-Anzahl	e^- Argum.	e^- Arg. S-Anzahl / Argum.
002	4	1	16·6	0,36788	35,317
004	16	4	0		
006	36	9	16·(6+24)	0,000123	0,007
022	8	2	0		
024	20	5	16·24	0,006738	0,517
026	40	10	0		
044	32	8	0		
222	12	3	16·8	0,049787	2,125
224	24	6	0		
226	44	11	16·24		
244	36				
444	48	12	0		37,966
111	3	0,75	4·8	0,47237	20,154
113	11	2,75	4·24	0,063928	2,234
115	27	6,75	4·(24+8)	0,001171	0,022
133	19	4,75	4·24	0,008652	0,175
135	35	8,75	4·48	0,000158	0,003
155	51	—			
333	27				
355	43	10,75	4·24	—	22,588

$$4A = \frac{e^2}{a}\left\{\frac{2}{\pi}(37{,}966 + 22{,}588) - 48\sqrt{\pi}\right\} = \frac{e^2}{a}\left\{38{,}55 - 85{,}08\right\}$$
$$= -\frac{e^2}{a}\cdot 46{,}53.$$

nungsstelle bemessen zu können. Im übrigen werden nur die Koordinaten der Basisgruppe selbst benutzt, also unmittelbar gegebene Größen. Drücken sich die Atomabstände der Basisgruppe rational durch die Gitterkanten aus, so nimmt der Strukturfaktor eine beschränkte Reihe einfacher Werte an, wie in den beiden obigen Beispielen. Ob bei irrationaler Anlage der Basisgruppe die Schwierigkeiten bei meiner oder der Madelungschen Methode geringer sind, kann nur der weitere Gebrauch der Methode lehren.

Anhang.

Berechnung des Integrals (27) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{(0)}^{E} e^{-K^2s^2+\frac{K^2}{4s^2}}\,ds$.

Unter E sei eine reelle Trennungsstelle, unter K gemäß der Konvergenzbetrachtung in III, 1 eine komplexe Größe verstanden, die in der

komplexen Ebene den Winkel φ mit der reellen Achse einschließt. Der Integrationsweg ist der in Fig. 1 beschriebene. Der Wert des $\int_{(0)}^{\infty}$ ist bekannt, wir berechnen statt (27) lieber

$$\text{(I)} \qquad J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E}^{\infty} e^{-R^2 s^2 + \frac{K^2}{4 s^2}} \, ds \,,$$

wobei die Integration auf der reellen Achse zu führen ist. Indem wir die Variable

$$\eta = R s + i \frac{K}{2 s} \,, \qquad s = \frac{\eta}{2R} \pm \sqrt{\frac{\eta^2}{4R^2} - \frac{iK}{2R}} \,,$$

$$ds = \frac{1}{2R} \left(1 \pm \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 2iKR}} \right) d\eta$$

einführen, wird

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{iKR} \int_{E}^{\infty} e^{-\left(Rs + \frac{iK}{2s}\right)^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{iKR}}{R} \int_{\left(RE + \frac{iK}{2E}\right)}^{\infty} e^{-\eta^2} \left(d\eta \pm \frac{\eta \, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 2iKR}} \right) .$$

Wir führen das Gaussche Fehlerintegral ein:

$$\int_{0}^{x} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(x) = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - .. \right), \quad \Phi_{(\infty)} = 1 \,,$$

bemerken, daß die zweite Integration der vorigen Gleichung sich auch darauf reduziert, indem gesetzt wird:

$$\eta^2 - 2iKR = \zeta^2 \,,$$

wobei die Grenzen werden

$$\zeta = \pm \left\{ \left(RE - \frac{iK}{2E} \right)^{\infty} \right.$$

und erhalten

$$\text{(II)} \quad J = \frac{e^{iKR}}{2R} \left\{ 1 - \Phi\left(RE + \frac{iK}{2E} \right) \right\} \pm \frac{e^{-iKR}}{2R} \left\{ 1 - \Phi\left(RE - \frac{iK}{2E} \right) \right\} .$$

Hierbei wurde für beide Grenzen von ζ das Vorzeichen + gewählt, was wegen des $\pm$ vor dem Integral keine Beschränkung bedeutet.

Um das Vorzeichen zu bestimmen, vergleichen wir die Entwicklungen von (I) und (II) für kleines K. Nach der ersteren ist

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E}^{\infty} e^{-R^2 s^2} \left(1 + \frac{K^2}{4 s^2} + .. \right) ds = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \Phi(RE) \right\}$$

$$+ \frac{K^2}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-R^2 E^2}}{E} - \sqrt{\pi} \, R \left(1 - \Phi(RE) \right) \right\}$$

da nämlich

$$\int_E^\infty e^{-R^2 s^2} \frac{ds}{s^2} = \left[-\frac{1}{s} e^{-R^2 s^2} \right]_E^\infty - 2R^2 \int_E^\infty e^{-R^2 s^2} ds$$

$$= \frac{e^{R^2 E^2}}{E} - \sqrt{\pi} R \left(1 - \Phi(RE)\right)$$

ist.

Bei der Entwicklung von (II) ist zu beachten, daß nach Taylor gilt

$$\Phi\left(RE + \frac{iK}{2E}\right) = \Phi(RE) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-R^2 E^2} \frac{iK}{2E}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 2RE \cdot e^{-R^2 E^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{iK}{2E}\right)^2 + \ldots$$

Also wird aus (II)

$$J = \frac{1}{2R} \left[e^{iKR} \left\{ 1 - \Phi(RE) - \frac{iK}{\sqrt{\pi} E} e^{-R^2 E^2} - \frac{K^2 R}{2\sqrt{\pi} E} e^{-R^2 E^2} + \ldots \right\} \right.$$

$$\left. \pm e^{-iKR} \left\{ \ldots \right\} \right].$$

Das Glied mit dem unbestimmten Vorzeichen ist eine Wiederholung des ersten nach Abänderung von $+K$ in $-K$. Indem wir noch e^{iKR} nach K entwickelt denken, suchen wir die von K freien Glieder heraus:

$$\frac{1}{2R} \left[1 - \Phi(RE) \pm \left(1 - \Phi(RE)\right) \right]$$

und bestimmen danach das Vorzeichen zu $+$.

Es ist demnach

$$\text{(III)} \quad J = \frac{\cos KR}{R} - \frac{1}{2R} \left\{ e^{iKR} \Phi\left(RE + \frac{iK}{2E}\right) + e^{-iKR} \Phi\left(RE - \frac{iK}{2E}\right) \right\}$$

und das gesuchte Integral (27)

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^{E} e^{-R^2 s^2 + \frac{K^2}{4s^2}} ds = i \frac{\sin KR}{R} + \frac{1}{2R} \left\{ e^{iKR} \Phi\left(RE + \frac{iK}{2E}\right) \right.\right.$$

$$\left.\left. + e^{-iKR} \Phi\left(RE - \frac{iK}{2E}\right) \right\} \right.$$

Zusammenfassung.

Optische (elektrodynamische) und elektrostatische Potentiale für Kristallgitter sind zunächst gegeben als Summen von Einzelpotentialen, z. B. $\sum_{P'} \frac{\varepsilon_{P'}}{R_{PP'}}$ ($\varepsilon_{P'}$ Ladung, $R_{PP'}$ Abstand des Gitterpunktes P' vom Aufpunkt P) (I). Man kann durch eine Integraldarstellung des Einzelpotentials (III, 2) $R_{PP'}^2$ in den Exponenten einer e-Funktion bringen und erhält durch Ausführung der Summe eine ϑ-Funktion von drei Variablen als

Integranden (III, 2). Für diese wird die Transformationsformel aufgestellt (II). Durch Anwendung der Transformation auf den Integranden gelangt man von der „d'Alembertschen" zur „Fourierschen" Darstellung des Potentials (III, 2), wenn auf dem ganzen Integrationsweg die transformierte ϑ-Funktion benutzt wird. Für die Konvergenz der Reihen ist es vorteilhaft, auf einem Teil des Integrationsweges die eine, auf dem andern Teil die andere Darstellung der ϑ-Funktion zu verwenden, unter Einführung einer Trennungsstelle E (bzw. dimensionslos η) (III, 2; IV, 1). Es wird ein allgemeiner gut konvergierender Ausdruck der elektrodynamischen Potentiale aufgestellt, der sich zur numerischen Rechnung eignet.

Spezialisierung dieses Ausdrucks auf elektrostatische Potentiale (IV, 1), ihre allgemeine Form. Beispielsweise Berechnung der Gitterenergie infolge der Coulombschen Kräfte zwischen den Ionen (Madelungsche Konstante) bei Steinsalz und Flußspat (IV, 2 u. 3).

München, Institut f. theor. Physik, August 1920.

(Eingegangen 7. August 1920.)

4. *Über die Ionisierungsarbeiten und die Dissoziationsarbeit des Wasserstoffs;* *von Thea Krüger.*

(Auszug aus der Dissertation.)

Die Bohrschen[1]) Überlegungen haben zur Aufstellung eines Atommodells geführt, das neben anderen Leistungen einen Zusammenhang zwischen der Energieübertragung durch stoßende Elektronen und den optischen Serien gibt. Das Atom besteht nach dieser Theorie aus einem positiven Kern, um den Elektronen kreisen. Wenn nun ein fremdes Elektron auf ein Atom mit einer solchen Geschwindigkeit stößt, daß seine Energie den Betrag $h\nu$ besitzt, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum und ν die Frequenz irgendeiner Absorptionsserienlinie bedeutet, so kann ein kreisendes Elektron auf eine andere Quantenbahn gehoben werden. Auf dieser Bahn bleibt es nicht dauernd, sondern fällt auf die stabile Bahn, d. h. die Ruhebahn zurück und strahlt die dabei freiwerdende Energie in Form von Licht der Frequenz ν aus. Findet dieser Sprung von der Ruhebahn auf die erste mögliche Bahn statt, so wird beim Zurückfallen die langwelligste Linie der Hauptserie angeregt, das sogenannte Resonanzlicht. Die Spannung, die ein Elektron frei durchlaufen haben muß, um diese Strahlung anzuregen, ist als Resonanzpotential bekannt. Wird an das Atom die Energie $h\nu_\infty$ übertragen, wobei ν_∞ der kurzwelligen Grenzfrequenz der Absorptionsserie entspricht, so wird das Elektron ins Unendliche gehoben. Findet dieser Vorgang im elektrischen Felde statt, so wird dies Elektron sich nicht wieder mit dem Restatom vereinigen, und das Atom wird ionisiert. Die Energie $h\nu_\infty$ ist gleich der Ionisierungsspannung. Die der Absorptionsserie einatomiger Gase entsprechende Serie

1) N. Bohr, Phil. Mag. (1) **26**. S. 476. 857. 1913; **27**. S. 506. 1914; **30**. S. 394. 1915; **29**. S. 332. 1915.

des Wasserstoffs ist die Lymanserie. Das Resonanzpotential, welches das langwelligste Glied dieser Serie anzuregen vermag, beträgt nach der Bohrschen Theorie 10,1 Volt, während die Ionisierungsspannung des Atoms 13,5 Volt beträgt.

Das Molekül des Wasserstoffs besteht nach Bohr-Debye aus zwei positiven Kernen, um deren Verbindungslinie als Achse die beiden Elektronen auf einer gemeinschaftlichen Quantenbahn kreisen. Wenn ein Elektron entfernt wird, so ist der Rest nach der Theorie instabil. Positive Molekülionen sind danach nicht möglich, es müßte vielmehr sofort ein weiterer Zerfall in ein Atom und ein positives Atomion stattfinden. Bei der Abtrennung eines Elektrons von einem Wasserstoffmolekül würde also nicht nur die Ionisierungsarbeit, sondern auch die Dissoziationsarbeit geleistet werden müssen. Diese berechnet sich nach Bohr zu 60000 cal entsprechend 2,6 Volt. Trotz großer Leistungen dieses Modells scheint es mit der Erfahrung nicht in Übereinstimmung zu bringen zu sein, denn Thomson[1]) hat bei Kanalstrahlen positive Molekülionen beobachtet, und ferner stimmt der berechnete Wert für die Dissoziationsarbeit durchaus nicht mit dem für diese Größe gemessenen überein, wie sich aus nachstehender Tab. 1 ergibt.

Tabelle 1.

Dissoziationsarbeit in Wasserstoff pro g Molekül.

Verfasser	Wert in g-cal	Wert in Volt
Bohr	60 000	2,6
J. Langmuir[2])	84 000	3,6
T. Isnardi[3])	95 000	4,1
F. Herzfeld[4])	103 000	4,5

Nernst[5]) pflegt in seinen Berechnungen 100000 g-cal = 4,3 Volt als den wahrscheinlichsten Wert zu benutzen.

Schließlich ist H_3 nach dem Modell paramagnetisch, während er in Wirklichkeit diamagnetisch gefunden wird.

1) S. S. Thomson, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 8. S. 226. 1911.
2) J. Langmuir, Zeitschr. f. Elektroch. 23. S. 217. 1917.
3) T. Isnardi, Zeitschr. f. Elektroch. 21. S. 404. 1915.
4) F. Herzfeld, Ann. d. Phys. 59. S. 635. 1919.
5) W. Nernst, Grundlagen d. Wärmesatzes 1918.

Bisher sind eine Reihe Untersuchungen[1]) über die Ionisierung und Anregung von Resonanzlicht durch stoßende Elektronen in Wasserstoff gemacht worden, aber teils gestatten sie nicht zwischen Effekten, die durch Resonanzlicht und solchen, die durch Ionisation hervorgerufen sind, zu entscheiden, teils berücksichtigen sie bei der Deutung der Resultate nicht, daß die Elektronen Moleküle und nicht Atome treffen. Unter diesen Umständen schien es wünschenswert, den Wasserstoff nochmals zu untersuchen, und das geschah mit Hilfe einer Anordnung, die sich neuerdings bei derartigen Untersuchungen am besten bewährt hat.

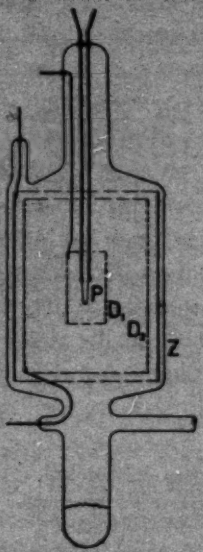


Fig. 1.

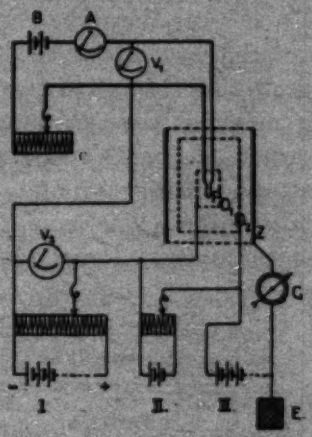


Fig. 2.

Den Versuchsapparat zeigt Fig. 1. In einem Glasgefäß befindet sich in der Achse als Elektronenquelle ein Glühdraht P aus Wolframdraht, der konaxial von zwei Platindrahtnetzzylindern D_1 D_2 und zuäußerst von einem Platinblechzylinder Z umgeben ist. Nach unten mündete das Gefäß in ein Rohr, das, mit flüssiger Luft gekühlt, zur Kondensation von Quecksilberdampf diente. Dieses Versuchsrohr stand ferner mit einem Mac Leodschen Manometer, einem Palladiumrohr zum Einlassen von Wasserstoff und einer Dampfstrahlpumpe nach

1) Lit. vgl. bei J. Franck u. G. Hertz, Phys. Zeitschr. 20. S. 132. 1919.

Vollmer und einem Glasgefäß mit Helium in Verbindung. Das Helium wurde durch vorher ausgeglühte, in flüssiger Luft befindliche Kohle zu jedem Versuch eigens gereinigt.

In Fig. 2 stellt $P\ D_1\ D_2\ Z$ die Metallteile des eben geschilderten Versuchsapparates dar und zeigt weiter die Schaltung der Versuchsanordnung. Oben ist der Heizstrom für den Glühdraht zu sehen, bestehend aus der Batterie B, einem Schiebewiderstand, dem Amperemeter A und dem Voltmeter v_1. Unten sind drei Batterien I, II, III gezeichnet, die die Spannungen zum Beschleunigen oder Verzögern der Elektronen im Versuchsrohr liefern. I ist eine Batterie von 30—40 Volt, die durch einen Widerstand von 7000 Ohm geschlossen war. Der Glühdraht ist mit dem negativen Pol der Batterie verbunden, der Zylinder D_1 mit dem Schieber des Widerstandes, so daß die Spannung zwischen $P\,D_1$, die am Voltmeter v_2 gemessen wurde, in kleinen Beträgen veränderlich ist. Batterie II legt mittels des Schiebewiderstandes eine Spannung zwischen D_1 und D_2. Zwischen D_2 und Z befand sich die dritte Batterie III. Ein Pol dieser Batterie lag an Erde, während alle anderen Batterien und Instrumente isoliert standen. Der Zylinder Z war durch das Galvanometer geerdet. Es wurden nach Bedarf zwei Galvanometer von 10^{-9} und $5 \cdot 10^{-11}$ verwendet. Die Abstände zwischen den Metallteilen des Versuchsgefäßes waren so gewählt, daß bei den hier zur Anwendung gelangten Drucken die Entfernungen $P\,D_1$ und $D_2\,Z$ kleiner oder gleich groß waren, als eine freie Elektronenweglänge, während die Entfernung $D_1\ D_2$ stets mehrere freie Elektronenweglängen betrug.

Es wurden im wesentlichen zwei Schaltungen angewendet, welche J. Franck und P. Knipping[1]) bei ihren Untersuchungen an Helium angewandt haben. Die Schaltungen haben das variierbare, die vom Glühdraht ausgesandten Elektronen beschleunigende Feld zwischen $P\ D_1$ gemeinschaftlich.

Bei der ersten Methode betrug das Feld zwischen $D_1\ D_2$ 0,2—0,8 Volt und war so gerichtet, daß D_1 positiv, D_2 negativ war. Ein zweites starkes Feld lag zwischen D_2 und Z so, daß das Potential von Z negativ gegen das von D_2 war. Die

1) J. Franck und P. Knipping, Phys. Zeitschr. 20. S. 48. 1919.

Wirkungsweise ist folgende: Die Elektronen werden mit einer Geschwindigkeit, die der zwischen $P\ D_1$ angelegten Spannung entspricht, in den Raum $D_1\ D_2$ treten und dort überall mit den Molekülen Zusammenstöße erleiden. In den Raum $D_2\ Z$ werden sie zwar eindringen, aber den Zylinder Z nicht erreichen, solange die sie beschleunigende Spannung kleiner ist als die Summe der beiden Gegenfelder zwischen $D_1\ D_2$ und $D_2\ Z$. Werden in dem Raum $D_1\ D_2$ positive Ionen bei Ionisation des Gases durch eindringende Elektronen erzeugt, so werden die positiven Ionen nach D_2 und weiter durch das starke Feld auf den Zylinder Z gezogen. Das Galvanometer wird dann einen positiven Strom anzeigen, der mit wachsender Spannung ansteigt, und dieser Anstieg wird sich bei jeder neuen Ionisationsstufe verstärken, wenn man die beschleunigende Voltzahl als Abszisse, die Galvanometerausschläge als Ordinate aufträgt. Wird durch die Elektronenstöße Resonanzlicht angeregt, so werden die an den Netzen lichtelektrisch ausgelösten Elektronen durch das Gegenfeld gehindert, den Zylinder zu erreichen, aber die am Zylinder durch das ultraviolette Licht ausgelösten Elektronen werden durch das starke Feld sofort entfernt, und dieser wird sich positiv aufladen. Es wird ebenfalls ein verstärkter Anstieg in der Stromspannungskurve genau wie bei jeder Ionisationsstufe auftreten mit dem einzigen Unterschied, daß der durch Licht bewirkte Stromstieg sehr viel schwächer ist als der durch Ionisation hervorgerufene. Denn bei der Ionisation erzeugt jeder wirksame Stoß ein Ionenpaar, während das Licht, das ein einziges erregtes Atom ausstrahlt, nur zum Teil vom Zylinder absorbiert wird und ein Elektron auslöst. Bei dieser Schaltung werden Kurven, wie sie in Fig. 3—5 zu sehen sind, erhalten.

Hierbei sind die Spannungsangaben indessen mit Fehlern behaftet, welche von der Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus dem Glühdraht, dem Spannungsabfall an diesem und etwaigen Kontaktpotentiale an den Drahtnetzen herrühren. Um diese Fehler zu eliminieren, dienen zwei Verfahren. Das erste besteht darin, daß man dem Wasserstoff ein Gas (Helium) zumischt, dessen Resonanz- bzw. Ionisierungsspannung genau bekannt ist. Alsdann treten in den Kurven neben den Wasserstoffknicken die Knicke des zweiten Gases auf, diese dienen

zur Eichung der Voltskala. So entstehen z. B. in Kurve 48 (Fig. 3) die Knicke bei 15,6 und 19,1 Volt. Der zweite Wert entspricht der Resonanzspannung des Heliums, die zuerst von Franck und Hertz gemessen, durch die Untersuchungen von J. Franck und P. Knipping einerseits, Franck-Horton und Ann. Davis[1]) andererseits sehr genau auf 20,5 Volt gelegt ist. Die abgelesene Spannung ist also um 20,5 — 19,1 = 1,4 Volt zu klein und der bei 15,6 Volt abgelesene Wert liegt korrigiert bei 17,0 Volt.

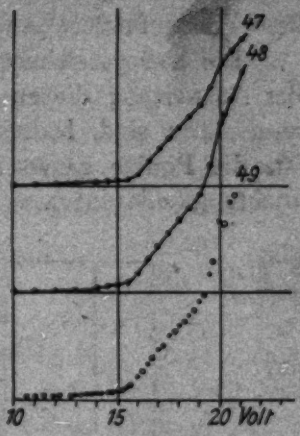


Fig. 3.

Die zweite Methode zur Bestimmung der wahren Spannungswerte besteht darin, daß man die Spannung bestimmt, gegen welche die vom Glühdraht ausgesandten Elektronen anlaufen können. Man wählt zu diesem Zweck das Feld zwischen D_2 und Z um einige Volt höher als die Spannung, bei welcher ein zu untersuchender Knick in der Kurve auftritt. Die vom Glühdraht ausgesandten Elektronen werden dann so lange nicht auf den Zylinder gelangen können, als ihre Geschwindigkeit kleiner ist, als die Summe der beiden verzögernden Spannungen zwischen D_1 D_2 und D_2 Z. Erst im Augenblick, wo beide gleich sind, wird dies eintreffen. Der durch positive Aufladung des Zylinders bewirkte Anstieg wird unterbrochen. Natürlich ist diese Methode nur bei solchen Drucken anwendbar, bei denen wenigstens einige der vom Glühdraht emittierten Elektronen die Strecke zwischen Glühdraht und Zylinder ohne Zusammenstoß mit Molekülen durchfliegen. In Fig. 4 sind zwei solcher Kurven zu sehen. Bei der linken Kurve findet ein Anstieg bei 16,5 Volt statt und eine Umkehr bei 19,5 Volt (über die Art der Ablesung bei den Knickpunkten wird unten ausführlich zu reden sein). Da das gesamte verzögernde Feld 20,0 Volt betrug, ist die am Voltmeter abgelesene beschleunigende Spannung um 0,5 Volt zu klein. So kommt der Wert

1) T. Horton u. Ann. Davis, Proc. Roy. Soc. 95. S. 408. 1919.

bei 16,5 auf 17,0 Volt. Die rechte Kurve zeigt einen Anstieg in der Gegend von 28,8 Volt. Das verzögernde Feld betrug 37,2 Volt, wurde aber bei 36,0 Volt abgelesen. Also ist die abgelesene Beschleunigung um 1,2 Volt zu klein und der bei 28,8 Volt gefundene Anstieg der Kurve liegt bei 30,0 Volt.

Die hier gezeichneten Kurven, die zur Veranschaulichung der Auswertung dienen und aus einem sehr großen Material entnommen sind, lassen erkennen, daß es nicht ganz einfach ist, die Punkte genau zu bestimmen, bei denen wesentliche Richtungsänderungen stattfinden. Die nachfolgende Betrachtung

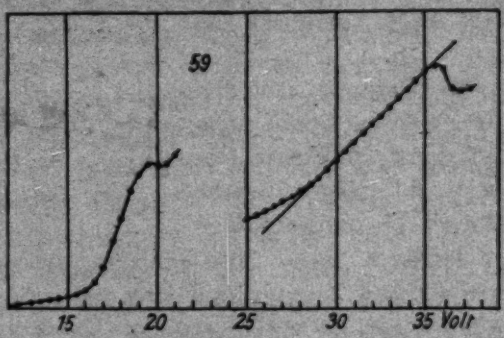


Fig. 4.

wird hierüber Klarheit schaffen und ein Mittel an die Hand geben, jene Punkte genau und einwandfrei festzulegen. Wie man sieht, ergibt sich meist kein scharfer Knick, sondern er ist etwas abgerundet, so daß das vor dem Knick liegende geradlinige Stück der Kurve durch einen manchmal über 1—2 Volt sich erstreckendes bogenförmiges Stück mit dem hinter dem Knick liegenden geradlinigen Stück der Kurve verbunden ist. Die Elektronen haben, wie bereits gesagt, keine einheitliche Geschwindigkeit, sondern diese zeigt eine Verteilung, die einmal von der verschiedenen Austrittsgeschwindigkeit weiter vom Spannungsabfall im Glühdraht herrührt. Diese Geschwindigkeitsverteilung bedingt, daß kein scharfer Knick in der Kurve entsteht, sondern daß der Anstieg (Abfall) durch ein bogenförmiges Stück eingeleitet ist. Man wird daher den gesuchten Punkt als den Schnittpunkt der Tangenten ermitteln, die man als Verlängerung der im wesentlichen geradlinigen Teile der

Kurve vor und nach dem bogenförmigen Stück an dieses legen kann. Daß bei 30 Volt dieses bogenförmige Zwischenstück nicht so deutlich zu sehen ist, liegt daran, daß hier die Richtungsänderung überhaupt viel geringer ist. Umgekehrt ist das bogenförmige Stück bei Umkehrpunkten besonders ausgeprägt. (Fig. 4 rechts, wo eine Tangente auch eingezeichnet ist.)

Ein Punkt verdient besondere Erwähnung. Es wäre nicht ausgeschlossen, daß sich Kontaktpotentiale während der Messung geändert haben könnten. Daß dies nicht der Fall ist, sieht man an Kurve 49, Fig. 3, in der die ausgefüllten Punkte bei

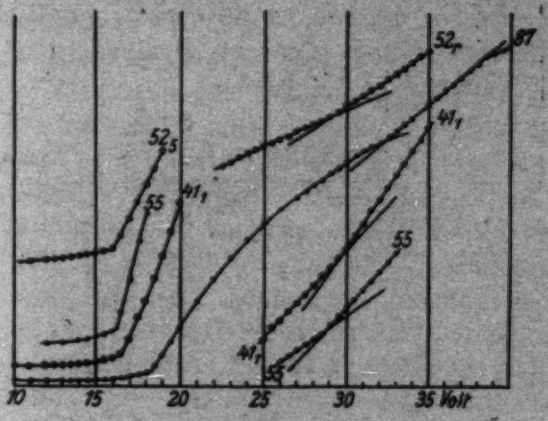


Fig. 5.

der Messung von kleinen zu großen Geschwindigkeiten, die Kreise beim Rückgang bestimmt sind.

Während Fig. 3 eine Anzahl von Werten (korrigiert mit Hilfe der ersten Methode) in der Gegend von 17 Volt, Fig. 4, einen Wert in der Gegend von 17 und 30 Volt (korrigiert nach der zweiten Methode) zeigt, sind in Fig. 5 eine Anzahl von Werten bei 17 und 30 Volt dargestellt. Sie dienen zur Bestimmung des bei 30 Volt liegenden Wertes, nach dem der bei 17 Volt liegende Wert durch frühere Messungen auf $17{,}1 \pm 0{,}25$ Volt festgelegt ist.

Abgesehen von diesen beiden ausgezeichneten Punkten wurde festgestellt, daß sich bereits in der Gegend von 11 bis 12 Volt ein ganz kleiner Galvanometerausschlag in Überein-

stimmung mit den früheren Untersuchungen, ferner die Andeutung eines Knickes zwischen 13 und 14 Volt ergaben. Letztere durften mit dem von Bergen-Davis und Goucher[1]) gefundenen Wert von 13,6 Volt zu identifizieren sein. Die nachstehende Tab. 2 gibt eine Übersicht über die erhaltenen Werte, wobei zu bemerken ist, daß nur einwandfreie Kurven berücksichtigt worden sind, d. h. solche, bei denen sich die Lage der Knickpunkte deutlich aus den Kurven entnehmen ließ. In Spalte 2 ist das Gewicht der Messung angegeben, Spalte 3 und 4 weisen den bereits korrigierten 17 bzw. 30 Volt-Wert nach, während Spalte 5 die Methode angibt, nach welcher die Spannungskorrektur ausgeführt wurde. Eine Mittelwertsbildung über die Spalten 3 und 4 liefert $17{,}1 \pm 2{,}5$ Volt und $30{,}4 \pm 0{,}5$ Volt.

Tabelle 2.

Nr.	Gewicht	Werte bei 17 Volt	Werte bei 30 Volt	Korrigiert nach Methode
36	1		30,35	1
38	1/2		30,0	1
40	1	17,0		1
41 I	1		30,2	1
42	1	17,0		1
43	1	17,1		1
44	1	17,1		1
46 I	1	17,0		1
47	1	17,2		1
48	1	17,0		1
49	1	16,9		1
51 II	1		30,6	1
52	1		30.1	1
55	1		29,7	1
57	1/2		31,0	2
59 I	1	17,1		2
59 II	1		30,0	2
60	1	17,1		2
87 I	1		30,8	1 u. 2
80	1		31,1	1 u. 2

Die Stärke der Anstiege bei 17,1 Volt und 30,4 Volt lassen dort Ionisation vermuten, jedoch mußte dies bestätigt und auch bei den Werten um 11 und 13 Volt festgestellt

1) Bergen-Davis und Goucher, Phys. Rev. 10. S. 84. 1917.

werden, ob sie durch Ionisation oder durch Lichterregung hervorgerufen seien. Hierzu wurde die von Bergen-Devis und Goucher angegebene Methode verwandt. Die ganze Apparatur blieb dieselbe, nur daß das zwischen D_1 und D_2 liegende Feld eine Größe von 36 Volt hatte und so gerichtet war, daß D_2 negativ gegenüber D_1 wurde, während das zwischen D_2 und Z liegende Feld von 10 Volt Z ein positives Potential gegenüber D_2 gab. Die Spannung zwischen Glühdraht und D_1 wurde in Stufen von ganzen oder halben Volt verändert. Erzeugen jetzt die primären Elektronen in dem Raum zwischen D_1 D_2 Ionen, so werden diese nach D_2 hingezogen. Durchfliegen sie dabei eine Spannung von 10 Volt ohne Zusammenstöße mit Molekülen, so werden sie gegen das Feld zwischen D_1 Z anlaufen können und auf den Zylinder gelangen. Das mit diesem verbundene Galvanometer wird einen Ausschlag zeigen, der positiver Aufladung entspricht. Regen die stoßenden Elektronen Resonanzlicht an, so werden dadurch Elektronen an D_2 ausgelöst. Diese werden zum Teil durch das Feld sofort nach Z gezogen. Das Galvanometer zeigt einen Ausschlag, der negativer Aufladung entspricht. Man wird also zwischen Aufladung, die durch Ionisation und solcher, die durch Resonanzlicht hervorgerufen ist, unterscheiden können. Bei den Versuchen zeigt sich, daß die Werte bei 17 und 30 Volt durch Ionisation hervorgerufen sind, und ferner ergibt sich, daß unter verschiedenen Bedingungen stets etwas wechselnde Resultate erhalten wurden, so daß diese Kurven nicht zur zahlenmäßigen Auswertung gebraucht werden konnten. Von Interesse ist es, daß sich bei 11 Volt eine schwache Ionisation und zwischen 13 und 14 Volt eine Lichterregung aus den Kurven entnehmen läßt, was mit den Resultaten von Bergen-Davis und Goucher in Übereinstimmung steht. In Fig. 6 sind drei Beispiele solcher Kurven gegeben. Werte oberhalb der Achse zeigen positive Ausschläge des Galvanometers, die einer Ionisation entsprechen, an, Werte unterhalb der Achse Lichterregung. Kurve 1 ist bei einem Druck von 0,025 mm Quecksilber gemessen und zeigt bei 11 Volt eine schwache Ionisation. Bei der zweiten Kurve herrscht ein Druck von 0,04 mm Quecksilber. Dabei ist der positive Ausschlag 11 Volt erheblich kleiner geworden,

bei 13 Volt beginnt ein Absinken der Kurve zu negativen Werten entsprechend einer Lichterregung, bei 15 Volt setzt wieder ein starker Anstieg zu positiven Werten ein. Kurve 3,

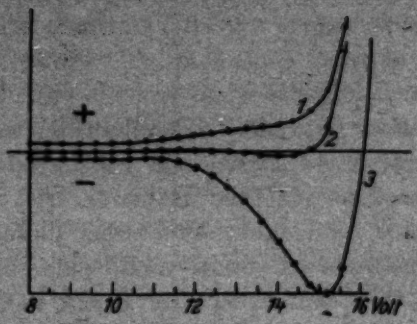


Fig. 6.

die bei 0,08 mm Quecksilber gemessen ist, zeigt kaum noch die erste Ionisation. Der Abfall zu negativen Werten beginnt schon bei 11 Volt, um bei 13 Volt stärker zu werden. Die starke Ionisation macht sich bereits wieder bei 15 Volt bemerkbar. Man sieht aus den Kurven, daß die Ionisation bei 11 Volt mit wachsendem Druck kleiner wird, um schließlich ganz zu verschwinden, während die Hauptionisierungsstufe diese starke Druckabhängigkeit nicht zeigt. Da ein Druckeinfluß nur in der Verkürzung der freien Weglänge der positiven Ionen seinen Grund haben kann, die bei Zusammenstößen soviel an Energie verlieren, daß sie nicht mehr gegen das zwischen D_2 und Z gelegene Gegenfeld anlaufen können, so sieht man, daß bei 11 Volt Ionen gebildet werden, deren mittlere freie Weglänge wesentlich kleiner ist als die Weglänge der bei höherer Spannung gebildeten Ionen. Auffällig ist ferner, daß, selbst wenn man die geringere Genauigkeit in Betracht zieht, mit der sich in diesen Kurven die Knickpunkte bestimmen lassen, die starke Ionisation bei merkwürdig niedrigen Drucken einsetzt. Sie sollte nach obigem bei 17 Volt liegen und findet sich schon bei Werten bis zu 15 Volt herab. Bergen-Davis und Goucher haben nach diesem Verfahren die Ionisierungsspannung bestimmt und geben 15,8 Volt als Wert für diese an. Letzterer deckt sich bei Zulassung großer Schwankungen mit dem, der dieser Methode zu entnehmen ist,

steht aber im Widerspruch zu den oben gefundenen Resultaten, denen eine wesentlich größere Genauigkeit zuerteilt werden muß. Der Grund für diese Umstimmigkeit scheint in einem prinzipiellen Fehler der eben besprochenen Methode zu liegen, der es mit sich bringt, daß sie nur qualitative Unterscheidung zwischen Ionisation und Strahlung zuläßt, aber nicht zu einer scharfen Bestimmung der Ionisierungsspannung führt. In der Überlegung ist nämlich anscheinend übersehen worden, daß die bei etwa 13 Volt lichtelektrisch ausgelösten Elektronen nur zum Teil auf den Zylinder gezogen werden, zum andern Teil jedoch nach D_1 hin beschleunigt werden. Hierbei können sie durch das starke Feld zwischen D_1 und D_2 so große Geschwindigkeiten erreichen, daß sie ihrerseits H_2-Moleküle ionisieren können. Daher kann dann ein positiver Galvanometerstrom entstehen, ehe die Geschwindigkeit der Primärelektronen den zur Ionisation notwendigen Wert erreicht hat. Die Umkehr der Kurve wird in dem Augenblick einsetzen, wo die sekundäre Ionisation den lichtelektrischen Strom überwiegt; den Beginn einer lichtelektrischen Erregung durch Elektronenstoß vermag jedoch diese Methode mit genügender Genauigkeit anzuzeigen.

Faßt man die Ergebnisse aller in dieser Arbeit gemachten Messungen zusammen, so erhält man folgende Resultate:

Bei 11,5 Volt $\pm$ 0,7 findet sich schwache Ionisation und schwache ultraviolette Strahlung,

bei 13,6 $\pm$ 0,7 Volt starke Strahlung (Absolutwert nach Bergen-Davis und Goucher),

bei 17,1 $\pm$ 0,25 Volt erste starke Ionisation,

bei 30,4 $\pm$ 0,5 Volt zweite starke Ionisation.

Wenn man nun daran geht, die so erhaltenen Werte unter Zugrundelegung der Bohrschen Theorie zu deuten, so muß man sich fragen, welche Änderungen am Molekül durch Elektronenstöße vor sich gehen können. Besonders muß man beachten, daß eine Energieübertragung nie direkt an das Atom stattfinden kann, sondern daß die Elektronen auf Moleküle treffen, und Anregung von Elektronensprüngen am Atom also auch Ionisation oder Anregung von Resonanzlicht an

Atomen nur bei gleichzeitiger Dissoziation der Moleküle eintreten kann. Bei H_2 sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Sind Molekülionen möglich, so wird bei der dazu notwendigen Ionisierungsspannung ein Elektron aus dem Molekül entfernt werden und ein positives Molekülion entstehen.

2. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe von Resonanzpotential R und Dissoziationsarbeit D ist, so wird ein neutrales und ein erregtes Atom entstehen. Dies ist die kleinste Energie, bei der Lichtemission am Atom auftritt.

3. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe von Dissoziationsarbeit und Ionisierungsspannung I ist, so entsteht ein neutrales Atom und ein Atomion. Dies ist die kleinste Energie, bei der positive Wasserstoffatomionen auftreten können.

4. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe $I + R + D$ ist, so entsteht ein Ion und ein erregtes Atom.

5. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe $D + 2R$ ist, so entstehen zwei erregte Atome.

6. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe $D + 2I$ ist, so entstehen zwei Atomionen und zwei Elektronen. Hier tritt eine neue starke Ionisationsstufe auf.

Theoretisch müßten alle diese Möglichkeiten auftreten können. Jedoch werden nach den bei Helium und Quecksilber gemachten Erfahrungen, die unter 4. und 5. genannten Vorgänge sich nur bei Anwendung besonders empfindlicher Methoden nachweisen lassen.

Sieht man sich nun die durch die vorliegenden Versuche genau bestimmten Werte an, so findet man die erste starke Ionisation bei 17,1 Volt. Wird dieser Betrag mit der Summe von Ionisierungsarbeit und Dissoziierungsarbeit am Molekül identifiziert, so erhält man

$$17{,}1 \text{ Volt} = I + D.$$

Die zweite starke Ionisation findet sich bei 30,4 Volt, woraus in gleicher Weise folgt:

$$30{,}4 \text{ Volt} = 2I + D.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich für I 13,3 Volt $\pm$ 0,25 Volt. Da dieser Wert innerhalb der Fehlergrenze mit dem von

Bohr berechneten Wert für I von 13,5 Volt übereinstimmt, so wird man letzteren zur Bestimmung der Dissoziationsarbeit zugrunde legen. Führt man I in die beiden obigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$17{,}1 - 13{,}5 = 3{,}6 \text{ Volt} \quad \text{und}$$
$$30{,}4 - 27{,}0 = 3{,}4 \text{ Volt}.$$

Zur Mittelwertsbildung wird man den ersten entsprechend der genaueren Bestimmung des Wertes von 17,1 Volt das doppelte Gewicht gegenüber dem zweiten geben und findet so:

$$D = 3{,}53 \pm 0{,}3 \text{ Volt}$$

oder in Grammkalorien pro Grammmolekül

$$D = 81300 \text{ g-cal} \pm 5700 \text{ g-cal}.$$

Dieser Wert stimmt innerhalb der Beobachtungsfehler mit dem neuesten von Langmuir gefundenen überein, wie aus der Tab. 1 hervorgeht. Er ist daher nicht mit dem aus dem Bohr-Dedyeschen Molekülmodell berechneten Wert in Einklang.

Die bei 13,6 Volt gefundene Strahlung entspricht dann dem unter 2 geschilderten Vorgang. Setzt man für das Resonanzpotential den aus der ersten Absorptionsserienlinie berechneten Wert von 10,1 Volt ein, so ergibt sich für D:

$$D = 13{,}6 - 10{,}1 = 3{,}5 \text{ Volt}.$$

Dieser Wert stimmt mit dem oben gefundenen gut überein, doch wurde er zur Mittelwertsbildung nicht verwendet, weil eine genaue Bestimmung im Rahmen dieser Arbeit, wie oben ausgeführt, nicht vorgenommen wurde.

Es lag nahe, nachzuprüfen, ob bei Elektronen, die mit einer Energie von 3,5 Volt auf Moleküle stoßen, Energieverlust entsprechend einer Dissoziation in Atome stattfindet. Dies war nicht der Fall und ist nach theoretischen Überlegungen auch nicht zu erwarten. Die Masse der Elektronen, verglichen mit der des positiven Kernes ist nämlich so klein, daß nach dem Impulssatz beim Zusammenstoß nur ein kleiner Energiebetrag direkt an den Kern abgegeben werden kann. Die Energie wird also bei Zusammenstößen zwischen langsamen Elektronen und Molekülen nur durch Übertragung an ein Elektron des Molekülverbandes diesem zugeführt werden können. Daher wird die Dissoziation durch Elektronenstöße

nur bei gleichzeitiger Ionisation oder Erregung eines Atoms stattfinden können.

Es muß nun noch die schwache, bei 11 Volt auftretende Ionisation besprochen werden. Quecksilber kommt wegen der starken Kühlung mit flüssiger Luft wohl kaum in Frage. Es wurde daher dieser Wert versuchsweise der Ionisation des Wasserstoffmoleküls von H_3^+-Ionen zugeschrieben. Zu dieser Annahme gibt auch der vorher erwähnte aus der starken Druckabhängigkeit folgende große Ionendurchmesser Anlaß, denn ohne daß man auf nähere Vorstellungen über das Modell des H_3-Ions eingeht, ist es klar, daß diesem ein Radius zukommen muß, der groß ist, verglichen mit dem des bei 17,1 Volt sich bildenden H^+-Atomions, das ja nur aus einem positiven Kern besteht.

Es soll zum Schluß noch gezeigt werden, daß die hier gefundenen Werte der Ionisation in Wasserstoff zum mindesten keine Widersprüche mit den Werten ergeben, welche aus Untersuchungen über Gasentladung gewonnen sind.

Der Anodenfall, die Spannung zwischen Anode und anodischem Glimmlicht ist gedeutet worden als Potentialdifferenz, welche die Elektronen durchfallen haben müssen, um positive Ionen an der Anode frei zu machen. Da diese nach J. Stark hauptsächlich aus dem an der Anode okkludierten Gase stammen, so wird (abgesehen von Änderungen, die eben durch die Okklusion entstehen) eine Übereinstimmung von normalem Anodenfall und Ionisierungsspannung zu erwarten sein. Skinner[1]) hat eingehende Messungen des normalen Anodenfalles vorgenommen und in Wasserstoff als kleinsten Wert 17,3 Volt in Übereinstimmung mit den hier vorliegenden Messungen der Ionisierungsspannung gefunden.

Weiterhin hat man oft die Anschauung der Identität von Schichtpotentialdifferenz und Ionisierungsspannung vertreten. In einer neueren Arbeit findet Neubert[2]) in Übereinstimmung mit den hier gemachten Messungen Schichtpotentiale in Wasserstoff zwischen 11 und 31 Volt. Wenn auch Neubert andere Anschauungen über die verschiedenen Ionisierungsvorgänge

1) Skinner, Phil. Mag. 8. S. 337. 1904.
2) P. Neubert, Ann. d. Phys. 42. S. 1054. 1913. 53. S. 422. 1917.

vertritt, so hat er doch mit aller Deutlichkeit auf eine vermutliche Ionisierungsstufe des Wasserstoffs bei etwa 30 Volt hingewiesen.

Wesentlich schwieriger ist es, aus den in der Literatur angegebenen Beobachtungen über die Anregung der Spektren des Wasserstoffs einen Zusammenhang mit den hier vorliegenden Resultaten zu entnehmen. Beobachtungen hierüber liegen von J. Stark[1]) vor. Er findet bei spektographischen Aufnahmen an den positiven Schichten von der Kathode aus gerechnet, zuerst ein kontinuierliches Spektrum, dann die Linien der Balmerserie und unmittelbar darauf das Viellinienspektrum. Neubert fand in den roten Schichten ein starkes Viellinienspektrum ohne Angabe zu machen, ob dabei auch das Balmerspektrum auftritt. Bei den blauen Schichten niedriger Potentialdifferenz tritt nach ihm das kontinuierliche Spektrum schwach auf, das Balmerspektrum wird von einzelnen Linien des Viellinienspektrums noch überstrahlt. Bei den bekannten Gehrke-Seeligerschen[2]) Versuchen wurde die Balmerserie schnelleren, das Viellinienspektrum langsameren Elektronen zugeordnet, ohne daß Angaben über den absoluten Wert der Elektronengeschwindigkeit gemacht würden. Es liegt ferner eine Reihe von Versuchen vor, bei denen die Geschwindigkeit der das Leuchten anregenden Elektronen direkt gemessen wurde. Holtsmark[3]) findet das Auftreten der Balmerserie von 17 Volt Strahlen an und eine von der Geschwindigkeit der Elektronen unabhängige Intensitätsverteilung der Serienlinien. Fulcher[4]) findet die Balmerserie bei höheren Kathodenstrahlgeschwindigkeiten intensiver als das Viellinienspektrum. Schließlich sind noch Versuche von R. Holm und Thea Krüger[5]) zu nennen, bei denen die Elektronen zwischen verschiedenen Netzen, deren Potentialdifferenzen bekannt waren, gemessen wurden. Es ergab sich von 13 Volt ab das kontinuierliche Spektrum, von 18 Volt ab das kontinuierliche und Viellinienspektrum, von 27 Volt ab die Linie H_α der Balmer-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 52. S. 221. 1917.
2) E. Gehrke u. R. Seeliger, Verh. d. Phys. Ges. 10. S. 1023. 1912.
3) J. Holtsmark, Phys. Zeitschr. 15. S. 606. 1914.
4) G. S. Fulcher, Phys. Zeitschr. 15. II. S. 1046. 1912.
5) R. Holm u. Th. Krüger, Phys. Zeitschr. 20. II. S. 1. 1919.

serie und von 30 Volt ab die anderen Linien der Balmerserie. Faßt man die Resultate zusammen, so scheint, daß die meisten Autoren zu dem Resultate kommen, daß das Viellinienspektrum eine geringere Anregungsenergie als die Balmerserie braucht. Diese Tatsache ist wohl mit der allgemein vertretenen Deutung in Einklang, daß die komplizierteren Spektren wie das Viellinienspektrum und das sogenannte kontinuierliche Spektrum dem Wasserstoffmolekül zugeschrieben werden müssen, während die Serienspektren, entsprechend der Bohrschen Theorie, dem Atom zugehören.

Zusammenstellung der Resultate.

Die erste starke Ionisation in Wasserstoff findet bei $17{,}1 \pm 0{,}25$ Volt statt, die zweite bei $30{,}4 \pm 0{,}5$ Volt. Der erste Wert wird durch die Dissoziation des Moleküls und Ionisation eines Atoms erklärt, der zweite durch Dissoziation des Moleküls und Ionisation beider Atome. Auf Grund dieser Annahme wird die Dissoziationsarbeit aus diesen beiden Werten bestimmt. Sie ergibt sich zu $3{,}5 \pm 0{,}3$ Volt, entsprechend 81300 ± 5700 g-cal.

Die von anderer Seite bei 11 und 13,5 Volt gefundenen Werte wurden innerhalb einer Fehlergrenze von 0,7 Volt bestätigt. Bei 11 Volt wurde schwache Ionisation, bei 13,6 Volt Strahlung gefunden. Die Lichterregung bei 13,5 Volt wurde der Dissoziierung des Moleküls bei gleichzeitiger Resonanzstrahlung eines Atoms zugeschrieben, die Ionisation bei 11 Volt wurde versuchsweise als Bildungsenergie von Wasserstoffmolekülion angenommen.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Herrn Prof. J. Franck im Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem, ausgeführt. Ich bin Herrn Prof. Franck für weitgehende Hilfe bei den Untersuchungen und bei der Deutung der Resultate zu großem Danke verpflichtet.

(Eingegangen 12. August 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1921. № 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Die Wärmekapazität des Wassers zwischen 5° und 50° in internationalen Wattsekunden*[1]*;*

von W. Jaeger und H. v. Steinwehr.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Inhalt: A. *Einleitung und Vorversuche.* B. *Endgültige Versuche.* — I. *Prinzip der Methode* — II. *Apparatur.* a) Kalorimetergefäß. b) Rührwerk. c) Mantel. d) Pumpvorrichtung. e) Heizspule. f) Thermometer. — III. *Theorie und Ausführung der Messungen.* a) Bestimmung des Wassergewichts. b) Messung der elektrischen Leistung. c) Zeitmessung. d) Temperaturmessung. α) Theorie: Temperaturerhöhung, allgemeine Betrachtungen, Wärmeaustausch mit der Umgebung. β) Experimenteller Teil: Ausführung der Temperaturmessung, Konstanten der Thermometer *H* 23 und *E* 1 und Beispiel.

A. Einleitung und Vorversuche.

Die Wärmekapazität des Wassers in elektrischen Einheiten, sowie die relative spezifische Wärme des Wassers ist schon von verschiedenen Beobachtern gemessen worden.[2]) Doch haben diese Messungen sowohl hinsichtlich des Absolutwertes wie auch der Temperaturveränderlichkeit der Kapazität so abweichende Resultate ergeben, daß eine Neubestimmung und zwar innerhalb eines größeren Temperaturbereiches wünschenswert erschien. Die bisherigen Abweichungen der verschiedenen Messungen untereinander sind zweifellos zum Teil darauf zurückzuführen, daß sowohl die elektrischen Grundeinheiten wie auch die Temperaturskala nicht hinreichend sichergestellt waren. Aus diesem Grunde sind die früheren Beobachtungen mit einer erheblich größeren Ungenauigkeit behaftet, als den sonst meist sehr sorgfältigen und zuverlässigen Messungen an sich zukommen würde.

1) Im Auszug bereits veröffentlicht in den Berliner Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. 1915. S. 424; vgl. auch Verh. d. Deutschen Phys. Ges. 17. 1915. S. 362; sowie Ann. d. Phys. 58. S. 487. 1919.

2) Tabellen von Landolt-Börnstein, 4. Aufl. 1912. J. Springer, Berlin. S. 760.

Seit einigen Jahren sind aber sowohl die elektrischen Einheiten wie die Temperaturskala so sicher festgelegt, daß eine Bestimmung der Wärmekapazität des Wassers in diesen Einheiten auf einige Zehntausendstel möglich erschien. Zur Erreichung einer so großen Genauigkeit war es allerdings erforderlich, auch die kalorimetrischen Messungen selbst noch erheblich zu verbessern und zu verfeinern.

Die zur Messung der Wärmekapazität benutzte Methode ist im wesentlichen dieselbe, welche von uns früher zur Eichung eines Verbrennungskalorimeters für die Herren Fischer und Wrede angewandt worden ist.[1])

Die prinzipiell bekannte Methode besteht darin, daß eine gegebene Wassermenge mittels elektrischer Energie erwärmt und die Erwärmung mit Hilfe eines Platinthermometers gemessen wird.

Vorversuche: Eine zunächst ausgeführte, ziemlich umfangreiche Messungsserie, die später verworfen wurde und auf die deshalb nicht näher eingegangen werden soll, wies erhebliche Mängel auf, die bei der endgültig benutzten Einrichtung vermieden wurden. Als Kalorimeter diente bei den Vorversuchen ein oben offenes, zylindrisches Gefäß, in dem sich, ähnlich wie bei dem oben erwähnten Verbrennungskalorimeter, die Heizspule, der Rührer und das Platinthermometer befanden. Abgesehen davon, daß die benutzten Thermometer gewisse Mängel besaßen, die später durch Anwendung anderer Thermometer vermieden wurden, ergab sich aus diesen Vorversuchen die Notwendigkeit, ein allseitig geschlossenes Kalorimetergefäß zu benutzen und die sogenannte Außentemperatur genauer zu definieren. Bei einem offenen Gefäß bringt die Verdampfung des Wassers an der offenen Oberfläche, besonders bei höheren Temperaturen, erhebliche Fehler mit sich, die unbedingt vermieden werden müssen, wenn die angestrebte Genauigkeit von einigen Zehntausendsteln erreicht werden soll. Ferner war die

1) W. Jaeger und H. v. Steinwehr, Ann. d. Phys. 21. S. 23. 1906, wo auch frühere Literatur angegeben ist. Es handelte sich bei diesen Messungen darum, für Normalsubstanzen die Verbrennungswärme in elektrischen Einheiten zu bestimmen, um dann mittels dieser Normalsubstanzen andere Kalorimeter eichen zu können. Zu diesem Zweck mußte der Wasserwert eines Verbrennungskalorimeters nach Berthelot in elektrischen Einheiten gemessen werden.

Außentemperatur nur durch die umgebende Luft bedingt und ließ sich nicht beliebig einregulieren, was gleichfalls zur Erreichung der angestrebten Genauigkeit notwendig ist. Diese Erwägungen führten zu der in folgendem näher erläuterten Meßmethode.

B. Endgültige Messungen.

I. Prinzip der Methode.

Um die kalorimetrischen Messungen mit einer Genauigkeit von einigen Zehntausendsteln ausführen zu können, schien es notwendig, eine große Wassermenge, im vorliegenden Fall 50 l, zu verwenden, und kleine Temperaturintervalle (meist etwa 1,4°) zu benutzen, deren Bestimmung auf den oben angegebenen Betrag, d. h. auf einige Zehntausendstel Grad nur mittels Widerstandsthermometer möglich war.

Für die Wahl der angegebenen Verhältnisse waren die folgenden Gesichtspunkte maßgebend.

Die Wärmekapazität selbst läßt sich nicht direkt messen. Sie ist eine Funktion der Temperatur u, wie die nebenstehende Fig. 1 zeigt, in welcher die Abszisse die Temperatur u, die Ordinate die Wärmekapazität A darstellt. Direkt messen kann man nur die Wärmemenge Q, die erforderlich ist, um eine Wassermenge von G Gramm von einer Temperatur u_1 auf eine höhere Temperatur u_2 zu erwärmen. Man mißt also das Integral:

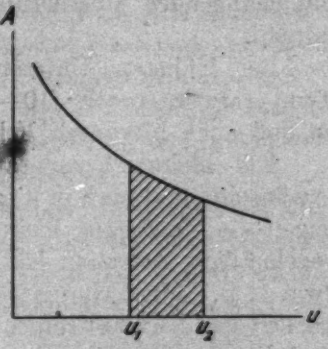


Fig. 1.

$$(1) \qquad Q = G \int_{u_1}^{u_2} A\,du,$$

welches der schraffierten Fläche entspricht. Dieser Wert von Q, dividiert durch G und durch die gemessene Temperaturdifferenz $u_2 - u_1$ liefert den Mittelwert:

$$(2) \qquad (A)_u = \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} A\,du,$$

den man der Temperatur $(u_1 + u_2)/2$ zuordnet und gewöhnlich der Wärmekapazität bei dieser Temperatur gleichsetzt. Dies

ist aber nur dann richtig, wenn die Temperaturdifferenz genügend klein ist.

Theoretisch richtig ist die Beziehung:

$$A = \frac{dQ_0}{du}, \tag{3}$$

wenn Q_0 die auf die Gewichtseinheit bezogene Wärmemenge darstellt. Deshalb ist auch die 15°-Kalorie genau genommen, zu definieren als:

$$A_{15} = \left(\frac{dQ_0}{du}\right)_{15} \cdot \text{[1)]} \tag{4}$$

Um die Wärmekapazität für eine bestimmte Temperatur zu ermitteln, ist es also erwünscht, eine *kleine* Temperaturdifferenz zu wählen, innerhalb deren die Kapazität als konstant angesehen werden kann. Um die Kurve für A als Funktion der Temperatur u zu erhalten, müssen dann viele Punkte bei verschiedenen Temperaturen in dieser Weise gemessen werden.

Bei Anwendung genügend kleiner Temperaturdifferenzen erhält man also aus den Versuchen die Wärmekapazität selbst mit genügender Annäherung, trotzdem Integralwerte gemessen werden.

Bei früheren Untersuchungen sind dagegen oft große Temperaturintervalle (10—40° und darüber) benutzt worden, so daß auch hierdurch Fehler entstanden sind.

Ein kleines Temperaturintervall ist aber auch deshalb erwünscht, weil man in diesem Fall den Temperaturunterschied gegen die Umgebung klein und dadurch den Wärmeaustausch regelmäßiger gestalten kann. Es treten dann keine Störungen (wie z. B. Konvektionsströme usw.) auf, welche die Anwendbarkeit des Newtonschen Abkühlungsgesetzes in Frage stellen. Auf diesem Gesetz beruhen aber, wie später noch näher gezeigt wird, die Korrektionen wegen des Wärmeaustausches mit der Umgebung.

Die weiteren Gesichtspunkte, welche bei der Ausbildung der Methode in Frage kamen, entsprangen dem Wunsch, bei

---

1) Die Kalorie wird meist als diejenige Wärmemenge definiert, die 1 g Wasser bei 15° um einen Grad (bzw. von 14,5° auf 15,5°) erwärmt. Diese Definition ist praktisch identisch mit derjenigen nach Gleichung (4).

den Messungen eine Genauigkeit von einem Zehntausendstel anzustreben.

Hierzu war es zunächst erforderlich, den Einfluß der Metallmassen des Kalorimetergefäßes nach Möglichkeit herabzudrücken, um von der Notwendigkeit, die genaue spezifische Wärme dieser Metallmassen und ihre Änderung mit der Temperatur zu kennen, befreit zu sein. Es kam also darauf an, große Wassermassen zu verwenden, weil dann die Masse des Metalls relativ kleiner gehalten werden kann, als bei kleineren Wassermassen.

Andererseits war dafür aber auch eine obere Grenze gegeben, da die Wassermassen noch mit einer gleicharmigen Wage unter Anwendung des Gaußschen Vertauschungsverfahrens gewogen werden sollten und da andererseits die Apparatur nicht allzu große Dimensionen annehmen sollte. Auch ist es erforderlich, daß das Wasser genügend durchgerührt werden kann, was auch nur bei nicht zu großen Dimensionen möglich ist.

Denn die Versuche gehen so vor sich, daß die elektrische Energie an einer örtlich beschränkten Stelle der Wassermenge erzeugt wird; an einer anderen Stelle wird die Temperatur gemessen. Es ist deshalb erforderlich, das Wasser so gut durchzurühren, daß es überall die gleiche Temperatur hat.

Daher wurde ein Gefäß von 50 l Inhalt gewählt, da Wagen für 50 kg, die eine Vertauschung gestatten und genügende Genauigkeit besitzen, noch erhältlich sind.

Zur Erwärmung dieser Wassermenge um 1° C. sind 210 Kilowattsekunden (Kilojoule) erforderlich, also eine ganz beträchtliche elektrische Energie. Dies ist der dritte Grund, warum *kleine* Temperaturdifferenzen in Anwendung kamen; meist, wie erwähnt, 1,4° C.

Weiter schien es aus den oben angegebenen Gründen, notwendig, die Wassermenge allseitig von Gefäßwänden zu umschließen, so daß das gebräuchliche, oben offene Kalorimeter nicht verwandt werden konnte. Ebenso mußte zwecks ausreichender Definition der „Außentemperatur" das Kalorimetergefäß von einem allseitig geschlossenen Wassermantel umgeben sein.

Es entstand nun weiter die Forderung, die kleine Temperaturdifferenz mit einer Genauigkeit von einem Zehntausendstel zu messen, d. h. die Temperaturmessung mußte ungefähr auf

ein Zehntausendstel Grad genau ausgeführt werden. Dies war nur möglich mit Widerstandsthermometern. Allerdings mußte dann die Widerstandsmessung, wenn auch nur relativ, auf etwa $^1/_2$ Milliontel des Wertes durchgeführt werden. Dies ließ sich indessen durch geeignete Meßmethoden erreichen.

Thermoelemente sind für den vorliegenden Zweck nicht zu verwenden wegen der Inhomogenitätsströme, welche die Zuverlässigkeit der Messung in Frage stellen. Man müßte noch etwa ein Fünftausendstel Mikrovolt mit einiger Sicherheit messen können, was aber aus dem angegebenen Grund nicht möglich ist.

Die Hauptschwierigkeit bei den kalorimetrischen Messungen besteht, wie sich herausstellte, in den Korrektionen für den Wärmeaustausch des Kalorimeters mit der Umgebung. Um diese Korrektion zuverlässig zu gestalten, muß die sogenannte „Außentemperatur" genau definiert und entweder konstant oder in ihrer Veränderung bekannt sein. Dies wurde durch einen allseitig geschlossenen Wassermantel erreicht.

Die Forderungen, welche bei der Konstruktion des Kalorimeters zu erfüllen waren, sind also folgende:

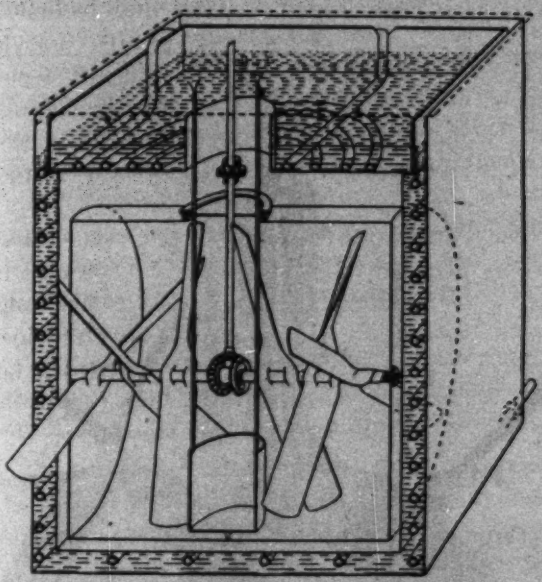
1. Große Wassermenge. 2. Kleines Temperaturintervall. 3. Vorzügliche Rührvorrichtung. 4. Gut definierte Außentemperatur.

Im folgenden sind nun zunächst die einzelnen Teile der Meßeinrichtung (Kalorimetergefäß, Rührwerk, Pumpvorrichtung, Heizspule, Thermometer) näher erläutert.

II. Apparatur.

a) *Kalorimetergefäß.* Das eigentliche Kalorimeter besteht aus einem Kupfergefäß von 50 l Inhalt, welches die Form eines horizontal gelagerten Kreiszylinders besitzt, der allseitig geschlossen ist. (Vgl. den perspektivischen Schnitt, Fig. 2, in welchem das Kalorimeter innerhalb des umgebenden Wassermantels dargestellt ist.) Der Durchmesser der kreisförmigen Seitenfläche beträgt 40 cm, ebenso groß ist die Länge des Zylinders; das Kupferblech hat eine Dicke von 0,7 mm, so daß das Gewicht des Gefäßes rund 4,5 kg beträgt. In der Mitte der Mantelfläche des Gefäßes ist oben eine kreisrunde Öffnung angebracht, die dazu dient, die Heizspule usw. einzuführen. Diese Öffnung wird durch einen mittels Überfangschraube be-

festigten, ebenen Metalldeckel verschlossen, der Löcher besitzt, durch welche die Rührachse und die Zuleitungen zur Heizspule hindurchgeführt werden. Fig. 3 zeigt den Deckel *D* in etwas größerem Maßstab.



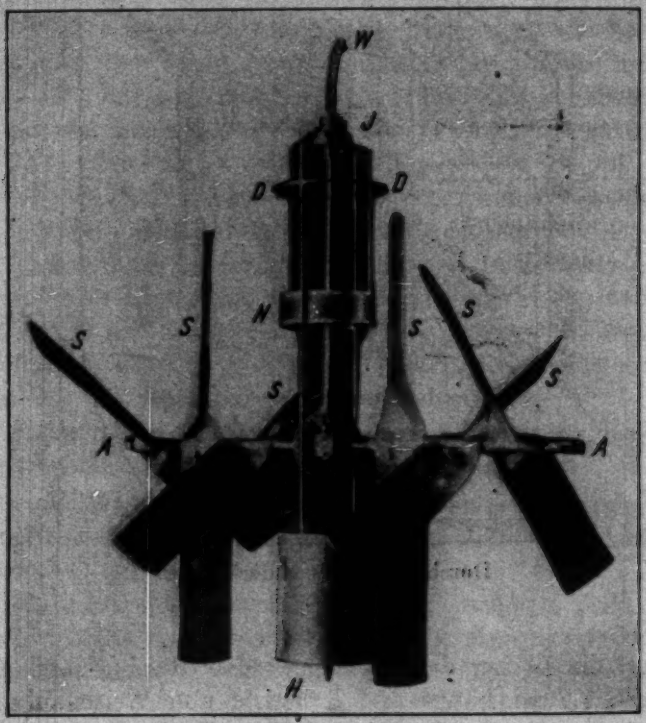
Durchschnitt des Kalorimeters.

Fig. 2.

Auf die Löcher des Deckels werden Messingröhrchen von 2,5 bzw. 1,7 cm Länge und 6 bzw. 8 mm Weite aufgesetzt, die sich an die durchgeführten Teile (Rührachse usw.) eng anschließen; seitlich von dem Deckel ist noch ein Rohr von 1 cm Durchmesser und 3,5 cm Länge auf das Gefäß aufgesetzt (nicht gezeichnet), durch welche das Platinthermometer eingeführt werden kann (vgl. Fig. 7, S. 319). Die erwähnten Stellen sind die einzigen, an denen der Innenraum des Kalorimeters mit der Umgebung in Verbindung steht, aber diese Verbindung findet nur durch schmale, lange Spalte statt, so daß eine Verdampfung des Wassers durch diese Öffnungen nur in sehr geringem Maße stattfinden kann.

Um das Kalorimeter zwecks Wägung an einer Kette aufhängen zu können, trägt das Gefäß seitlich mit Löchern versehene Laschen (vgl. Fig. 7), die durch Löten befestigt sind.

b) *Rührwerk.* Im Innern des Kalorimeters befindet sich ein kräftiges Rührwerk (von 1750 g Gewicht), um dem Wasser aus dem bereits angegebenen Grund eine möglichst gleichmäßige Temperatur zu erteilen. Das Rührwerk (Fig. 3) besteht aus zwei symmetrischen Teilen *S* links und rechts der Achse



Rührvorrichtung.
Fig. 3.

eines Differentialgetriebes, welches die beiden Teile in entgegengesetzter Richtung dreht. Jeder Teil besteht aus drei um je 120° gegeneinander versetzten kräftigen Schaufeln, die nahe den Durchmesser des Kalorimeters ausfüllen.

Die Art der Montierung des Rührwerks innerhalb des Kalorimeters und der Antrieb desselben mittels biegsamer Welle ist aus den Figg. 2 und 3 zu ersehen. Die in der Achse des Kalorimeters befindlichen Messingstangen *A* sind einerseits mittels Schrauben, unter gleichzeitiger Verlötung an den Seitenwänden des Kalorimetergefäßes befestigt, während sie

andererseits in der Mitte des Gefäßes durch ein gemeinsames Messingstück zusammengehalten werden. Dieses Mittelstück bildet gleichzeitig die untere Führung für die Rührachse. Die Schaufeln sitzen auf Röhren, die sich um die Stangen drehen können und die auch die Zahnräder tragen. Die Gesamtansicht der Rührvorrichtung gleichzeitig mit dem Deckel und der Heizspule, sowie dem Widerstandsthermometer (Nickelthermometer) *N* zeigt die Fig. 3. Die Achse des Rührers ist von der sie antreibenden biegsamen Welle *W* durch ein Stück *J* aus Vulkanfiber isoliert, um die Wärmeableitung nach außen zu verhindern und die Metallmassen abzugrenzen. Sonst ist man unsicher darüber, bis zu welcher Stelle die Metallmassen gerechnet werden müssen. Beim Zusammensetzen des Apparates kann das Isolierstück abgenommen werden, um den Deckel des Mantels aufzusetzen.

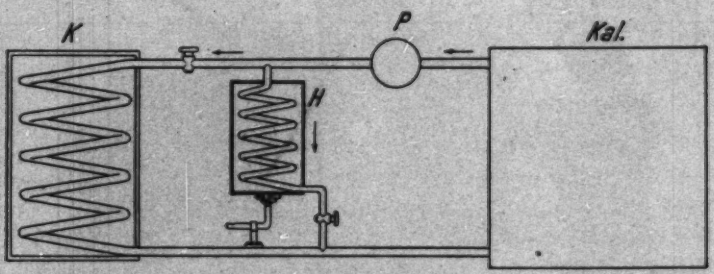
Die biegsame Welle hat einen Durchmesser von $^1/_2$ cm und eine Länge von 1 m; sie wird durch einen Elektromotor (900 Touren) mittels Schneckengewinde angetrieben (Fig. 4)

Schneckentrieb.
Fig. 4.

und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit von einer Umdrehung in zwei Sekunden. Die dadurch entwickelte Rührwärme beträgt etwa 15 cal/min.

c) *Mantel.* Der das Kalorimeter allseitig umgebende doppelwandige Wassermantel ist in Fig. 2 zu sehen. Die Innenwandung desselben, die aus Kupfer besteht, schließt sich ziemlich eng an das Kalorimetergefäß an (nächste Entfernung 2 cm); auf der Bodenfläche ruht das Kalorimeter mittels

4 Porzellanisolatoren, so daß direkter Wärmeübergang auf den Mantel vermieden wird. Die Bodenfläche hat einen Inhalt von $44 \cdot 44$ cm^2. Die äußere Wandung des Mantels ist aus Zink hergestellt, das aber durch Holzbretter versteift ist, weil es sich sonst bei den höheren Temperaturen ausbaucht. Der Zwischenraum zwischen beiden Wandungen beträgt 3 cm, so daß die Grundfläche des Mantels eine äußere Abmessung von $50 \cdot 50$ cm besitzt. Die Höhe des Mantels ist wegen des aufzusetzenden Deckels etwas größer. Der Zwischenraum des Mantels ist mit Wasser gefüllt, in welchem ein Schlangenrohr liegt. Durch dieses strömt temperiertes Wasser in der unten näher erläuterten Weise. Nach oben ist der Mantel durch einen Deckel abgeschlossen, vgl. Fig. 2. Das aus den Schlangenwindungen der Seitenteile des Mantels austretende Wasser strömt durch die Schlangenwindungen, die in dem Deckel liegen und fließt dann in das Wasser des Mantels zurück. Aus dem Mantelzwischenraum gelangt es in eine Pumpe, die es wieder den Schlangenwindungen zuführt.



Wasserzirkulation.

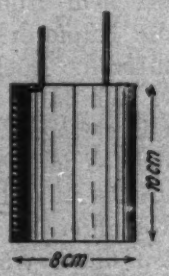
Fig. 5.

d) *Pumpvorrichtung.* Durch die erwähnte Pumpvorrichtung (Fig. 5) wird also ein vollständiger Kreislauf des Wassers aufrecht erhalten. Eine Kolbendruckpumpe P, die durch einen Elektromotor von $^1/_6$ PS. angetrieben wird, und in welche das Wasser aus der tiefsten Stelle des Mantels zufließt, drückt das Wasser durch einen Heiz- oder Kühlapparat, die auch beide kombiniert werden können, in die Schlangenwindungen des Mantels. Der Heizapparat H ist eine der bekannten käuflichen Anlagen mit Gasfeuerung, wie sie zu Warmwasseranlagen benutzt werden. Der Kühlapparat K besteht aus

einem durch Holzverkleidung geschützten Metallkasten, in dem sich Schlangenwindungen befinden. Das in dem Kasten vorhandene Eis kühlt das in den Schlangenwindungen fließende Wasser ab. Zur Anheizung des Mantels auf 100° war bei voller Flamme des Heizapparates etwa eine Stunde erforderlich. Eine Messung der Temperatur des ein- und austretenden Wassers in der Nähe der Mantelaußenwand wurde mit Thermoelementen vorgenommen und ergab bei einer Manteltemperatur von 77° eine Differenz von $^1/_2$—1°. Die Zirkulation des Wassers war also rasch genug, um erhebliche Temperaturunterschiede des Mantelwassers zu vermeiden.

Für die bei höheren Temperaturen vorgenommenen Messungen wurde von Versuch Nr. 46 an ein Toluolregulator benutzt, der elektrisch betätigt wurde. Das Thermometergefäß desselben bestand aus einem mit Toluol gefüllten Metallrohr, das an der Abflußstelle des Wassers senkrecht im Mantelwasser stand und die Höhe des Mantels besaß. Durch ein langes enges Rohr stand es mit dem Heberrohr in Verbindung, das mit Quecksilber gefüllt war und in dem bei steigender Temperatur ein Kontakt durch das Quecksilber geschlossen wurde. Hierdurch wurde ein elektrisches Ventil zur Regulierung der Gaszufuhr betätigt.

c) *Heizspule.* Die zur Erreichung des Temperaturanstieges verwandte Heizspule bestand aus doppelt mit Seide umsponnenem Konstantandraht von 1 mm Durchmesser und etwa 8 Ohm (Länge etwa 14 m), der im Wasser mit 10 Amp. belastet wurde, so daß eine Leistung von 0,8 Kilowatt entstand, die in der Regel 6 Minuten lang aufrecht erhalten wurde. Der Draht war auf einen Messingzylinder von 10 cm Länge und 8 cm Durchmesser bifilar aufgewickelt. Der Messingzylinder hatte ursprünglich eine Dicke von 3 mm, wurde aber, abgesehen von einem Rand von 3 mm Breite, so weit abgefräßt (vgl. Fig. 6 linke Hälfte im Schnitt, rechte in Ansicht, sowie *H*, Fig. 3), daß die Wandung nur noch etwa $^1/_2$ mm dick war. In dem so entstandenen Raum wurde der Draht Windung an Windung auf untergelegten Glimmer gewickelt, und dann noch schellackiert. Zum Abschluß der Heizspule nach außen



Heizspule.
Fig. 6.

wurde auf dem stehengebliebenen Rand des Messingzylinders ein Schablonenblech weich aufgelötet und der Zwischenraum mit Paraffin gefüllt.

Die Drähte sind somit beiderseits von in Bewegung gehaltenem Wasser umgeben, so daß sie kräftig gekühlt werden, und die Energie schnell an das Wasser abgegeben wird. Um die Zuleitungsdrähte zu der Spule isoliert aus dem Wasser herausführen zu können, waren an dem Messingzylinder zunächst Messingrohre hart angelötet, welche bis oberhalb des Wasserspiegels reichten. Durch diese Rohre wurden die Drähte herausgeführt.

Zur Vermeidung von Thermokräften zwischen Konstanten und Kupfer waren die Kupferdrähte bereits innerhalb der Spule hart an die Konstantendrähte angelötet. Noch unterhalb der Wasseroberfläche verzweigten sich die Drähte in einen dickeren Strom- und einen dünneren Potentialdraht, um den Widerstand auf diese Weise genau abzugrenzen. Die Zuleitungsdrähte waren durch Umspinnung isoliert. Die elektrische Leistung wurde in der später zu beschreibenden Weise durch Strom- und Spannungsmessung bestimmt. Eine Abgrenzung der Metallmassen der Heizspule nach außen, wie bei dem Rührer war hier natürlich ausgeschlossen, da sich die Kupferdrähte auch außerhalb des Kalorimeters fortsetzen müssen. Doch ist die dadurch entstehende Unsicherheit, da es sich dabei um verhältnismäßig dünne Kupferdrähte handelt, nur gering. Man kann die Annahme machen, daß die Metallmassen der Heizspule von der Verzweigungsstelle der Zuleitungsdrähte an rechneten. Die Wärmeentwicklung in diesen Drähten von ihrer Verzweigungsstelle ab bleibt dann unberücksichtigt; von dieser Wärme gelangt ein Teil durch Leitung in das Kalorimeter.

f) *Thermometer.* Als Widerstandsthermometer wurden anfänglich Nickelthermometer benutzt, da das Nickel, besonders in reinem Zustand, einen verhältnismäßig hohen Temperaturkoeffizienten besitzt, so daß man eine größere Empfindlichkeit erreichen kann, als bei anderen Metallen (Eisen ausgenommen, das gleichfalls einen hohen Koeffizienten besitzt).

Die Nickelthermometer waren ganz analog der Heizspule konstruiert (vgl. *N*, Fig. 8). Doch haben diese Thermometer die Unbequemlichkeit, daß ihre Temperaturskala viel erheb-

licher von der Normalskala abweicht, als dies bei den Platinthermometern der Fall ist.

Außerdem hätten aber die Thermometer noch auf Platinthermometer zurückgeführt werden müssen, die an die Normalskala angeschlossen waren oder hätten selbst geeicht werden müssen. Es erschien daher einfacher, die zu Gebote stehenden Platinthermometer selbst zu verwenden, die von den Herren Holborn und Henning, wie später näher erläutert wird, auf die Normalskala zurückgeführt waren und uns freundlichst für diese Messungen zur Verfügung gestellt wurden. Die beiden zu den Messungen benutzten Thermometer (*H 23* und *E1*)[1]) waren verschiedener Konstruktion; das eine derselben (*H 23*) besteht aus einer etwa 35 cm langen Schleife aus Platindraht, deren einzelne Schenkel durch Quarzglasröhrchen voneinander getrennt sind. Die Schleife ist von einem Schutzrohr aus Nickel von 48 cm Länge und 0,5 cm Durchmesser umschlossen. Die Ansatzstellen der aus Silber bestehenden Zuleitungsdrähte befinden sich etwa 10 cm unterhalb des Kopfes, der die Kupferklemmen trägt. Jedes Drahtende ist mit je zwei Zuleitungen versehen, für Strom- und Spannungsabnahme. Dieses Thermometer integriert also über eine größere Länge. Das andere Instrument (*E 1*) ist nach der Art der Callendarschen Instrumente gebaut, aber mit den Abänderungen, die von Holborn und Henning (a. a. O.) angegeben sind. Der 0,1 mm starke Platindraht ist bifilar auf ein Glimmerkreuz von 8 mm Durchmesser und 50 mm Länge aufgewickelt. An jedem Ende des Drahtes sind je zwei Silberdrähte von 0,3 mm Durchmesser und 20 cm Länge angeschmolzen, diese sind dann noch innerhalb des Schutzrohres an Kupferdrähte angelötet, die zu den auf dem Kopf des Thermometers sitzenden Kupferklemmen führen. Das Schutzrohr besteht aus einer dünnen Glasröhre aus Jenenser Glas 59^{III} von 44 cm Länge.

Durch die Konstruktion der Thermometer sind schädliche Thermokräfte, welche die Messung stören könnten, nach Möglichkeit vermieden; denn die Lötstellen Platin–Silber sitzen

---

1) Vgl. hierüber Ann. d. Phys. **45**. S. 1095. 1914; ferner L. Holborn u. Henning, a. a. O. **26**. S. 844. 1903 u. **35**. S. 766, 770. 1911. Das hier *H* 23 genannte Thermometer ist dort mit Nr. 23 bezeichnet, das Thermometer *E* 1 wurde erst später hergestellt, entspricht aber in der Konstruktion den dort beschriebenen Instrumenten.

noch erheblich unter dem Flüssigkeitsspiegel, die Lötstellen Silber–Kupfer befinden sich nahe beieinander in derselben Ebene, wobei außerdem zu beachten ist, daß die Thermokraft dieser beiden Metalle sehr gering ist. Der Widerstand der Thermometer beträgt etwa 6 Ohm bei 0°.

Das Thermometer *E 1* besitzt eine etwas größere Trägheit gegenüber Temperaturänderungen als *H 23*; doch fällt bei den hier in Frage kommenden Messungen die Trägheit nicht sehr ins Gewicht[1]), so daß dieses Thermometer unbedenklich benutzt werden konnte.

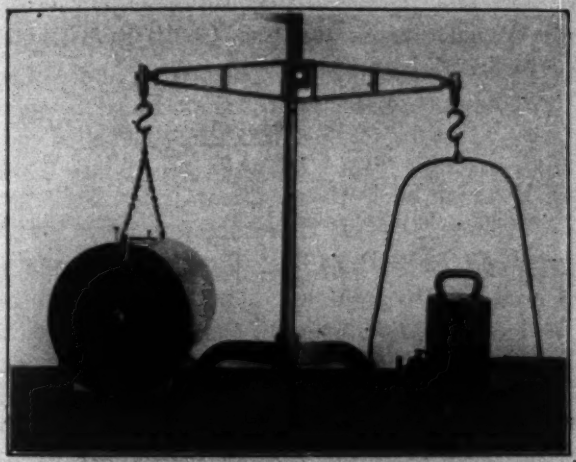
III. Theorie und Ausführung der Messungen.

a) *Bestimmung des Wassergewichtes.* Die Masse des Wassers wurde durch Wägung ermittelt. Hierbei sind noch außer dem Wasser selbst die Metallmassen des Kalorimeters mit allen Teilen, die sich im Kalorimetergefäß befinden, zu berücksichtigen. Das Gewicht der Metallmassen beträgt rund 7,2 kg, der Wasserwert derselben etwa 0,7 kg, also nur etwas mehr als 1 Proz. der 50 kg betragenden Wassermasse. Daher genügt bei der angestrebten Genauigkeit von einem Zehntausendstel die Kenntnis der Wärmekapazität der Metallmassen auf 1 Proz.; die Änderung der Kapazität der Metallmassen mit der Temperatur (bei Kupfer, das die Hauptmasse des Metalls ausmacht, etwa +0,4 pro Mille pro Grad) braucht nicht in Rechnung gezogen zu werden.

Das Gewicht des mit Wasser gefüllten Kalorimeters wurde mit einer gleicharmigen Wage ermittelt, die bei 50 kg Belastung noch etwa $^1/_{10}$ g zu messen gestattete. Die von Redecker und Nauß in Bielefeld angefertigte Wage wurde ebenso wie das geeichte Gewicht von 50 kg (vgl. Fig. 7) von der Kaiserlichen Normal-Eichungskommission in Charlottenburg freundlichst zur Verfügung gestellt, wofür dieser Behörde hiermit bestens gedankt sei. Die Spannweite der Wage, von Schneide zu Schneide gemessen, beträgt 94 cm, so daß es möglich war, das Kalorimeter innerhalb des Mantels zu wägen. Die Vertauschung geschah dann in der Weise, daß der Wagebalken

1) Vgl. W. Jaeger u. H. v. Steinwehr, Zeitschr. f. physik. Chem. **54**. S. 428. 1906.

umgehängt wurde. Es wäre schwierig gewesen, das Kalorimeter zum Zweck der Wägung aus dem Mantel herauszuheben und auf die Wage zu bringen. Die Wägung wurde in der Weise ausgeführt, daß das Gefäß mit einer Kette an den einen Wagearm angehängt wurde.



50 kg-Wage.
Fig. 7.

Das wirkliche Gewicht des Kalorimetergefäßes brauchte nur für die Berechnung des Wasserwertes bekannt zu sein. Zur Ermittlung der Wassermasse genügt dagegen die Kenntnis der Tara des an dem Wagearm aufgehängten Gefäßes.

Die Tara des Gefäßes mit Kette, aber ohne sonstigen Zubehör, d. h. dasjenige Gewicht, das auf die Wagschale aufgelegt werden muß, um dem direkt am Wagearm hängenden Gefäß das Gleichgewicht zu halten, ergab sich durch eine Doppelwägung zu

links	3492,7 g
rechts	90,8 g
Mittel	3491,8 g

Bei der Wasserwägung wurde aber noch mitgewogen der Deckel des Kalorimeters mit Ring, der Rührer mit Kopf und die Heizspule. Das Gewicht dieser Teile beträgt:

für die Versuche	18—92	958,4 g
„ „ „	93—111	921,1 g

Die Gewichtstara, die mit *A* bezeichnet sei, ist demnach (Summe beider Zahlen):

	A.	
für die Versuche Nr. 18—92	4450,2 g	Differenz
„ „ „ „ 93—111	4412,9 g	37,3

Zur Berechnung des Wasserwertes *B* der Metallmassen dient das wirkliche Gewicht des Kalorimeters einschließlich Rührer, zu dessen Ermittlung das Gefäß auf die Wagschale aufgelegt wurde. Es ergab sich

links	6307,8 g
rechts	04,5 g
Mittel	6306,1 g

Hierzu kommen noch die oben erwähnten Teile des Kalorimeters mit Ausnahme des Thermometers, das bei den Versuchen gewechselt hat. Diese Metallmassen betrugen 854,5 g[1]); also die Gesamtmetallmassen, abgesehen von den Thermometern 6306,1 + 854,5 = 7160,6 g, die als Kupfer gerechnet werden können. Unter Annahme einer Wärmekapazität von 0,091 für das Kupfer ergibt sich also für diese Metallmassen als Wasserwert die Zahl 651,6 g. Hierzu kommen zunächst noch 18 g Paraffin, mit welchem die Heizspule gefüllt ist; unter Annahme einer Wärmekapazität von 0,6 entspricht dies einem Wasserwert von 10,5 g.

Die Metallmassen von Thermometer *H 23* betragen 60 g, entsprechend einem Wasserwert von 5,5 g. Für Thermometer *E 1* bestehen die in Betracht kommenden Massen im wesentlichen aus Glas. Das Gewicht des Thermometers beträgt 90 g, davon ist $^1/_3$ etwa in Wasser, so daß man bei einer angenommenen Wärmekapazität von 0,2 einen Wasserwert von 6,0 g erhält. Daraus ergibt sich der Wert von *B*, d. h. der dem Wassergewicht zuzufügende Wasserwert der festen Teile

	B.
für die Versuche Nr. 18—92	667,6 g
„ „ „ „ 93—111	668,1 g

Dem Gewicht des Wassers hinzuzufügen ist ferner der Luftauftrieb, der etwa 50 g ausmacht. Da diese Korrektion nur 1 ‰ beträgt, kann sie für alle Messungen als unveränderlich angesehen werden. Eine Luftkorrektion für die Kupfermassen ist nicht erforderlich, da der Dichteunterschied gegen Eisen, mit welchem die Wägung ausgeführt wurde, zu unbedeutend

1) Abzüglich des Ebonitkopfes und des Paraffins der Heizspule.

ist, und die Massen gering sind (Dichte von Kupfer etwa 8,7, von Eisen etwa 7,8). Wird die Dichte der Luft rund zu $1{,}20 \cdot 10^{-3}$ angenommen, das Volumen der verdrängten Luft zu 50 l, so erhält man als Auftrieb C:

$$C = 1{,}20\,(1 - 1/7{,}8) \cdot 50 = 52\ \text{g}.$$

Das mit Wasser gefüllte Gefäß wurde in derselben Weise und mit denselben Teilen wie das leere Kalorimeter gewogen, indem es mittels der Kette an den einen Wagearm aufgehängt wurde.

Die auf diese Weise aus einer Doppelwägung (mit l und r bezeichnet) erhaltenen Bruttogewichte sind in der Tab. I in der Spalte 2 und 3 zusammengestellt.

Tabelle I.

Wägungen.

Datum	Bruttogewicht: Einzelwägung	Bruttogewicht: Mittel	Gesamtkorrektion (Tara usw.)	Korrigiertes Gewicht	Bemerkung
1	2	3	4	5	
5. 12. 1911	l 54196,3	54188,3	−3730,6	50457,7	
	r 180,3				
30. 1. 1912	l 54188,0	54180,0	−3730,6	50449,4	Nr. 18—38
	r 172,0				
21. 2. 1912	l 54185,5	54177,8	−3730,6	50447,2	
	r 170,0				
20. 3. 1912	l 53596,5	53588,7	−3730,6	49858,1	Nr. 46 u. 47
	r 581,0				
25. 3. 1912	l 53983,5	53975,5	−3730,6	50244,9	„ 48—51
	r 967,5				
4. 4. 1912	l 53954,5	53946,3$_5$	−3730,6	50215,7$_5$	„ 52—59
	r 938,2				
15. 4. 1912	l 53961,5	53953,2	−3730,6	50222,6	„ 60 u. 61
	r 945,0				
18. 4. 1912	l 53966,0	53958,2	−3730,6	50227,6	„ 62—64
	r 950,5				
9. 5. 1912	l 53931,5	53923,2	−3730,6	50192,6	„ 65—68
	r 915,0				
14. 5. 1912	l 53998,5	53990,2	−3730,6	50259,6	„ 69 u. 70
	r 982,0				
15. 5. 1912	l 53996,0	53988,0	−3730,6	50257,4	„ 71—76
	r 980,0				
22. 5. 1912	l 54059,5	54051,5	−3730,6	50320,9	„ 77 u. 78
	r 043,5				
6. 6. 1912	l 54052,7	54044,8$_5$	−3730,6	50314,2$_5$	„ 79—92
	r 37,0	54007,5	−3696,2	50311,3	
3. 7. 1912	l 53989,0	53997,2	−3696,2	50301,0	Nr. 93—111
	r —				

l = Kalorimeter links, r = Kalorimeter rechts.

Die in Spalte 4 stehende, an diesen Gewichten anzubringende Gesamtkorrektion[1]) ergibt sich als

$$K = -A + B + C,$$

also

	K.
für die Versuche Nr. 18—92	−3730,6 g
„ „ „ „ 93—111	−3696,2 g

Die letzte Spalte 5 der Tab. I enthält die auf diese Weise korrigierten Gewichte mit der Angabe ihrer Zugehörigkeit zu den Versuchen.

Die Wägung vom 6. 6. 12 ist zunächst für die diesem Zeitpunkt vorhergehenden Messungen zu verwenden und zwar mit der ersten Korrektion (−3730,6); um sie auch für die folgenden Messungen zu verwerten, ist zunächst das Bruttogewicht um 37,3 g (Differenz der inneren Teile vor und nach dem 6. 6.) zu verringern, und dann die Korrektion −3696,2 anzubringen.

Die Gewichte für die Versuche Nr. 18—88 sind durch Interpolation aus den Wägungen vom 5. 12. 11, 30. 1. 12 und 21. 2. 12 ermittelt. Die Gewichtsabnahme durch Verdunsten des Wassers beträgt vom 24. 11. 11 bis 16. 2. 12 11,4 g, also nur zwei Zehntausendstel in etwa einem Vierteljahr.

Aus Tab. X, S. 360, sind die für jeden Versuch benutzten Werte der korrigierten Gewichte G zu ersehen.

b) *Messung der elektrischen Leistung.* Die elektrische Leistung des Stromes wurde in der Weise bestimmt, daß während des Stromdurchgangs durch die Heizspule abwechselnd Strom und Spannung gemessen wurden. Diese Messung geschah mittels eines Kompensators. Man umgeht auf diese Weise die bekannte Schwierigkeit, welche von Bousfield (a. a. O.) als *Thermoideffekt* bezeichnet wurde, und die darin besteht, daß die Temperatur des Heizwiderstandes nicht genau bekannt ist, so daß man den Widerstand des Drahtes nicht berechnen kann.

Bei der Messung der Leistung wurde nun so verfahren, daß man sowohl für die Stromstärke wie für die Spannung, ebenso auch für das als Einheit verwendete Normal-Weston-

1) Das Gewicht von 50 kg selbst ist um etwa 1,1 g zu schwer; die entsprechende Korrektion von $2 \cdot 10^{-5}$ ist zu vernachlässigen.

element, nahe die gleiche Stellung am Kompensator erhielt. Diese von uns schon früher benutzte Anordnung[1]) bietet zwei ganz wesentliche Vorteile. Erstens kann man während des Stromdurchgangs bequem durch Umlegen eines Umschalters abwechselnd Stromstärke und Spannung messen, ohne daß man an der Einstellung des Kompensators erheblich zu ändern braucht. Dieser Umstand ist wichtig, da die Messung sich auf den Zeitraum von wenigen Minuten beschränkte und häufigere Ablesungen erwünscht waren. Zweitens wird dadurch die Kenntnis der Widerstandskorrektionen des Kompensators entbehrlich und die gemessenen Spannungen werden direkt auf die EMK. des Normalelements bezogen (vgl. auch Gleichung (5) und (6) S. 325).

Die Schaltungsweise zum Zwecke der Messung ist aus den Figg. 8 (gesamtes Schaltungsschema) und 9 zu entnehmen.

Die Einrichtung zur Leistungsmessung ist in Fig. 8 mit dem Buchstaben L bezeichnet, die Zeitmessung mit Z, die Temperaturmessung mit T.

Es handelte sich darum, die Stromstätke J von 10 Amp., die durch die Heizspule fließt und die Spannung E von 100 Volt auf Widerstände und die Spannung des Westonelements, also nahe 1 Volt zurückzuführen, was in folgender Weise geschehen ist.

Zur Messung der Stromstärke diente ein mit der Heizspule (R') in Reihe geschalteter Widerstand r_3, eine in Petroleum stehende Normalbüchse Nr. 2204 von 0,1 Ohm, die sich infolge der Belastung mit 10 Amp. auf etwa 30° C. erwärmte. Die mit diesem Widerstand gemessene Stromstärke ist wegen des an R' liegenden Nebenanschlusses (vgl. unten) etwas zu groß, was in der unten angegebenen Formel berücksichtigt ist.

Zur Messung der Spannung E wird an die Heizspule ein Spannungsteiler $r = r_1 + r_2$ von 10127 Ohm gelegt, der auch aus Normalbüchsen, die in Petroleum stehen, gebildet ist (Nr. 2830 von 10000 Ohm, Nr. 915 von 100 Ohm, Nr. 225 von 20 Ohm, Nr. 2835 von 5 Ohm, Nr. 229 von 2 Ohm). Die mit dem Kompensator gemessene Spannung wurde an 127 Ohm (r_2) abgenommen.

---

1) Vgl. Zitat S. 306.

Fig. 8. Gesamtschaltung.

Zur Messung der Spannungen sind von den Potentialklemmen der Widerstände r_2 und r_3 Drähte zu dem Umschalter U_2 geführt, der vor den Kompensator K geschaltet ist, so daß die beiden Spannungen abwechselnd gemessen werden konnten. Der Kompensator war ein Apparat Feußnerscher Konstruktion von O. Wolff (Berlin) mit 10000 Ohm Widerstand, der in Verbindung mit einem Siemensschen Drehspulinstrument für hohen Widerstand mit einer Stromstärke von etwa $^1/_{10000}$ Amp. benutzt wurde. (Die Stromstärke braucht nicht bekannt zu sein.) Zur Einschaltung des Westonelements V diente der am Apparat selbst befindliche Umschalter. Die an r_2 und r_3 abgenommenen Spannungen betragen nahe 1 Volt, so daß man die Einstellungen in der Nähe von 10000 Ohm am Kompensator erhält. Den Spannungen mögen die Widerstandsablesungen K_v (für die Spannung an r_3) und K_i (für die der Stromstärke entsprechende Spannung an r_3) am Kompensator entsprechen. Die der Spannung des Normalelements V (reduzierter Wert) zugeordnete Widerstandsablesung am Kompensator sei K_v.

Dann ergeben sich für die Stromstärke J in der Heizspule und für die an dieser liegende Spannung E folgende Gleichungen:

$$J = \frac{V \cdot K_i}{K_v} \cdot \frac{r}{r_3 (R' + r)}, \tag{5}$$

$$E = \frac{V \cdot K_i}{K_v} \cdot \frac{r}{r_3} \cdot {}^1) \tag{5a}$$

Hieraus folgt für die Leistung EJ und den Widerstand $R' = E/J$:

$$EJ = \frac{K_i K_i}{(K_v)^2} \left[\frac{V^2 r}{r_2 r_3 (1 + R'/r)} \right], \tag{6}$$

$$R' = \frac{E}{J} = \frac{K_v}{K_i} \left[\frac{r_3 r}{r_2} (1 + R'/r) \right]. \tag{6a}$$

Die Größe R'/r, welche in diesen letzten Gleichungen vorkommt, ist ein Korrektionsglied, (etwa $1^0/_{00}$) und braucht daher nur annähernd bekannt zu sein. Der Wert von r_3 muß absolut bekannt sein, r/r_3 braucht nur relativ gemessen zu sein. Die Faktoren $K_v K_i/(K_v)^2$ und K_v/K_i, welche nach den obigen Ausführungen nahe Eins sind, ergeben sich aus den Widerstandseinstellungen am Kompensator. V ist der auf 20° reduzierte Wert des Weston-Normalelements.

---

1) $r = r_1 + r_3$ gesetzt.

Die der Leistungsmessung zugrunde liegenden Einheiten sind der Wert des Normalelements und derjenige des Widerstandes r_3. Im übrigen gehen nur Widerstandsverhältnisse ein. Die Widerstandswerte und Verhältnisse wurden durch Zurückführung der verschiedenen Einzelwiderstände auf die Widerstandseinheit der Reichsanstalt bestimmt.

Die Widerstandswerte und die Temperaturkoeffizienten der einzelnen zur Messung benutzten Büchsen sind im folgenden zusammengestellt.

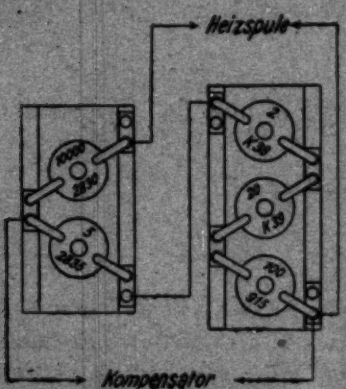
Tabelle II.

Büchsen für die Energiemessung.

Bezeichnung	Wert bei 18° C.	Temperaturkoeffizient
r_1 Nr. 2830	$10000(1 + 71 \cdot 10^{-6})$ Ohm	$+ 14 \cdot 10^{-6}$
r_2 „ 915	$100(1 - 11 \cdot 10^{-6})$ „	+ 9
r_2 „ 225	$20(1 - 38 \cdot 10^{-6})$ „	+ 20
r_2 „ 2835	$5(1 - 8 \cdot 10^{-6})$ „	+ 22
r_2 „ 223 [1])	$2(1 - 2245 \cdot 10^{-6})$ „	+ 44
r_3 „ 2204	$0{,}1(1 - 29 \cdot 10^{-6})$ „	+ 12 (zwischen 18 u. 35°)

$1 + R'/r = 1{,}00079$ [2]), $r = r_1 + r_3 = 10127{,}7$ Ohm bei 18° C.

Die Temperaturen der in Petroleumbädern stehenden Widerstände r_1, r_2 und r_3 sind in der Tab. IX (S. 858) mitgeteilt.



Büchsenanordnung für den Spannungsteiler.

Fig. 9.

Der Widerstand r_3 von $^1/_{10}$ Ohm wurde durch den Strom stärker erwärmt, bis auf etwa 30°; die hierdurch erforderliche Korrektion beträgt etwa ein Zehntausendstel. Die Anordnung der Büchsen in den Petroleumbädern geht aus Fig. 9 hervor.

Als Normalelement diente ein im Januar 1909 zusammengesetztes Westonelement (mit gesättigter Lösung), das die Bezeichnung *l m 6* trägt. Dieses Element wurde öfter mit einem Stamm von 11 Normalelementen verglichen [3]), die sich in einem

1) Die Büchse Nr. 223 ist noch in „legalen Ohm" abgeglichen.
2) R' ist nahe 8 Ohm, vgl. Tab. III, S. 328.
3) Vgl. v. Steinwehr, Zeitschr. f. Instrk. 33. S. 363ff. 1913.

Raum für konstante Temperatur befinden und die auch 1910 in Washington mit den Elementen der dort vertretenen Länder verglichen worden waren. Diese 11 Elemente bilden die Spannungseinheit der Reichsanstalt und unterscheiden sich nicht von dem Mittel einer größeren in dem gleichen Raum untergebrachten Anzahl von Elementen. Der Wert dieser Stammelemente wird nach den internationalen Vereinbarungen zu 1,0183 Volt bei 20° C. angenommen. Unter dieser Voraussetzung ist der Wert des zur Messung benutzten Elementes gleich 1,01828 int. Volt bei 20°.[1]) Für die Berechnung der Faktoren in den Formeln 5 und 5a wurde der Wert des Elements zu 1,0183 gesetzt und die Abweichung desselben vom Nominalwert, sowie die Temperaturkorrektion besonders berücksichtigt. Da der Wert des Elements im Quadrat eingeht, sind die Korrektionen mit doppeltem Betrag einzusetzen. Legt man ferner für die Widerstände die oben angegebenen Werte bei 18° zugrunde, so erhält man zur Berechnung der Leistung und des Widerstandes die Formeln:

$$EJ = 826{,}32\,\frac{K_e K_i}{(K_s)^2}\ \text{Watt}, \tag{7}$$

$$R' = 7{,}9810\,\frac{K_s}{K_i}\ \text{Ohm}. \tag{7a}$$

Nach diesen Formeln, in welchen nur noch die Einstellungen K_i usw. am Kompensator enthalten sind, wurden die Versuche berechnet, indem noch die Temperaturkorrektionen für die Widerstände und das Normalelement, die sich aus den Angaben der Tab. II und Anm. 1 ergeben, sowie die doppelte Wertkorrektion des Elementes ($4 \cdot 10^{-5}$) angebracht wurden.

Der Widerstand R' wurde nur zur Kontrolle berechnet; er geht in die Berechnung des Resultates nicht ein. Es zeigte sich, daß er sich ganz regelmäßig mit der Temperatur u des Kalorimeters nach der Formel

$$R' = 7{,}9902\,[1 + 29{,}8 \cdot 10^{-6}\,(u - 20°)] \tag{8}$$

ändert, mit Abweichungen, welche die Beobachtungsfehler nicht übersteigen (durchschnittlich ein Zehntausendstel); vgl. Tab. III.

Die Einstellungen K_i, K_s, K_e am Kompensator wurden aus den einzelnen Ablesungen in der aus dem folgenden Beispiel ersichtlichen Weise ermittelt.

---

1) Zwischen 15° und 20° C. nimmt die EMK. des Westonelements um etwa $0{,}35 \cdot 10^{-4}$ Volt pro Grad Temperaturzunahme ab.

Tabelle III.

Heizwiderstand in Abhängigkeit von der Temperatur.

Nr.	Temperatur	R' Ohm	Abweichg. v. Form. 1.8 in 10^{-4}	Nr.	Temperatur	R' Ohm	Abweichg. v. Form. 1.8 in 10^{-4}
71	4,75	7,9849	−2	38	21,15	7,9906	0
52, 53	5,65	865	0	21	21,41	895	−1
72	6,15	864	0	77	21,80	919	2
65, 66	6,38	875	1	101	22,53	897	2
69	7,41	869	0	78	23,24	920	1
73	8,51	873	0	102	23,96	898	−1
70	8,81	872	0	79	24,11	920	1
63	8,95	879	1	93	24,82	909	0
74	10,02	882	1	103	25,36	902	−1
67, 68	11,33	893	2	80	25,55	922	1
75	11,45	887	1	94	26,24	899	−2
48	11,61	875	−1	81	26,33	920	0
64	12,06	878	0	82	27,76	925	1
60	12,59	877	−1	108	29,15	924	0
56	12,60	884	0	83	29,19	936	2
76	12,87	892	1	84	30,60	935	1
49	13,03	887	0	109	31,49	930	0
61	13,97	881	−1	85	32,54	935	1
57	14,00	888	0	86	33,98	941	0
46	14,88	889	0	110	34,32	935	0
50	14,99	886	0	98	34,39	946	1
47	16,31	894	0	87	35,75	944	1
51	16,39	892	0	99	35,79	951	2
59	17,33	891	0	111	36,64	944	0
31	17,41	891	0	88	37,19	949	1
19	18,42	875	−3	89, 90	39,41	958	1
33	18,42	893	0	91, 92	43,09	957	0
35	18,55	898	0	104	44,34	956	0
32	18,82	898	0	95	45,56	961	0
18	18,83	879	−2	105	45,79	962	0
37	19,75	895	−1	96	46,96	967	0
36	19,95	894	−1	97	48,36	970	0
20	20,01	881	−2	106, 107	49,60	972	0
100	21,13	891	−1				

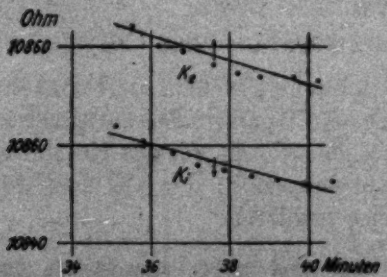


Fig. 10. Zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung.

Beispiel.

Die Einstellungen K_i und K_e sind alternierend vorgenommen; K_v ist vor Beginn und nach Schluß des Versuches gemessen.

Versuch Nr. 33; 12. 2. 1912.
Anfang $1^h\,34'\,40''$, Ende $1^h\,40'\,40''$.

Zeit	Strom K_i Ohm	Spannung K_e Ohm	Element K_v Ohm
1	2	3	4
$1^h\,17'$ —	—	—	10896
— 35′ 7″	10852	—	—
— 35′ 32″	—	10862	—
— 35′ 56″	850,3	—	—
— 36′ 13″	—	860	—
— 36′ 35″	849,3	—	—
— 36′ 53″	—	859,5	—
— 37′ 19″	848	—	—
— 37′ 34″	—	858	—
— 37′ 54″	847,8	—	—
— 38′ 15″	—	857,3	—
— 38′ 32″	847	—	—
— 38′ 49″	—	857	—
— 39′ 13″	846,5	—	—
— 39′ 36″	—	856,8	—
— 39′ 58″	846	—	—
— 40′ 16″	—	856,5	—
— 40′ 34″	846,5	—	—
— 41′ 0″	—	—	95,5

Zugehörige Temperaturen:

	$1^h\,15'$	$1^h\,41'$
Element	18,55°	18,75°
127 Ohm	18,5	18,6
10^4 „	19,0	19,2
0,1 „	23	26

Die für den Anfang und das Ende des Stromdurchgangs durch die Heizspule angegebenen Zeiten sollen nur einen ungefähren Anhalt geben; die genaue Zeitdauer wurde wie erwähnt mittels eines Chronographen ermittelt (vgl. später). Die erste Spalte gibt die zu den Ablesungen am Kompensator K_i, K_e, K_v gehörigen Zeiten. In Fig. 10[1]) sind diese Werte graphisch aufgetragen, woraus sich dann folgende Mittelwerte ergeben:

1) Die Pfeile entsprechen der Zeitmitte zwischen Anfang und Ende $1^h\,37'\,40''$.

Strom: $K_i = 10848{,}6$ Ohm
Spannung: $K_s = 10858{,}8$ „
Element: $K_e = 10895{,}7$ „

Die Abweichungen der beobachteten Einstellungen von dem graphisch ermittelten mittleren Gang übersteigen nicht 10^{-4} des Wertes, so daß die abgeleiteten Mittelwerte auf mindestens diesen Betrag zuverlässig sind.

Die Mittelzahlen für K_i, K_s, K_e und die zugehörigen Temperaturen für τ_1, τ_2, τ_3 und das Normalelement V sind in Tab. IX (S. 358) zusammengestellt; daraus ist dann nach den oben angegebenen Formeln die nicht in die Tabelle aufgenommene Leistung EJ berechnet, die dann noch wegen der Temperaturen usw. in der angegebenen Weise korrigiert worden ist. Über die Berechnung des Heizwiderstandes aus diesen Zahlen ist bereits das Nötige mitgeteilt.

c) *Zeitmessung.* Da die Dauer des Stromschlusses durchschnittlich 6 Minuten beträgt, so muß bei der angestrebten Genauigkeit von einem Zehntausendstel die Zeitmessung auf wenigstens 0,03 Sekunden genau ausgeführt werden. Hierzu diente ein von der Firma Peyer, Favarger u. Co. in Neuchatel (Schweiz) gelieferter Chronograph mit zwei Schreibfedern. Die Regulierung der Geschwindigkeit geschieht bei diesem Chronographen durch eine schwingende Feder, die in das Steigrad des Uhrwerks eingreift, so daß der Apparat mit ganz konstanter Geschwindigkeit läuft; er ist so justiert, daß einer Sekunde der Abstand von 1 cm auf dem abrollenden Papierstreifen entspricht. Die eine Schreibfeder wird von einer Normaluhr betätigt, die wöchentlich mit der Sternwartenzeit verglichen wird. Die Uhr besitzt ein Pendel mit Rieflerscher Kompensation und hat einen sehr regelmäßigen Gang. Die Form der Zeitmarken ist aus Fig. 11 ersichtlich (obere Kurve). Die Marken für den Anfang und das Ende des Versuches wurden als kleine Zacken erhalten, die beim Schließen und Öffnen des Stroms durch Aufladen oder Entladen von Kondensatoren automatisch entstanden. Die Anordnung hierfür zeigt die Fig. 8. Darin bedeutet B die Batterie (140 Volt), C die Konden-

Chronographenstreifen.
Fig. 11.

satoren, S den Schlüssel zum Schließen und Öffnen des Heizstromes, E den Schreibelektromagnet des Chronographen. Die einer Akkumulatorenbatterie von 140 Volt entnommene Spannung wurde vor der Messung längere Zeit an einen Ersatzwiderstand R'' gelegt, der dieselbe Größe wie der Heizwiderstand besaß, damit der Strom beim Versuch selbst hinreichend konstant war. Beim Schließen des Stroms durch den Schlüssel S (Schalter U_1) wurden gleichzeitig die unter Spannung stehenden Kondensatoren entladen, wobei der durch den Schreibmagnet fließende Stromstoß eine zackenförmige Marke hervorrief (Fig. 11). Beim Öffnen des Stroms am Schluß der Heizperiode wurden in gleicher Weise die Kondensatoren aufgeladen, so daß eine Zacke von genau derselben Form entstand. Der Zeitmoment des Öffnens und Schließens des Stroms war dadurch scharf markiert. Durch sorgfältige Ausmessung der Sekundenmarken und der zackenförmigen Marken konnte die Zeit auf etwa ein Zehntausendstel gemessen werden.

d) *Temperaturmessung.*

α) *Theorie.*

Den schwierigsten Teil der Messung bildete die Ermittlung der durch die elektrische Energie bewirkten Temperaturerhöhung des Kalorimeters.

Es handelt sich dabei einerseits um die Bestimmung der beobachteten Temperaturerhöhung, die wegen der Veränderung der Kalorimetertemperatur durch den Wärmeaustausch mit der Umgebung von der Wahl der für die Messung geltenden Zeitpunkte abhängt; andererseits handelt es sich um die Ermittlung der Korrektion, welche man an der tatsächlich gemessenen Temperaturerhöhung wegen des Wärmeaustausches mit der Umgebung anzubringen hat. Die beobachtete Temperaturerhöhung ist auf diejenige zurückzuführen, welche eingetreten sein würde, wenn kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattgefunden hätte.

Den unsichersten Teil der Messung bildet gerade diese letztere Korrektion, die sich auf die Anwendung des Newtonschen Abkühlungsgesetzes gründet, dessen Bedingungen aber nur schwierig genau zu erfüllen sind.

Zur Ermittlung der Temperaturerhöhung kommt es darauf an, eine kleine Temperaturdifferenz mit möglichster Genauigkeit

in Einheiten der normalen Temperaturskala[1]) zu bestimmen; die Temperatur selbst braucht nur ungenau bekannt zu sein, da sich die spezifische Wärme des Wassers nur wenig mit der Temperatur ändert. Man muß also den in Einheiten der Normalskala ausgedrückten *Gradwert* des zur Temperaturmessung benutzten Instrumentes an jeder in Frage kommenden Stelle der Skala kennen. Wenn es sich um ein Platinthermometer handelt, so muß also der *Differentialquotient* du_p/du der sogenannten „Platintemperatur" den Messungen zugrunde gelegt werden.

Allgemeine Betrachtungen. Zu diesem Zweck sei zunächst an die bekannten Gleichungen für das Platinthermometer erinnert. Wird für den Widerstand r_u des Platins bei der Normaltemperatur u die quadratische Formel:

$$r_u = r_0 (1 + \alpha u + \beta u^2) \tag{9}$$

benutzt, so ist die Temperaturdifferenz Δ zwischen der Platintemperatur u_p

$$u_p = \frac{r_u - r_0}{r_{100} - r_0} \cdot 100 \tag{10}$$

und der Normaltemperatur u:

$$\Delta = u_p - u = \delta \left[\frac{u}{100} - \left(\frac{u}{100} \right)^2 \right], \quad ^2) \tag{11}$$

worin

$$\delta = - \frac{\beta \cdot 10^4}{\alpha + 100\,\beta}.$$

Für Platin ist α ungefähr $= 3{,}9 \cdot 10^{-3}$, $\beta = - 0{,}6 \cdot 10^{-6}$, so daß bei 50° Δ nahe $= + 0{,}4°$, beim Schwefelsiedepunkt (444,5°) $= - 28°$ und $\delta = - 1{,}57$ ist.

---

1) Als normale Temperaturskala bzw. Normalskala wird im folgenden die Temperaturskala der Physikal.-Technisch. Reichsanstalt (*P T R*) bezeichnet, vgl. Wärmetabellen der *P T R* (Vieweg & Sohn, Braunschweig 1919). Ann. d. Phys. 48. S. 1034. 1915 und Zeitschr. f. Instrk. 36. S. 20. 1916. Näheres über die Normalskala vgl. S. 333.

2) Für die Temperaturen zwischen 0° und 100° ist folgende Formel bequemer:

$$u_p - u = \frac{\delta}{4} \left[1 - \left(\frac{u - 50}{50} \right)^2 \right].$$

Für den oben genannten Differentialquotienten (c) folgt also[1]):

$$(12) \qquad c = \frac{d(u_p)}{du} = 1 + \frac{\delta}{100}\left(1 - \frac{2u}{100}\right) = 1 - \frac{\delta}{100}\left(\frac{u - 50}{50}\right).$$

Bei 50° ist $c = 1$, d. h. der Gradwert des Thermometers entspricht bei dieser Temperatur der Normalskala; am größten ist die Abweichung von diesem Wert bei 0° und 100°, wenn man nur das Intervall 0—100° ins Auge faßt; hier ist $c = 1 \pm 0{,}01\,\delta$, also $c = 1 \pm 0{,}015$.

Soll der Gradwert c auf 10^{-4} sicher sein, so muß δ in dem angegebenen Fall auf 6 Promille zuverlässig bekannt sein.

Das Platinthermometer wird jetzt meist durch die Fixpunkte 0°, 100° und den Schwefelsiedepunkt (444,55°) bei 760 mm geeicht[2]) unter Zugrundelegung einer quadratischen Formel. Die dadurch definierte Skala, welche die Temperaturskala der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt darstellt, ist in dieser Mitteilung als normale Temperaturskala, bzw. *Normalskala* bezeichnet. In der quadratischen Temperaturformel wird der Faktor $\alpha + 100\,\beta = (r_{100} - r_0)/100\,r_0$ durch die Fixpunkte bei 0° und 100° bestimmt, während β, das die Durchbiegung der Skala bedingt, durch den Schwefelfixpunkt festgelegt wird. Bezeichnet r_s den Widerstand beim Schwefelsiedepunkt s, so ist

$$(13) \qquad \beta = \frac{1}{100\,s}\left[\frac{100\,r_s - s\,r_{100}}{r_0\,(s - 100)} + 1\right].$$

Die Unsicherheit von δ ist im wesentlichen bedingt durch eine Unsicherheit des Schwefelsiedepunktes. Da Δ für diese Temperatur etwa −23° beträgt, so muß der Schwefelpunkt auf 0,15° sicher sein, wenn c auf 10^{-4} richtig sein soll. Mit dieser Genauigkeit muß also auch die Eichung beim Schwefelpunkt durchgeführt werden, während die Eichung bei 0° und 100° mit einer Genauigkeit von etwa 0,01° vorgenommen werden muß. Die Zuverlässigkeit des Schwefelsiedepunktes ist für den vorliegenden Zweck gerade ausreichend.

Um die thermometrischen Grundlagen der vorliegenden Messungen in erhöhtem Maße sicherzustellen, haben wir die

1) Vgl. Ann. d. Phys. **42**. S. 1165. 1914 und **45**. S. 1089. 1914.
2) Anm. 1 S. 332.

hier benutzten Platinthermometer noch auf eine stets reproduzierbare Temperaturskala, die durch die Quarz-Quecksilber-Widerstandsthermometer dargestellt wird, bezogen.[1])

Wärmeaustausch mit der Umgebung. In engem Zusammenhang mit der Messung der Temperaturerhöhung steht die Korrektion wegen des Wärmeaustausches der Kalorimeterwandung mit der umgebenden Hülle. Die theoretischen Betrachtungen hierfür sind bereits in diesen Ann. a. a. O. (vgl. das Zitat S. 806), ausgehend von dem Newtonschen Abkühlungsgesetz, behandelt worden. Für die vorliegenden Messungen sind diese Betrachtungen insofern noch erweitert worden, als die Veränderung der Außentemperatur während der Messung und die Widerstandsänderung der Vergleichswiderstände berücksichtigt werden mußten. Im folgenden sind die zur Berechnung der Temperaturerhöhung und der oben angegebenen Korrektion aus den Widerstandsmessungen der Thermometer erforderlichen Gleichungen in dieser allgemeineren Form abgeleitet.

Die Grundgleichung, von der sämtliche Berechnungen ausgehen, ist das Newtonsche Abkühlungsgesetz:

$$v = \frac{du}{dt} = -\,a(u - u_0') \text{ Grad/Min.}, \tag{14}$$

in welchem u die Temperatur der Kalorimeterwandung, u_0' die als linear mit der Zeit veränderlich angesehene Außentemperatur, t die Zeit in Minuten und a den Abkühlungsfaktor bedeuten. $v = du/dt$ ist die Temperaturänderung der Kalorimeterwandung in Minuten, welche in den Gängen vor Beginn der Heizung (Vorversuch) und nach Beendigung (Nachversuch) derselben als linear angesehen werden kann. Die Größe a ist nur dann eine Konstante des Apparates, wenn die Temperaturdifferenz $u - u'$ klein genug ist, d. h. nur wenige Grad beträgt, weil sonst die Konvektionsströme der zwischen der Kalorimeterwandung und der umgebenden Hülle befindlichen Luft den regelmäßigen, durch Wärmeleitung und Strahlung bewirkten Wärmeaustausch stören. Der Faktor a gibt die Abnahme der Temperatur in 1 Minute an, wenn u einen Grad höher als u_0' ist.

Eine weitere Voraussetzung der Gleichung besteht darin, daß die Temperatur u der Oberfläche des Kalorimeters überall

1) Vgl. auch Ann. d. Phys. 48. S. 1165. 1914.

die gleiche ist und daß sie derjenigen Temperatur entspricht, die mittels des Thermometers im Innern des Kalorimeterwassers gemessen wird. Zur Erreichung dieser beiden Bedingungen ist es erforderlich, daß das Wasser des Kalorimeters sehr vollkommen durchgerührt wird.

Wird die Außentemperatur als konstant angenommen und dementsprechend mit u_0 bezeichnet, so liefert die Gleichung (14), wenn u_A den Wert von u zur Zeit $t = 0$ darstellt, die Beziehung:

$$u - u_0 = (u_A - u_0)\, e^{-at}. \tag{15}$$

Die Temperaturdifferenz $u - u_0$ nimmt also streng genommen nach einer Exponentialfunktion ab, doch kann diese Abnahme, wenn es sich nur um kleinere Zeiten handelt, bei der Kleinheit von a (diese Größe beträgt bei den vorliegenden Messungen etwa 0,0007 min^{-1}) als linear angesehen werden. Wie gering die Abweichung vom linearen Gang in diesem Fall ist[1]), ersieht man daraus, daß die strenge Formel für 1 Stunde erst eine Abweichung von $^1/_{1000}{}^0$ vom linearen Verlauf ergibt, wenn die ursprüngliche Temperaturdifferenz $u_A - u_0$ einen Grad betrug. Bei den Temperaturgängen am Anfang und Ende des Versuchs handelt es sich aber meist nur um 10—20 Minuten. Man kann die Temperaturgänge $v = du/dt$ somit als vollkommen linear ansehen.

Ist die Außentemperatur u_0' variabel und werden die Zeiten, die man als Anfang und Ende der Messung betrachtet und die innerhalb der Gänge v beliebig gewählt werden können, mit t_1 und t_2 bezeichnet, so erhält man aus Gleichung (14) die gesamten infolge des Wärmeaustausches mit der Umgebung eingetretenen Temperaturänderungen A[2]) als:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt = -a \int_{t_1}^{t_2} (u - u_0')\, dt. \tag{16}$$

Das Integral der Gleichung (16) wird durch Fig. 12 dargestellt; der Betrag desselben ist gleich der Differenz der schraffierten Teile I und II.

---

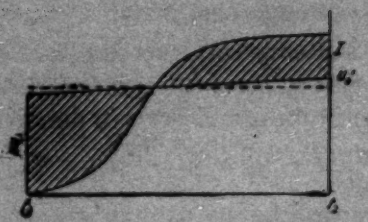
1) Die Abweichung vom linearen Verlauf beträgt angenähert:

$$\sigma = (u_A - u_0)\,\frac{a^2 t^2}{2}.$$

2) Der Temperaturzuwachs wird als positiv angesehen.

Den Betrag A hat man der beobachteten Temperaturerhöhung[1])

(17) $$U = u_2 - u_1$$



Flächenintegral für die Korrektion.

Fig. 12.

hinzuzufügen, um die wahre Temperaturerhöhung U' zu erhalten, die man bei adiabatischem Vorgang gemessen haben würde. Man hat also zu setzen:

(18) $$U' = U + a\int_{t_1}^{t_2}(u - u_0')\,dt.$$

Aus den zu den Zeiten t_1 und t_2 beobachteten Temperaturgängen v_1 und v_2 läßt sich aber die Größe a berechnen. Im allgemeinen ist die Temperatur des Mantels (Außentemperatur) u_0' während des Versuchs nicht ganz konstant, so daß dem Zeitpunkt t_1 die Temperatur $(u_0')_1$, dem Zeitpunkt t_2 die Temperatur $(u_0')_2$ entspricht.

Setzt man zur Abkürzung:

(19) $$\Delta u_0' = (u_0')_2 - (u_0')_1 \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{\Delta u_0'}{u_2 - u_1} = \frac{\Delta u_0'}{U},$$

wo $U = u_2 - u_1$ nur annähernd bekannt zu sein braucht, so ergibt sich aus den Temperaturgängen v_1 und v_2:

(20) $$a = -\frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \cdot \frac{1}{1 - \zeta}$$

und

(21) $$U' = U - \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \cdot \frac{1}{1 - \zeta}\int_{t_1}^{t_2}(u - u_0')\,dt.$$

1) Die den Zeiten t_1 und t_2 entsprechenden Größen sollen durchweg mit dem Index 1 und 2 bezeichnet werden.

Einführung des Widerstandes. Führt man aus Gleichung (9) den Widerstand r_u des Thermometers ein und setzt zur Abkürzung:

$$(22)\quad \gamma = \frac{2\beta}{\alpha};\quad B = \frac{1}{r_0\,\alpha} = \frac{100}{r_{100} - r_0}(1 + 50\gamma),\quad u_m = \frac{u_1 + u_2}{2},$$

so folgt:

$$(23)\quad \frac{r_1 - r_2}{\alpha\, r_0} = (u_1 - u_2)(1 + \gamma\, u_m)$$

und:

$$(24)\quad U = u_2 - u_1 = \frac{B}{1 + \gamma\, u_m}(r_2 - r_1),\quad v = \frac{du}{dt} = \frac{B}{1 + \gamma\, u}\frac{dr}{dt}.$$

In v_1 und v_2 kann man, da es sich um Korrektionsglieder handelt, statt $(1 + \gamma\, u_1)$ und $(1 + \gamma\, u_2)$ mit genügender Annäherung $(1 + \gamma\, u_m)$ setzen, so daß sich ergibt:

$$(25)\quad v_2 - v_1 = \frac{B}{1 + \gamma\, u_m}\left(\frac{dr_2}{dt} - \frac{dr_1}{dt}\right).$$

Man erhält dann schließlich aus Gleichungen (21), (24), (25):

$$(26)\quad U = \frac{B}{1 + \gamma\, u_m}\left\{(r_2 - r_1) - \left(\frac{dr_2}{dt} - \frac{dr_1}{dt}\right)\frac{1}{1 - \zeta}\,\frac{\int_{t_1}^{t_2}(u - u_0)\,dt}{u_2 - u_1}\right\}.$$

Das zweite Glied in der Klammer stellt die Korrektion wegen des Wärmeaustausches dar, das erste entspricht der gemessenen Temperaturdifferenz.

Einführung des Nebenschlusses. Die kleinen Änderungen der Temperatur bei den Gängen sind durch die Veränderungen von Nebenschlüssen gemessen worden, die an feste Widerstände gelegt waren. Diese Nebenschlüsse und ihre Differentialquotienten seien mit N und ν bezeichnet, so daß man, wenn R den festen Widerstand bezeichnet, zu setzen hat:

$$(27)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{N}\quad \text{und}\quad \nu = \frac{dN}{dt}.$$

Führt man noch ein: $\varepsilon = 1 + N/R$, so ergibt sich

$$(28)\quad r = \frac{N}{\varepsilon}\quad \text{und}\quad \frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \nu + \left(\frac{N}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{R^2}\frac{dR}{dt}.$$

Falls dR/dt, d. h. die Änderung des festen, in Petroleum stehenden Widerstandes, mit der Temperatur klein und konstant ist, folgt dann für Gleichung (26)

$$(29)\quad \begin{cases} U' = \dfrac{B}{1+\gamma u_m} \\ \times \left\{ \dfrac{N_2}{\varepsilon_2} - \dfrac{N_1}{\varepsilon_1} - \left[\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)^2 \nu_2 - \left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)^2 \nu_1 + \eta\right] \dfrac{1}{1-\zeta} \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} (u - u_0')\, dt}{u_2 - u_1} \right\}, \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$(30)\quad \eta = \frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} \left[\left(\frac{N_2}{\varepsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{N_1}{\varepsilon_1}\right)^2\right].$$

Nun ist weiter

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{N_2}{\varepsilon_2} - \dfrac{N_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{N_2 - N_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \dfrac{N_1 N_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) = \dfrac{N_2 - N_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \\ \qquad\qquad + \dfrac{N_1 N_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \dfrac{R_2 - R_1}{R^2}; \end{cases}$$

denn da es sich im zweiten Glied um eine Korrektion handelt und R_1 wenig von R_2 abweicht, kann man statt R_1, R_2 und R, überall R setzen. Nimmt man an, daß sich R linear mit der Temperatur ändert, was bei den kleinen in Betracht kommenden Temperaturdifferenzen erlaubt ist, so kann man schreiben:

$$(32)\quad R = R_0 [1 + \alpha' (u' - 18^0)], \quad R_2 - R_1 = R_0 \alpha' (u_2' - u_1'),$$

wo R_0 den Widerstand von R bei 18^0, u' seine Temperatur und α' den Temperaturkoeffizienten bedeutet.

Wird nun noch zur Abkürzung eingeführt:

$$(33)\quad \vartheta = \frac{N_1 N_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{\alpha'}{R} (u_2' - u_1'),$$

so folgt für die korrigierte Temperaturerhöhung die Gleichung:

$$(34)\quad U' = \frac{B}{1+\gamma u_m} \left\{ \frac{N_2 - N_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \vartheta - \left(\frac{\nu_2}{\varepsilon_2^2} - \frac{\nu_1}{\varepsilon_1^2} + \eta\right) \frac{1}{1-\zeta} \frac{\int_{t_1}^{t_2} (u - u_0')\, dt}{u_2 - u_1} \right\}.$$

Gleichmäßige Änderung der Manteltemperatur. Wenn sich die Temperatur u_0' während des Versuchs gleichmäßig ändert, so kann man setzen:

$$(35)\quad u_0' = u_0 \{1 + \lambda (t - t_m)\},$$

wo

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

und λ die Änderung der Temperatur in einer Minute ist. Dann wird:

$$\int_{t_1}^{t_2} u_0' \, dt = u_0 (t_2 - t_1), \tag{36}$$

d. h., wenn man den Mittelwert u_0 von u_0' zugrunde legt, kann man rechnen, als ob u_0' konstant gleich u_0 wäre.

Für ein konstantes u_0 folgt nun aus Gleichung (14)

$$u_0 = \frac{v_2 u_1 - v_1 u_2}{v_2 - v_1} \quad \text{und} \quad u_0 - u_1 = -\frac{v_1 (u_2 - u_1)}{v_2 - v_1}, \tag{37}$$

und ferner unter Beachtung von Gleichung (24) für v und Gleichung (28) für dr/dt[1])

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} (u_0' - u_1)\, dt}{u_2 - u_1} = -\frac{v_1}{v_2 - v_1}(t_2 - t_1) = \frac{-\frac{\nu_1}{s_1^2}}{\frac{\nu_2}{s_2^2} - \frac{\nu_1}{s_1^2}}\,\Theta, \tag{38}$$

wenn $\Theta = t_2 - t_1$ gesetzt wird. Fig. 13a, schraffierter Teil, stellt dieses Integral dar.

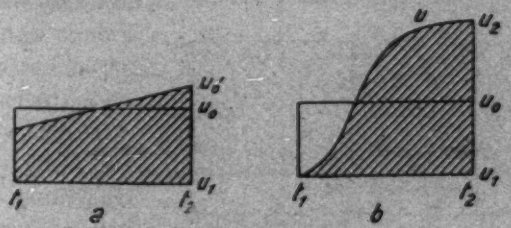


Fig. 13 (Flächenintegrale).

Man kann nun das Integral der Gleichung (34) in folgender Weise zerlegen:

$$\int_{t_1}^{t_2} (u - u_0')\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (u - u_1)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} (u_0' - u_1)\, dt, \tag{39}$$

worin das zweite Integral dann durch Gleichung (38) ausgedrückt werden kann, während das erste Integral die ganze zwischen u und u_1 liegende Fläche (Fig. 13b, schraffierter Teil) darstellt. Dadurch nimmt die Gleichung für die Tempe-

1) Das Korrektionsglied mit dR/dt kann hier fortgelassen werden. Vgl. S. 343 (3).

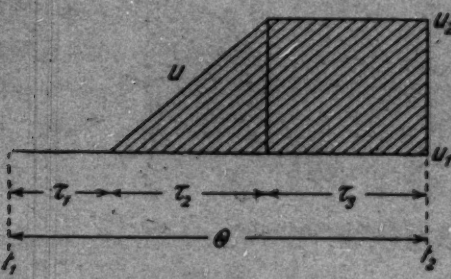
raturerhöhung U' die für die direkte Berechnung aus den beobachteten Größen bequeme Form an:

$$(40)\quad \begin{cases} U' = \dfrac{B}{1+\gamma u_m} \\ \times \left\{ \dfrac{N_2 - N_1}{s_1 s_2} + \vartheta - \dfrac{1}{1-\zeta}\left[\dfrac{r_1}{s_1^2}\Theta + \left(\dfrac{r_2}{s_2^2} - \dfrac{r_1}{s_1^2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \dfrac{(u-u_1)\,dt}{u_2 - u_1} \right] \right\}. \end{cases}$$ [1])

Das erste Glied der Klammer stellt das Hauptglied dar, die beiden anderen sind Korrektionsgrößen.[2]) Das in der Gleichung noch enthaltene Integral hängt von der Form der Erwärmungskurve bei Stromdurchgang ab, wozu der Verlauf der Temperatur u durch einen besonderen Versuch festgestellt werden muß.

Einführung einer bestimmten Form der Fläche $\int_{t_1}^{t_2} (u-u_1)\,dt$.

Im vorliegenden Fall ist das erwähnte Integral sehr einfach zu berechnen, da sich die Begrenzung aus geraden Linien zusammensetzt und die Fläche daher allgemein berechnet werden kann (vgl. hierzu Fig. 15). Zur bequemeren Berechnung ist daher Gleichung (40) noch entsprechend umgeformt worden.



Form der Fläche.

Fig. 14.

Wie nebenstehende Fig. 14 zeigt, läßt sich das Integral in folgender Form darstellen:

$$(41)\quad \int_{t_1}^{t_2} (u-u_1)\,dt = \frac{\tau_2}{2}(u_2-u_1) + \tau_3(u_2-u_1) = \left(\frac{\tau_2}{2} + \tau_3\right)(u_2-u_1).$$

Die ganze Zeitdauer $\Theta = t_2 - t_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ zerfällt in die drei Abschnitte: Vorperiode τ_1, Hauptperiode τ_2, Nachperiode τ_3.

1) Die Korrektionsgröße η ist hier fortgelassen, weil sie, wie auf S. 343 gezeigt ist, stets zu vernachlässigen ist.

2) Die Korrektionen betragen im Maximum etwa 1 Proz. des Wertes.

Die Vorperiode erstreckt sich bis zu der Zeit, zu welcher der Temperaturanstieg beginnt. Die Zeitdifferenz zwischen Stromschluß und Beginn des Anstiegs, die ungefähr 0,36 Minuten betrug, wurde durch besondere Versuche ermittelt. Für die Berechnung des das Integral enthaltenden Korrektionsgliedes kann man annehmen, daß in Vor- und Nachperiode die Temperatur des Kalorimeters ganz konstant ist und sich in dem Zeitintervall τ_2 von u_1 bis u_2 linear ändert.

Man erhält dann schließlich die bei den vorliegenden Messungen benutzte Formel:

$$(42)\quad \begin{cases} U' = \dfrac{B}{1+\gamma u_m} \\ \times \left\{ \dfrac{N_2 - N_1}{s_1 s_2} + \vartheta - \dfrac{1}{1-\zeta} \left[\dfrac{\nu_1}{s_1^2} \left(\tau_1 + \dfrac{\tau_2}{2} \right) + \dfrac{\nu_2}{s_2^2} \left(\tau_3 + \dfrac{\tau_2}{2} \right) \right] \right\}. \end{cases}$$

Nach dieser Formel sind die später mitgeteilten Beobachtungen berechnet worden. Der Übersichtlichkeit wegen seien im folgenden die für die Formel in Betracht kommenden *Hilfsgrößen* zusammengestellt, die z. T. aus den Gleichungen (19 bis 33) abzuleiten, z. T. bereits angegeben sind.

$$(43)\quad \begin{cases} B = \dfrac{1}{r_0 \alpha} = \dfrac{100}{r_{100} - r_0}(1 + 50\gamma), \ \gamma = \dfrac{2\beta}{\alpha}, \text{ siehe auch Gl. (9).} \\ u_m = \dfrac{u_1 + u_2}{2} = \dfrac{B}{1+50\gamma}(r_m - r_0) - \dfrac{\delta}{4}\left\{1 - \left(\dfrac{u-50}{50}\right)^2\right\}, \\ \qquad r_m = \dfrac{r_1 + r_2}{2}, \text{ s. a. Gleichung auf S. 332 Anm. 1,} \\ \varepsilon = 1 + \dfrac{N}{R}, \quad \nu = \dfrac{dN}{dt}, \text{ siehe auch Gl. (27),} \\ \vartheta = \dfrac{N_1 N_2}{s_1 s_2} \dfrac{\alpha'}{R}(u_2' - u_1'), \text{ siehe auch Gl. (32), (Korrektion für Änderungen von } R), \\ \zeta = \dfrac{\Delta u_0'}{u_2 - u_1}, \text{ siehe auch Gl. (19), (Korrektion für Änderung von } u_0), \\ a = \dfrac{s_1 s_2}{N_2 - N_1}\left[\dfrac{\nu_1}{s_1^2} - \dfrac{\nu_2}{s_2^2}\right]\dfrac{1}{1-\zeta}, \ v_0 = u_m \\ \qquad + \dfrac{B}{1+\gamma u_m}\left[\dfrac{\nu_1}{s_1^2} + \dfrac{\nu_2}{s_2^2}\right]\dfrac{1}{2a}, \text{ s. a. Gl. (14, 20, 31).} \end{cases}$$

Wegen der Größe τ vgl. Fig. 14; die den Zeiten t_1 und t_2 (Einheit = 1 Minute) entsprechenden Größen sind mit dem Index 1

und 2 bezeichnet. N ist der an den Vergleichwiderstand gelegte Nebenschluß. u_0 ist die Außentemperatur zur Zeit $(t_1 + t_2)/2$.

Abkühlungsfaktor a. Für jeden Versuch ist nach der obenstehenden Formel (vgl. Gleichung (14), S. 334) der Abkühlungsfaktor a berechnet worden; eine weitere Benutzung haben diese Werte nicht gefunden. In Tab. IV sind die Werte von a gruppenweise zusammengestellt. Das Mittel aller Versuche ist etwa $70 \cdot 10^{-5}$ 1/Min.; d. h. bei einem Temperaturunterschied von einem Grad des Kalorimeters gegen den Mantel ändert sich die Temperatur des Kalorimeters bei konstant bleibender Außentemperatur um 0,0007° in der Minute, also um einen außerordentlich geringen Betrag.

Tabelle IV.

$10^5\,a$	Nummern der Versuche
44	72
49—55	18, 20, 48, 49, 69
55—60	19, 21, 31, 32, 33, 37, 46, 71, 79, 83, 94
60—65	36, 38, 47, 50, 70, 72, 74, 75, 77, 78, 81, 82, 84, 85, 96, 100, 101, 105, 109
65—70	66, 76, 86, 87, 88, 90, 95, 97, 99, 102
70—75	59, 65, 80, 91, 93, 98
75—80	52, 58, 103
80—85	54, 56, 67, 89, 92, 104, 108
86	68
92	53
95—100	60, 63
101	62
107	57
122	61
125	110
128	64
157	111

Diskussion der Korrektionsgrößen.

1. *Die Größe* ζ hängt von der Änderung der Außentemperatur ab; nimmt man für eine Versuchsdauer von 10 Minuten an

$$\Delta u_0' = (u_0')_2 - (u_0')_1 = 0{,}05^0$$

(entsprechend einer Änderung von 0,3° in der Stunde), so folgt bei $u_2 - u_1 = 2^0$ für den Faktor $1 - \zeta = 0{,}975$. Die gesamte Flächenkorrektion [Faktor, der mit $1/(1 - \zeta)$ multipliziert ist, vgl. auch Gleichung (21) und Fig. 12] erreicht im Maximum

etwa 1 Proz. des Hauptgliedes, so daß in diesem Falle durch die Änderung der Außentemperatur eine Korrektion von 0,00025 des Wertes erforderlich ist.

2. *Die Größe* ϑ hängt von der Änderung der Temperatur des Meßwiderstandes R ab. Nimmt man für diese Änderung in einer Versuchsdauer von 10 Minuten an: $u_2' - u_1' = 0{,}05^0$, ferner $R = 7$ Ohm und den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes $\alpha' = +\,2{,}5 \cdot 10^{-5}$ pro Grad, so erhält man für $N_1/\varepsilon_1 = 7{,}120$ und $N_2/\varepsilon_2 = 7{,}155$[1]): $\vartheta = 7 \cdot 10^{-6}$. Da durchschnittlich das Hauptglied

$$\frac{N_2 - N_1}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} = 0{,}034$$

ist, so beträgt die Korrektion ϑ in diesem Fall etwa 2 Zehntausendstel dieses Wertes.

3. Die Größe

$$\eta = \frac{1}{R^2}\,\frac{dR}{dt}\left[\left(\frac{N_2}{\varepsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{N_1}{\varepsilon_1}\right)^2\right],$$

vgl. Gleichung (29) und (30), hängt auch von der Änderung des Meßwiderstandes R ab. Für die Änderung von R mit der Zeit t kann man setzen:

$$\frac{dR}{du'} \cdot \frac{du'}{dt} = R\alpha' \frac{du'}{dt}\,.$$

Macht man wieder die gleichen Annahmen wie bei ϑ, so folgt $\eta = 7 \cdot 10^{-9}$. Dieser Wert ist in Vergleich zu setzen mit

$$\left(\frac{\nu_2}{\varepsilon_2^2} - \frac{\nu_1}{\varepsilon_1^2}\right),$$

vgl. Gleichung (29), einer Größe, die durchschnittlich etwa $-2{,}24 \cdot 10^{-5}$ beträgt (z. B. $\nu_1 = +0{,}011$, $\nu_2 = -0{,}92$, $\varepsilon_1 = 104{,}545$, $\varepsilon_2 = 207{,}486$). Die Korrektion η beträgt somit etwa

$$\frac{7 \cdot 10^{-9}}{2{,}2 \cdot 10^{-5}} = 3 \cdot 10^{-4}$$

der Flächenkorrektion. Da aber die letztere im Maximum etwa 1 Proz. des Hauptgliedes erreicht, ist η stets zu vernachlässigen und deshalb auch in Gleichung (42) nicht mehr enthalten.

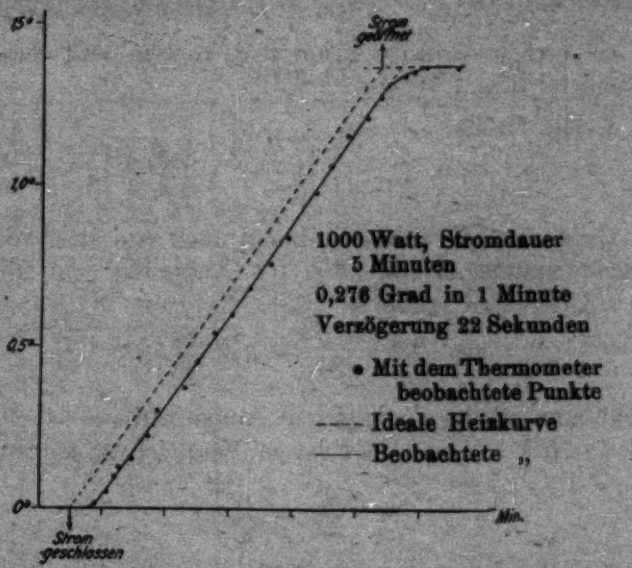
---

1) Diese beiden Werte können hier gleichgesetzt werden; die Zahlen sind einem der Versuche entnommen.

β) Experimenteller Teil.

Ausführung der Temperaturmessungen. Der Temperaturverlauf im Kalorimeter während der Heizung, der nach den vorstehenden Ausführungen für die Korrektion wegen der äußeren Wärmeleitung bekannt sein muß, ist ein für allemal bestimmt worden, da die kleinen Änderungen wegen des Wärmeaustausches mit der Umgebung für diese Temperaturkurven ohne Einfluß sind.

Die Messungen wurden mit einem der bereits erwähnten Platinthermometer bei 20° C. ausgeführt. Die Widerstandsänderung des Platindrahtes beträgt bei dieser Temperatur



Anstieg der Kalorimetertemperatur bei der Heizung.

Fig. 15.

ca. 4 Prom. für einen Grad. Das Thermometer wurde mit einem aus Manganinbüchsen zusammengesetzten Vergleichswiderstand von 7,4 Ohm hintereinander geschaltet und mit einem Meßstrom von 0,01 Amp. beschickt. Die Spannungen an den Enden des Meß- und Vergleichswiderstandes wurden durch einen Kompensationsapparat verglichen. Die Messung der Temperatur geschah jedoch der schnelleren Ablesung wegen mit Ausschlägen des Galvanometers, die mittels des Kompensationsapparates auf Widerstandsänderungen vorher zurück-

geführt waren. Einem Grad entsprach ein Ausschlag von 140 Skalenteilen. Zur Erwärmung des Kalorimeters diente die S. 315 beschriebene Heizspule, die mit 10 Amp. belastet wurde (Leistung 1 KW.), so daß die Erwärmung bei einer Stromdauer von 5 Min. 1,4° betrug. Der Anstieg pro Minute war 0,276°.[1]) Die nebenstehende Kurve (Fig. 15) gibt das Ergebnis der Messungen (vgl. auch Fig. 14). Die mit dem Thermometer beobachteten Temperaturen sind durch Punkte gekennzeichnet. Durch diese Punkte ist die ausgezogene Kurve hindurchgelegt. Wenn keine festen Teile im Kalorimeter vorhanden wären, und die Wärme sofort nach dem Schließen des Stromes an das Wasser abgegeben würde, müßte man die punktierte Kurve erhalten.

Die Verzögerung des Anstieges beträgt 22 Sekunden. Der Anstieg zeigt nur eine geringe Abrundung der Kurve am Anfang, was im wesentlichen auf die verhältnismäßig geringe Menge fester Teile zurückzuführen ist. Interessant ist in dieser Beziehung der Vergleich mit der bei dem Berthelotschen Verbrennungskalorimeter erhaltenen Kurve, die infolge größerer Mengen fester Teile einen wesentlich anderen Verlauf zeigt.

Zum Zweck der Messung der Temperaturerhöhung U' handelt es sich, wie früher gezeigt wurde, darum, die Temperaturgänge am Anfang und Ende des Versuchs genau zu bestimmen und die absolute Temperaturdifferenz zweier als Anfang und Ende willkürlich gewählter Punkte zu ermitteln.

Da es hierbei auf sehr genaue Widerstandsmessungen ankommt — denn ein Zehntausendstel der Temperaturdifferenz von 1,4° entspricht einer Widerstandsdifferenz von dem Bruchteil eines Milliontels des Widerstandswertes —, so wurde der Vergleichswiderstand aus Manganinbüchsen zusammengesetzt, die in Petroleum standen, damit sich ihr Widerstand möglichst wenig änderte.

Die Widerstandsvergleichung kann nun in verschiedener Weise vorgenommen werden; es stehen hierfür folgende Methoden zur Verfügung: 1. Kompensationsapparat, 2. Thomsonbrücke, 3. Differentialgalvanometer. Eine nähere Prüfung zeigte, daß

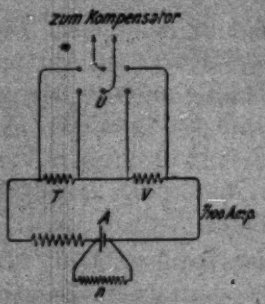
---

1) Bei den Messungen selbst betrug die Stromdauer 6 Min. bei einer Leistung von 800 Watt, wodurch die Verhältnisse nur unwesentlich geändert werden.

zich die letztere Methode für den vorliegenden Zweck bei weitem am besten eignete.

Eine Reihe von Messungen wurde zuerst mit dem Kompensationsapparat ausgeführt, worüber hier kurz berichtet sei.

Die Anordnung (vgl. Fig. 16) war der oben beschriebenen ähnlich und entspricht der bei Messungen mit Widerstandsthermometern gebräuchlichen Methode. Das Widerstandsthermometer T und der aus Manganinbüchsen zusammengesetzte Vergleichswiderstand V waren hintereinander geschaltet und wurden von einem Strom von etwa 0,01 Amp. durchflossen. Durch einen Umschalter U konnten die Spannungen an den Enden der beiden Widerstände abwechselnd mittels eines Kompensators von kleinem Widerstand gemessen werden. Der Kompensationsstrom hatte dieselbe Größenordnung wie der Meßstrom.



Thermometermessung mittels Kompensator

Fig. 16.

Als Thermometer diente bei diesen Versuchen das bereits erwähnte Nickelthermometer, zum Teil ein von Heräus in Hanau geliefertes Thermometer, bei dem der Platindraht in Quarz eingeschmolzen war. Die Widerstände beider Thermometer betrugen etwas über 7 Ohm. Als Galvanometer diente ein Drehspulinstrument für geringen Widerstand.[1]) Einer Änderung der Einstellung am Kompensator von $^1/_{10000}$ Ohm (kleinste Einheit des Kompensators) entsprach ein Ausschlag von 20 Skalenteilen, so daß etwa $1^0 = 4500$ Skalenteilen war. Die letzten in den folgenden Tabellen angegebenen, kleingedruckten Ziffern sind aus den Ausschlägen interpoliert. Damit die Einstellungen mit dem Kompensator möglichst rasch vorgenommen werden konnten, waren die Vergleichswiderstände den Thermometerwiderständen durch Anlegen eines Nebenschlusses nahe gleich gemacht, so daß die Einstellungen für beide Widerstände nahe dieselben waren. Im folgenden sind 2 Beispiele für eine solche Messung des Temperaturgangs vor dem Schließen des Stroms (Vorversuch) mitgeteilt.

1) W. Jaeger, Zeitschr. f. Instrk. 28. S. 206. 1908.

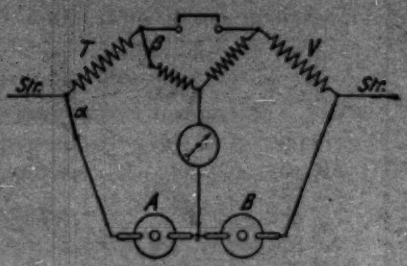
Tabelle.

Nr. 1 Vorversuch 13. 6. 11 Einstellung des Kompensators			Nr. 3 Vorversuch 14. 6. 11 Einstellung des Kompensators		
Zeit 12^h	V Ohm	T Ohm	Zeit 11^h	V Ohm	T Ohm
47′ 17″	$5{,}9049_8$	—	50′ 50″	$5{,}9069_2$	—
49′ 10″	—	$5{,}9062_5$	52′ 0″	—	$5{,}9369_4$
50′ 0″	49_8	—	53′ 13″	68_8	—
50′ 43″	—	62_9	53′ 46″	—	69_2
51′ 53″	49_9	—	54′ 32″	68_5	—
52′ 46″	—	63_3	55′ 20″	—	69_6
53′ 25″	49_9	—	55′ 50″	68_4	—
54′ 13″	—	63_9	56′ 27″	—	69_3
54′ 50″	50_0	—	56′ 54″	68_0	—
55′ 24″	—	64_1	57′ 58″	—	69_3
55′ 58″	50_0	—	58′ 42″	67_6	—
57′ 11″	—	64_6	59′ 02″	—	69_3
57′ 50″	50_2	—	59′ 38″	67_5	—
58′ 46″	—	64_9			
59′ 53″	50_0	—			
0′ 40″	—	65_3			

Aus diesen Zahlen ist die bei allen Beobachtungen dieser Art mehr oder weniger auftretende Erscheinung zu ersehen, daß auch die Einstellungen des Kompensators für den Vergleichswiderstand einen Gang zeigen, der z. B. bei Nr. 3 etwa 3mal größer ist als derjenige des Thermometers selbst; der letztere entspricht einer Temperaturzunahme von etwa $^2/_{1000}{}^0$ und geht hier im entgegengesetzten Sinn. Um den wirklichen Gang des Thermometers zu erhalten, muß man die beiden Gänge kombinieren. Die Ursache der scheinbaren Veränderung von V liegt in der Inkonstanz der Stromstärke des Kompensators, die sich im Lauf der 9 Minuten um etwa $^3/_{100000}$ geändert hat. Wir haben vergeblich versucht, diesen für die Berechnung des Versuchs unbequemen Gang zu beseitigen, z. B. durch Anbringung eines Nebenschlusses n an den Akkumulator A (Fig. 16). Außerdem zeigten sich mitunter auch kleine Unregelmäßigkeiten, die wohl von den Vorgängen in den beiden Batterien herrühren. Deshalb wurde diese Methode der Messung aufgegeben.

Ebenso erschien es auch nicht zweckmäßig, die Thomsonbrücke zu verwenden, und zwar wegen des mit der Temperatur veränderlichen Widerstands der Zuleitungsdrähte zu dem

Thermometerwiderstand, von denen nur der eine (β) Fig. 17 überbrückt werden kann, während der andere (α), der zu dem Verzweigungswiderstand A hinzukommt, jedesmal gemessen und berücksichtigt werden muß.



Thermometermessung mittels Thomson-Brücke.

Fig. 17.

Diese Unbequemlichkeit wird bei Anwendung des Differentialgalvanometers (Fig. 8) vermieden, da hierbei die Zuleitungen ganz herausfallen. Die endgültigen Messungen wurden daher alle mittels des Differentialgalvanometers angestellt.

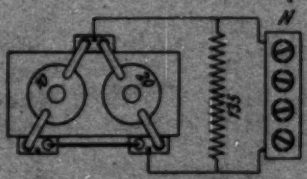
Wegen der Ausführung der Kohlrauschschen Methode des übergreifenden Nebenschlusses sei auf die früheren Mitteilungen hierüber verwiesen.[1]) Fig. 8, S. 324, zeigt die Anordnung, bei der T das Thermometer, R mit dem Nebenschluß N den Vergleichswiderstand, U_3 den früher (Ann. d. Phys., a. a. O. S. 44) beschriebenen Umschalter, g_1, g_2 die getrennt gezeichneten Rollen des Differentialgalvanometers bedeuten. Die in die Galvanometerzweige eingeschalteten Widerstände w_1 und w_2, sowie der Nebenschluß n dienen zu der früher beschriebenen Abgleichung des Galvanometers. Die Abgleichung wird so ausgeführt, daß bei Gleichheit von T und V nur ein kleiner Ausschlag entsteht, der sich dann beim Umlegen des Kommutators nicht ändert. Bei Ungleichheit der beiden zu vergleichenden Widerstände werden die Ausschläge, die bei Umlegen des Kommutators entstehen, so kombiniert, daß alle Ungleichheiten der Anordnung herausfallen.

Der Vergleichswiderstand V wurde aus Manganinbüchsen R, die in einem Petroleumbad standen, so zusammengesetzt, daß er dem Widerstand des Thermometers bei der betreffenden Temperatur sehr nahe gleich war. Durch einen an diese Kombination gelegten Nebenschluß N, der aus einem Kurbelwiderstand gebildet wurde, konnte dann völlige Gleichheit

1) W. Jaeger, Zeitschr. f. Instrk. 24. S. 290. 1904; W. Jaeger und H. v. Steinwehr, Ann. d. Phys. 21. S. 43, 50. 1906.

hergestellt und gegebenenfalls auch der genaue Wert aus Ausschlägen interpoliert werden. Bei den Temperaturgängen wurde die Gleichheit der Widerstände T und V daran erkannt, daß sich der vorhandene kleine Ausschlag des Galvanometers beim Umlegen des Kommutators U_3 nicht änderte. Bei langsamen Temperaturänderungen wurde der Widerstand an dem Nebenschluß N eingestellt, und die zugehörige Zeit notiert, bei schnelleren Gängen wurde die Zeit aus dem Durchgang des Galvanometers durch die Gleichgewichtslage bestimmt, indem der Schalter während des Ganges fortwährend umgelegt wurde. Wenn sich dann beim Umlegen des Kommutators der Ausschlag nicht änderte, wurde die zugehörige Zeit notiert. Etwas störend waren dabei kleine Nullpunktsschwankungen des Galvanometers, doch konnten die Einstellungen bei einiger Übung gut ausgeführt werden.

Als Meßbeispiel ist wieder der Versuch Nr. 39 gewählt. Im folgenden sind die Messungen der Temperaturgänge vor und nach der Heizung des Kalorimeters (Vor- und Nachversuch) angegeben. Der Vergleichswiderstand wurde aus Manganinbüchsen von 10 und 20 Ohm gebildet, die, wie Fig. 18 zeigt, parallel geschaltet waren und in einem Petroleumbade standen. Diesen Büchsen parallel lag noch ein fester Nebenschluß von 135 Ohm aus einem Widerstandskasten und außerdem der von einem Kurbelkasten gebildete Nebenschluß N, der während der Messung entsprechend der Widerstandsänderung des Thermometers variiert wurde. In der Tab. X für die Beobachtungen ist diese Parallelschaltung der Widerstände ausgedrückt durch die symbolische Bezeichnung:



Vergleichswiderstand für die Temperaturmessung.

Fig. 18.

$$10//20//135//N.$$

Der Meßstrom, der durch das Thermometer und den Vergleichswiderstand floß, betrug 0,005 Amp. Das als Differentialinstrument benutzte Kugelpanzergalvanometer von Du Bois-Rubens war auf etwa 8 Sekunden halbe Schwingungsdauer astasiert; der Widerstand jedes Rollenpaares betrug 51 Ohm, dem noch 9 Ohm vorgeschaltet waren, (Gesamtwiderstand

also 60 Ohm). An einen der Vorschaltwiderstände war aus dem früher angegebenen Grund ein Nebenschluß gelegt, der bei der Messung passend abgeglichen wurde. Die Skala hatte einen Abstand von 5 m, war aber mit einer Teilung in Doppelmillimeter versehen, so daß für die Empfindlichkeitsrechnung ein Abstand von 2500 Skalenteilen anzunehnen ist. Bei dieser Anordnung entsprach der Änderung von N (400 Ohm) um 1 Ohm ein einseitiger Ausschlag von 37 Skalenteilen, so daß also 1 Skalenteil $= 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ des Widerstandes oder etwa gleich $0{,}0003^0$ war, oder anders ausgedrückt: es entsprach $1^0 =$ etwa 4000 Skalenteilen, so daß also $0{,}00001^0$ noch abgelesen werden konnten.

Der Widerstand des Nebenschlusses N betrug beim Vorversuch etwa 409, beim Nachversuch etwa 617 Ohm.

Die Messungen sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten:

Nr. 33 (12. 12. 1912).

Vorversuch		Nachversuch	
Zeit	N	Zeit	N
1^h	Ohm	1^h	Ohm
21′ 38″	408,4	40′ 40″	Strom geöffnet
22′ 09″	408,5	44′ 50″	617,4
22′ 58″	408,6	45′ 59″	617,3
24′ 32″	408,7	46′ 38″	617,3
25′ 30″	408,8	47′ 32″	617,3
27′ 21″	408,9	48′ 31″	617,3
28′ 39″	409,0	49′ 34″	617,3
30′ 11″	409,1	52′ 40″	617,2
31′ 17″	409,2	53′ 37″	617,2
32′ 16″	409,3	54′ 38″	617,2
34′ 03″	409,4	55′ 29″	617,2
34′ 40″	Strom geschlossen		

Beim Vorversuch ist, wie man sieht, der Nebenschluß eingestellt, und die Zeit beobachtet worden, bei der dann der Vergleichswiderstand dem Widerstand des Thermometers gleich war, d. h. das Galvanometer beim Umlegen des Kommutators seinen Ausschlag nicht änderte. Beim Nachversuch ist der Gang so klein, daß die Zeitmessung nicht sehr genau zu sein brauchte. Der Nebenschluß änderte sich nur sehr wenig, so daß die früher erwähnte Abgleichung von Zeit zu Zeit neu vorgenommen werden konnte. Der Unterschied der Neben-

schlüsse (617 und 409 Ohm) im Nach- und Vorversuch gibt ein Maß für die Temperaturerhöhung des Thermometers. Gleichzeitig liefern die Messungen die Temperaturgänge des Kalorimeters vor und nach der Heizung.

Die Messungen wurden graphisch aufgetragen (vgl. Fig. 19); die durch die beobachteten Punkte hindurchgelegten geraden Linien zeigen, daß die Fehler der einzelnen Ablesungen sehr gering sind. Zur Beurteilung der Fehler ist der Maßstab in Graden angegeben. Die Fehler übersteigen nicht 0,0001°. Meist bleiben sie aber erheblich unter dieser Größe. In welcher Weise diese Messungen weiter verwertet werden, wird unten

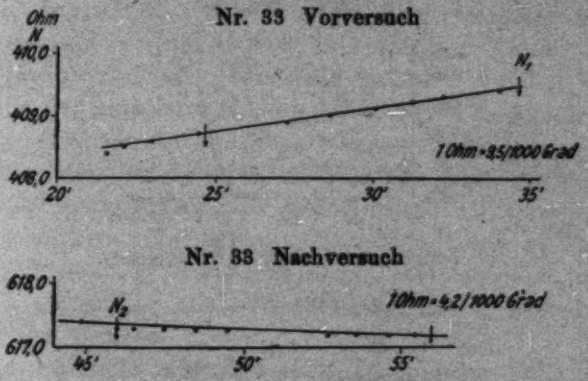


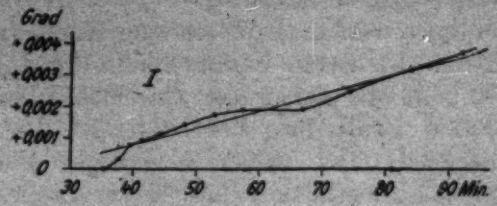
Fig. 19. Temperaturgänge.

gezeigt. Die mit N_1 und N_2 bezeichneten Pfeile entsprechen Anfang und Ende der Hauptperioden; die beiden anderen Pfeile bezeichnen Anfang und Ende der Temperaturgänge.

Zunächst soll noch erst kurz auf die Versuche eingegangen werden, die angestellt wurden, um zu ermitteln, mit welcher Genauigkeit man kleine Temperaturgänge des Kalorimeters messen kann. Es ist erstaunlich, welche kleinen Gänge noch der exakten Messung zugänglich sind.

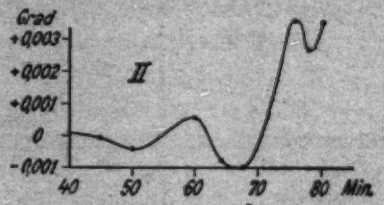
Die Messungen sind mit dem bereits erwähnten Platinthermometer Heräusscher Konstruktion (Platindraht in Quarz eingeschmolzen) angestellt, das nach unseren besonderen Angaben gefertigt worden war. Es war dies ein Thermometer, mit besonders großer Abkühlungskonstante, das bei einer Belastung mit 1 Amp. nur eine Temperaturerhöhung von etwa

4° über die Wassertemperatur zeigte. (Ein Callendarsches Thermometer erwärmte sich bei solcher Belastung zum schwachen Glühen.) Man konnte daher das Heräusthermometer mit einem



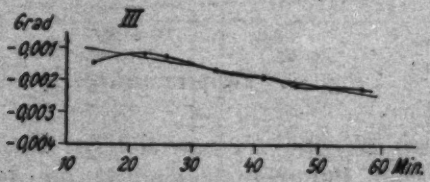
43 Touren, 0,08 Amp. $\frac{du}{dt} = +\ 0°{,}000052$ pro Min.

Fig. 20a.



19 Touren, 0,08 Amp. $\frac{du}{dt}$ unsicher.

Fig. 20b.



19 Touren, 0,04 Amp. $\frac{du}{dt} = -\ 0{,}000032$ Grad/Min.

Fig. 20c.

Messung äußerst kleiner Temperaturgänge und Einfluß der Rührgeschwindigkeit.

verhältnismäßig hohen Meßstrom belasten, und dadurch die Meßempfindlichkeit sehr steigern.

Der Widerstand des Thermometers betrug etwas über 7 Ohm, die Strombelastung 0,08 Amp. Die Messung geschah in der oben beschriebenen Weise durch Änderung eines Nebenschlusses. Das wie bei den obigen Messungen geschaltete Kugel-

panzergalvanometer ergab ein Skalenteil Ausschlag für eine Widerstandsänderung von $0{,}55 \cdot 10^{-6}$, entsprechend einer Temperaturerhöhung von 0,00013°; 1° würde also einem Ausschlag von 7400 Skalenteilen entsprochen haben. Die Temperaturmessungen wurden in dem Kalorimeter vorgenommen, dessen Manteltemperatur der Innentemperatur sehr nahe gleich gemacht war, so daß nur sehr kleine Gänge zu erwarten waren.

Die Güte der Beobachtung hing bei jeder Strombelastung von der Geschwindigkeit des Rührens ab, wie aus den Figg. 20a bis 20c hervorgeht. Bei der oben angegebenen Strombelastung von 0,08 Amp. mußte der Rührer etwa 48 Umdrehungen in der Minute machen, um die Stromwärme des Thermometers genügend abzuführen. Wie Fig. 20a zeigt, konnte dann ein Temperaturgang von nur 0,0003° in der Stunde (also 0,000005° in der Minute) noch mit Sicherheit gemessen werden; die Abweichungen der einzelnen Messungen betragen dann nur wenige Zehntausendstel Grad. Bei einer Rührgeschwindigkeit von nur 19 Touren erhält man dagegen, wie Fig. 20b zeigt, einen unregelmäßigen Temperaturgang, der zur Messung nicht geeignet ist. Dagegen reicht dieselbe Rührgeschwindigkeit von 19 Turen für eine Strombelastung von 0,04 Amp., wie aus der Fig. 20c ersichtlich ist, völlig aus. Hier beträgt der Temperaturgang 0,002° in der Stunde.

Wenn nunmehr auf das oben angegebene Beispiel einer Temperaturmessung zurückgegangen wird, so handelt es sich jetzt darum, aus den mitgeteilten Zahlen die Temperaturerhöhung des Kalorimeters mit Hilfe der angegebenen Formeln zu berechnen. Zunächst ergeben sich aus den graphisch abgelesenen Zahlen folgende Differenzen der Nebenschlüsse und ihrer Gradienten. Für 10 Minuten:

Vorversuch: $+ 0{,}75$ Ohm, also $\nu_1 = + 0{,}075$.
Nachversuch: $- 0{,}18$ Ohm, also $\nu_2 = - 0{,}018$.

Als Anfang und Ende des Versuchs sind die Zeiten $1^h\,34'\,40''$ (Stromschluß) und $1^h\,46'\,0''$ gewählt. (Die genaue Zeit der Heizdauer, welche mit dieser Zeitdifferenz nicht identisch ist, folgt aus Tab. IX S. 358); die graphische Darstellung ergibt dann

$1^h\,34'\,40'' : N_1 = 409{,}47$ Ohm
$1^h\,46'\,0'' : N_2 = 617{,}36$ Ohm
$\Theta = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 11'\,20'' : N_2 - N_1 = 207{,}89$ Ohm.

Diese Zahlen, welche die direkten Beobachtungsresultate darstellen, sind in der Tab. X, S. 360, angegeben. Alle Zahlen sind in der vorstehend mitgeteilten Weise gewonnen.

Die ganze Versuchsdauer $\Theta = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ beträgt im vorliegenden Fall 11,833 Minuten. τ_1 ist bei allen Versuchen = 0,86 Minuten, da der Stromschluß als Anfang des Versuchs gewählt ist. Die Zeitdauer der Heizung beträgt bei den Versuchen Nr. 108—111 10 Minuten, bei Nr. 73 6,5 Minuten, bei allen anderen Versuchen von Nr. 18—107, also auch bei dem gewählten Beispiel, 6 Minuten. Die Zeit τ_3 ergibt sich als Differenz $\tau_3 = \Theta - (\tau_1 + \tau_2)$ und ist in der Tab. X, S. 360, angegeben. Im vorliegenden Fall ist also $\tau_3 = 4{,}973$ Minuten. Aus diesen Angaben folgt:

$$\tau_1 + \frac{\tau_2}{2} = 3{,}36 \text{ Minuten}^{1}), \quad \tau_3 + \frac{\tau_2}{2} = 7{,}973 \text{ Minuten}.$$

Zum Zweck der weiteren Berechnung muß zunächst der Widerstand R bei 18° ermittelt werden (vgl. S. 337). Die Korrektionen der bei den Messungen verwendeten Widerstandsbüchsen aus Manganin, aus denen der Widerstand R im wesentlichen gebildet wird, sind in der folgenden Tab. V zusammengestellt:

Tabelle V.

Manganinbüchsen.

Betrag Ohm	Nr.	Korrektion 10^{-6} bei 18° C.	Temp.-Koeff. bei 18°C.
10	788	− 125	+ 9,1
10	4948	+ 24	—
20*	2008	+ 549	—
20	4949	+ 76	—
5	4946	+ 12	—
1	2838	+ 96	—

* Verzweigungsbüchse.

Die 20 Ohm-Büchse Nr. 4949 ist von Versuch Nr. 79 an benutzt, bei den früheren Versuchen kam die Verzweigungsbüchse Nr. 2008, die wegen der zusätzlichen Widerstände eine größere Korrektion besitzt, zur Anwendung. Die Korrektionen sind in Millionteln des Sollwerts angegeben. Bei dem Versuch Nr. 33, bei welchem $R = 10//20//135$ Ohm ist (S. 349), wurden

1) Wie bei allen Versuchen Nr. 18—107, mit Ausnahme von 37.

die Büchsen Nr. 788 und 2008 verwendet. Für den Widerstand von 185 Ohm, der einem Kasten entnommen war, brauchte keine Korrektion angebracht zu werden, da diese nur etwa mit dem zwanzigsten Teil ihres Betrages eingeht. Der Widerstand R, bzw. dessen reziproker Wert berechnet sich also wie folgt:

$$\begin{aligned} 1/10 &= 0{,}1000127 \\ 1/20 &= 0{,}0499750 \\ 1/185 &= 0{,}0074074 \\ \hline \left(\frac{1}{R}\right)_{18°} &= 0{,}157395 \,(R = 6{,}35343 \text{ Ohm}). \end{aligned}$$

Nach Formel (43), S. 341, folgt nun weiter:

$$\varepsilon_1 = 65{,}447, \quad \varepsilon_2 = 98{,}168,$$

und für das Hauptglied der Gleichung (42)

$$\frac{N_2 - N_1}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2} = 0{,}0323574\,.$$

Das Korrektionsglied ζ ist im vorliegenden Falle 0, da nach Tab. X, S. 360, $u_0' = 0$ ist; d. h. die Manteltemperatur war hier konstant. Zur Berechnung von ϑ (Formel 43) diente die Angabe $u_2' - u_1' = +\,0{,}04°$ in Tab. X, S. 360, d. h. die Temperatur von R ist um 0,04° während der Messung gestiegen. Daraus folgt:

$$\vartheta = +\,27 \cdot 10^{-7}$$

Das Korrektionsglied der Gleichung (42) wegen des Wärmeaustausches des Kalorimeters mit der Umgebung ergibt sich aus den bereits angegebenen Zahlenwerten:

$$\frac{1}{1-\zeta}\left[\frac{\nu_1}{\varepsilon_1^2}\left(\tau_1 + \frac{\tau_2}{2}\right) + \frac{\nu_3}{\varepsilon_2^2}\left(\tau_3 + \frac{\tau_2}{2}\right)\right] = 0{,}439 \times 10^{-4},$$

somit ist der gesamte Klammerausdruck der Gleichung (42) gleich 0,0323162. Diese Größe ist nun noch mit dem Faktor $B/(1 + \gamma\, u_m)$, der sich aus den Konstanten des Thermometers (vgl. S. 356) ergibt, zu multiplizieren, um die korrigierte Temperaturerhöhung des Kalorimeters zu finden. Dann findet man die Mitteltemperatur u_m durch die Beziehung:

$$u_m = 100\,\frac{r_m - r_0}{r_{100} - r_0} - \frac{\delta}{4}\left[1 - \left(\frac{u - 50}{50}\right)^2\right].$$

In dem mit δ multiplizierten Faktor braucht die Temperatur $u = u_m$ nur angenähert bekannt zu sein; eventuell wird eine zweite Annäherung gerechnet.

Im vorliegenden Fall (Versuch Nr. 33), in dem das Thermometer *H 23* benutzt worden war, ist $N_1/\varepsilon_1 = 6{,}2565$, $N_2/\varepsilon_2 = 6{,}2888$, daher $r_m = 6{,}2726$, $r_m - r_0 = 0{,}4261$ und $u = 18{,}64 - 0{,}22 = 18{,}42^0$. Daraus folgt $B/(1 + \gamma \cdot u) = 43{,}329$, somit $U' = 0{,}0323162 \cdot 43{,}329 = 1{,}40022$ Grad.

Konstanten der Thermometer H 23 und E 1.

Der Anschluß der Platinthermometer *H 23* und *E 1* (vgl. S. 317 u. 332) an die Normalskala unter Zugrundelegung des von den Herren Holborn und Henning bestimmten Schwefelsiedepunktes ist bereits früher beschrieben worden[1]), so daß hier auf diese Mitteilung verwiesen sei.

Tabelle VI.

Konstanten der Thermometer.

	H 23	*E 1*
$\alpha + 100\beta = (r_{100} - r_0)/r_0$	0,391061	0,391523
r_0	$5{,}84653_5$	$6{,}04515_8$
δ	1,493	1,480

Daraus ergeben sich die folgenden Werte für B, γ usw. Es ist $\gamma = -2\,\delta/(10^4 + 100\,\delta)$, $B = 100\,(1 + 50\,\gamma)/(r_{100} - r_0)$.

Tabelle VII.

	$100/(r_{100} - r_0)$	$1 + 50\delta$	B	γ
H 23	43,7378	0,98529	43,0944	$-\ 2{,}94216 \cdot 10^{-4}$
E 1	42,2508	$0{,}98541_6$	41,6346	$-\ 2{,}91683 \cdot 10^{-4}$

Für die Werte $B/(1 + \gamma \cdot u)$ sind von Grad zu Grad fortschreitende Tabellen aufgestellt worden, die im folgenden von 10 zu 10° angegeben sind.

Tabelle VIII.

u	$B/(1 + \gamma \cdot u)$	
	H 23	*E 1*
0°	43,094	41,635
10°	43,221	41,757
20°	43,349	41,879
30°	43,478	42,002
40°	43,608	42,126
50°	43,738	42,251
60°	43,869	42,377

1) Vgl. Anm. 1 S. 317.

Diese Werte sind der Berechnung der Temperaturerhöhung zugrunde gelegt. Hierzu muß die Temperatur

$$u_m = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

bekannt sein, deren Berechnung oben angegeben ist.

Die gleichzeitige Messung dieser beiden und eines dritten Thermometers E_2 im Kalorimeter bei den Temperaturen 18, 23 und 50° ergab bei Benutzung der angegebenen Konstanten eine Übereinstimmung von einigen Tausendsteln Grad (a. a. O. Anm. S. 334).

e) *Beispiel: Versuch Nr. 33.*

Zur Berechnung der Wärmekapazität A nach Versuch Nr. 33 sind jetzt alle Werte ermittelt. Es ist

$$E \cdot J = 819{,}93 \text{ Watt},$$
$$T = 360{,}09 \text{ Sek.},$$
$$G = 50448{,}0 \text{ g},$$
$$U' = 1{,}40022^0.$$

Daraus folgt dann

$$A = \frac{EJT}{G \cdot U'} \frac{\text{Wattsek.}}{g \cdot \text{Grad}},$$

also für das betrachtete Beispiel

$$A = \frac{819{,}93 \cdot 360{,}09}{50448{,}0 \cdot 1{,}40022} = 4{,}1797 \frac{\text{Wattsek.}}{\text{Gramm} \cdot \text{Grad}} \text{ bei } 18{,}42^0\,\text{C}.$$

Ferner ist für jeden Versuch noch die Abkühlungskonstante a (Gleichung 43) berechnet. Aus den Werten von

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 / (N_2 - N_1)\ (\text{S. } 355), \quad \zeta = 0$$

und aus

$$\nu_1 / \varepsilon_1^2 = +\,0{,}175 \cdot 10^{-5}, \quad \nu_2 / \varepsilon_2^2 = -\,0{,}019 \cdot 10^{-4}$$

folgt für den Versuch Nr. 33

$$a = 0{,}194 \cdot 10^{-4} / 0{,}03236 = 59{,}9 \cdot 10^{-5} = 0{,}00059_9.$$

Für sämtliche Beobachtungen sind die Beobachtungsergebnisse in den Tabb. IX u. X, S. 358 ff., zusammengestellt. Zwischenwerte der Berechnung sind nicht angegeben.

Tabelle IX.

Beobachtungsdaten zur Berechnung der Heizenergie.

Nr.	Datum	Kompensationswiderstand für Strom K_i	Spannung K_e	Element K_v	Temperatur der Widerstände τ_1	τ_2	τ_3	des Elements V	Dauer des Stromschlusses T
	1911	Ohm	Ohm	Ohm					Sekunden
18	24. 11.	10884	10892	10839	18,5°	18,0°	29,0°	18,5°	359,85
19	25. 11.	845	853	836_5	18,2	17,5	24,0	18,7	359,98
20	2. 12.	811	819_5	845_5	20,0	19,5	26,0	20,5	360,39
21	2. 12.	810_3	820_5	846	20,4	19,6	28,0	20,5	359,95
	1912								
31	20. 1.	844	854	862	17,7	16,7	25,5	18,1	360,12
32	20. 1.	841	851_5	862	17,8	17,0	28,0	18,2	360,01
33	12. 2.	848_6	858_8	895_7	19,2	18,6	26,0	18,7	360,09
35	14. 2.	888_6	899_5	895	18,7	18,0	27,0	19,0	359,91
36	14. 2.	873	883	895	18,9	18,1	29,2	19,0	359,96
37	16. 2.	862_9	873_7	897_5	19,2	18,8	24,0	19,9	360,03
38	16. 2.	852_3	864	897_5	19,5	18,8	28,0	20,1	360,02
46	19. 3.	693_7	703_4	623_5	16,8	16,2	24,0	17,2	359,90
47	19. 3.	690_1	700_1	623_5	17,0	16,3	27,0	17,3	360,14
48	22. 3.	664	671_9	630	17,5	17,0	25,0	17,7	359,92
49	22. 3.	655	664	630	17,8	17,2	29,0	18,0	360,10
50	23. 3.	631_5	640_3	630	17,9	17,5	27,0	18,2	359,95
51	23. 3.	629_2	638_8	629_8	18,2	17,5	30,0	18,4	360,01
52	29. 3.	742_3	748	638_6	16,2	15,8	26,5	16,5	359,86
53	29. 3.	731_5	738	638_5	16,5	15,9	28,0	16,6	359,99
54	30. 3.	688	697_1	641_2	15,2	14,8	25,0	15,3	360,04
55	30. 3.	672_2	682_8	641_9	15,4	15,0	28,0	15,6	360,22
56	2. 4.	630_4	639	646_3	15,8	15,3	27,0	16,0	360,00
57	2. 4.	620	629	646_5	16,1	15,4	28,0	16,2	360,05
58	3. 4.	741_1	751_8	833	16,4	15,5	24,0	16,9	359,99
59	3. 4.	591_8	601	684_8	17,1	16,3	30,0	17,5	359,95
60	15. 4.	633_9	642	719	15,0	14,1	23,5	15,4	359,90
61	15. 4.	616_8	625_4	718_5	15,5	14,5	25,0	15,8	360,03
62	16. 4.	834_3	841_8	719	16,8	16,0	30,5	17,2	359,83
63	16. 4.	825_5	833	719_5	17,3	16,3	32,0	17,3	359,86
64	17. 4.	713_7	721_9	721	17,2	16,5	24,0	17,5	359,98
65	7. 5.	280_1	287_7	9786	19,7	19,2	26,0	19,4	360,00
66	7. 5.	978_8	986	10735_5	20,0	19,3	30,0	19,5	359,90
67	8. 5.	670_7	679_4	466_5	20,0	19,6	34,0	19,7	360,18
68	8. 5.	664	673_2	466_1	20,1	19,7	35,0	19,8	359,89
69	13. 5.	457	463_4	482_1	18,8	18,3	28,0	18,9	359,89
70	13. 5.	448_3	454_9	482_1	18,9	18,5	30,0	19,0	360,10
71	14. 5.	440_6	445_2	486_5	18,0	17,7	22,0	18,2	360,00
72	14. 5.	424_8	430_5	486_5	18,3	17,8	26,0	18,3	360,10
73	15. 5.	642_3	650	487	18,5	18,2	23,0	18,8	390,04
74	15. 5.	608	616_5	486_7	18,8	18,5	27,0	19,0	360,15
75	15. 5.	567_3	575_7	486_5	19,2	18,8	33,0	19,4	359,89
76	15. 5.	556_5	565_3	486_5	19,5	19,0	34,0	19,5	360,05
77	22. 5.	555_7	567_9	505_3	19,2	18,7	35,0	18,8	360,07

Tabelle IX (Fortsetzung).

Nr.	Datum	Kompensationswiderstand für Strom K_i	Spannung K_e	Element K_v	Temperatur der Widerstände r_1	r_2	r_3	Temperatur des Elements V	Dauer des Stromschlusses T
	1912	Ohm	Ohm	Ohm					Sekunden
78	22. 5.	10547_6	10559_9	10505_5	19,2	18,8	35,0	18,8	360,08
79	25. 5.	600_4	613_1	513_3	18,2	17,8	32,0	17,9	359,96
80	25. 5.	570_6	583_5	513_3	18,3	18,0	32,0	18,0	360,01
81	30. 5.	446	459	389_9	17,4	16,7	29,5	17,1	360,09
82	30. 5.	443_3	456_6	389_3	17,8	17,0	31,0	17,4	359,85
83	30. 5.	427_2	441_3	389_1	18,8	18,0	36,0	18,4	359,88
84	30. 5.	424_3	438_3	389	19,0	18,1	36,0	18,6	359,91
85	31. 5.	529_1	544_5	390_3	18,3	17,6	26,0	17,7	360,10
86	31. 5.	516_7	532_6	390_3	18,5	17,8	28,0	17,9	359,96
87	1. 6.	497_7	514_3	388_9	19,0	18,5	26,5	18,4	359,90
88	1. 6.	493_9	510_8	388_9	19,0	18,5	29,0	18,5	359,93
89	1. 6.	793_9	812	388_7	19,1	18,7	30,0	18,6	359,99
90	1. 6.	701	719_3	388_6	19,3	18,7	32,0	18,7	360,12
91	3. 6.	218	234_4	390_3	19,3	18,7	34,0	18,7	359,96
92	3. 6.	218_3	235_6	390_3	19,5	19,0	35,0	18,8	359,93
93	12. 6.	381_5	393	401	19,5	19,0	29,0	19,0	359,98
94	12. 6.	383_7	393_6	401	19,6	19,1	31,0	19,2	359,92
95	14. 6.	376_5	394_1	404	19,5	18,8	31,0	18,8	360,03
96	14. 6.	362_8	381	404	19,8	19,3	35,0	19,0	359,95
97	14. 6.	362_8	380_9	403_6	20,0	19,3	36,0	19,2	360,07
98	20. 6.	332_7	348_4	412_2	20,0	19,0	33,0	19,3	359,98
99	20. 6.	330	346_2	412	20,0	19,3	34,0	19,5	359,99
100	25. 6.	396_8	406	415_4	19,8	19,5	25,0	19,5	360,06
101	25. 6.	380_7	390_7	415_5	20,0	19,8	29,0	19,6	359,67
102	25. 6.	386_8	396_8	416_4	20,5	20,0	27,0	19,9	360,02
103	25. 6.	368_4	379	415_4	20,5	20,0	29,0	20,0	359,68
104	27. 6.	530_6	548_4	417_8	20,8	20,0	30,0	20,0	359,98
105	27. 6.	522_7	540_9	417_5	21,0	20,0	32,0	20,1	359,90
106	1. 7.	459_7	478_4	421_5	21,6	21,0	35,0	20,6	360,07
107	1. 7.	453	472_2	421_5	21,8	21,0	36,0	20,8	359,99
108	3. 7.	416_3	429_9	425_5	20,7	20,5	31,0	20,2	599,85
109	3. 7.	409_3	422_9	425_9	21,0	20,6	34,0	20,3	599,89
110	4. 7.	417	432	427	20,5	20,1	29,0	20,2	599,96
111	4. 7.	398	413_6	426_7	21,0	20,4	32,0	20,4	599,85

Erläuterungen zu Tab. IX.

Die Größen K_i, K_e, K_v sind die Kompensatoreinstellungen in Ohm für die Stromstärke J, die Spannung E und das Normalelement V (vgl. Fig. 8 und Beispiel S. 329). Die Werte K_i usw. sind, wie aus dem Beispiel hervorgeht, bereits Mittelwerte von einzelnen Beobachtungen. Die Werte für die Widerstände r_1, r_2, r_3 und für ihre Temperaturkoeffizienten sind auf S. 326

Tabelle X. Beobachtungsergebnisse zur Berechnung der Temperaturerhöhung und Wassergewichte.

Nr.	Nebenschluß zu R am Anfang N_1	Nebenschluß zu R am Ende N_2	Nebenschlußgradient am Anfang ν_1	Nebenschlußgradient am Ende ν_2	Nachperiode τ_2	Vergleichswiderstand R	Temperaturänderung von R $u_2' - u_1'$	Änderung der Außentemperatur $\Delta u_0'$	Korrigiert. Wassergewicht G
	Ohm	Ohm	Ohm/min	Ohm/min	Minuten	Ohm			Gramm
18	645,25	1398,6	+ 0,228	+ 0,22	7,89	10//20//124	+ 0,07°	+ 0,07°	50458,8
19	660,49	1442,4	+ 0,160	− 0,25	5,14	10//20//133	+ 0,08	0,00	458,7
20	411,75	619,62	+ 0,071	− 0,006	3,64	10//20//154,15	+ 0,02	+ 0,01	457,8
21	619,51	1229,4	− 0,006	− 0,75	3,64	10//20//154,15	+ 0,03	+ 0,02	457,8
31	474,18	784,10	+ 0,119	+ 0,030	6,31	10//20//120	+ 0,05	− 0,01	451,1
32	784,40	2195,00	+ 0,030	− 2,10	3,64	10//20//120	+ 0,04	0,00	451,1
33	409,47	617,36	+ 0,075	− 0,018	4,98	10//20//135	+ 0,04	0,00	448,0
35	422,68	649,86	+ 0,080	− 0,026	5,14	10//20//135	+ 0,04	− 0,01	447,7
36	649,60	1372,80	− 0,026	− 1,00	3,64	10//20//135	+ 0,03	− 0,01	447,7
37	409,43	614,90	+ 0,082	0,00	0,64	10//20//151	+ 0,03	− 0,01	447,4
38	614,90	1210,3	0,00	− 0,73	6,14	10//20//151	+ 0,06	− 0,01	447,4
46	403,34	620,65	+ 0,029	− 0,130	10,14	10//(10 + 5 + 1 + 1)//1550	+ 0,08	0,00	49858,1
47	619,35	1317,0	− 0,130	− 1,47	3,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//1550	+ 0,05	0,00	858,1
48	381,01	573,74	+ 0,061	− 0,011	16,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//400	+ 0,11	+ 0,02	50244,9
49	573,60	1139,3	− 0,011	− 0,66	5,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//400	+ 0,06	+ 0,03	244,9
50	396,05	597,65	+ 0,038	− 0,066	10,22	10//(10 + 5 + 1 + 1)//1900	+ 0,08	− 0,01	244,9
51	597,00	1195,2	− 0,066	− 1,00	3,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//1900	+ 0,05	− 0,01	244,9
52	398,77	638,95	+ 0,158	+ 0,095	7,39	10//(10 + 5 + 1)//311,05	+ 0,05	—	215,8
53	639,90	1564,0	+ 0,095	− 1,52	2,64	10//(10 + 5 + 1)//311,05	+ 0,04	+ 0,02	215,8
54	411,53	649,89	+ 0,088	− 0,094	14,06	10//(10 + 5 + 1 + 1)//261,05	+ 0,08	+ 0,03	215,8
55	648,95	1484,3	− 0,094	− 2,66	8,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//261,05	+ 0,08	− 0,02	215,8
56	410,19	637,34	+ 0,122	0,00	3,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//481,0	+ 0,03	− 0,01	215,8
57	637,34	1390,1	0,00	− 1,72	2,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//481,0	+ 0,03	− 0,02	215,8
58	499,63	858,40	+ 0,143	− 0,051	9,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//2111,0	+ 0,10	− 0,05	215,8
59	856,00	2869,6	− 0,051	− 5,55	3,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//2111,0	+ 0,06	0,00	215,8
60	410,05	632,50	+ 0,143	0,00	3,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//481,0	+ 0,09	+ 0,01	222,6
61	632,50	1336,1	0,00	− 1,89	7,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//481,0	+ 0,10	+ 0,06	222,6
62	414,50	672,62	+ 0,150	− 0,026	9,14	10//(10 + 5 + 1)//611,0	+ 0,13	− 0,01	227,6
63	672,36	1708,60	− 0,026	− 2,70	5,64	10//(10 + 5 + 1)//611,0	+ 0,09	+ 0,01	227,6
64	396,33	603,48	+ 0,054	− 0,272	4,64	10//(10 + 5 + 1 + 1)//431,0	+ 0,07	− 0,03	227,6
65	437,74	783,77	+ 0,098	− 0,152	11,14	10//(10 + 5 + 1)//331,0	+ 0,05	+ 0,04	192,6
66	782,25	2901,6	− 0,152	− 7,86	9,14	10//(10 + 5 + 1)//331,0	+ 0,05	+ 0,17	192,6
67	391,35	610,80	+ 0,092	− 0,068	6,14	10//(10 + 5 + 1 + 1)//311,0	+ 0,04	+ 0,04	192,6
68	610,12	1343,7	− 0,068	− 1,75	6,14	10//(10 + 5 + 1 + 1)//311,0	+ 0,05	+ 0,04	192,6

69	404,91	637,08	+ 0,087	+ 0,014	7,64	10//(10 + 5 + 1)//811,0	+ 0,04	+ 0,07	50259,6
70	637,22	1461,9	+ 0,014	− 1,03	2,64	10//(10 + 5 + 1)//611,0	+ 0,03	+ 0,04	259,6
71	604,40	1349,9	+ 0,155	− 0,18	2,64	10//(10 + 5)	+ 0,04	+ 0,05	257,4
72	403,84	633,43	− 0,006	− 0,243	2,64	10//(10 + 5 + 1)//411,0	+ 0,04	+ 0,04	257,4
73	425,02	739,03	+ 0,07	− 0,035	4,14	10//(10 + 5 + 1)//911	+ 0,04	+ 0,05	257,4
74	738,65	2206,3	0,00	− 2,66	7,89	10//(10 + 5 + 1)//911	+ 0,06	0,00	257,4
75	406,34	635,57	+ 0,045	− 0,112	4,89	10//(10 + 5 + 1 + 1)//361,0	+ 0,06	− 0,05	257,4
76	634,45	1422,8	− 0,112	− 1,75	2,39	10//(10 + 5 + 1 + 1)//361,0	+ 0,04	+ 0,06	257,4
77	434,82	674,98	+ 0,080	− 0,034	4,72	10//(10 + 5 + 2 + 1)	+ 0,03	+ 0,01	320,9
78	674,64	1474,7	− 0,034	− 1,25	2,64	10//(10 + 5 + 2 + 1)	+ 0,03	+ 0,03	320,9
79	392,02	574,12	+ 0,054	− 0,041	6,89	10//20//(200 + 50)	+ 0,04	+ 0,05	319,4
80	573,71	1050,2	− 0,041	− 0,76	4,64	10//20//(200 + 50)	+ 0,03	− 0,01	319,4
81	394,91	574,50	+ 0,051	− 0,047	8,14	10//20//361,0	+ 0,14	− 0,04	316,7
82	574,03	1037,05	− 0,047	− 0,659	3,64	10//20//361,0	+ 0,10	+ 0,01	316,7
83	400,02	578,52	+ 0,047	− 0,062	6,39	10//20//811,0	+ 0,09	+ 0,08	316,7
84	577,90	1029,9	− 0,062	− 0,700	2,64	10//20//811,0	+ 0,07	+ 0,03	316,7
85	516,33	855,18	+ 0,065	− 0,182	4,97	10//20	+ 0,08	− 0,01	316,2
86	853,36	2386,4	− 0,182	− 4,43	3,64	10//20	+ 0,07	+ 0,03	316,2
87	423,12	617,67	+ 0,045	− 0,103	6,64	10//(20+ 2)//411,0	+ 0,02	+ 0,03	315,7
88	616,64	1124,83	− 0,103	− 0,991	3,64	10//(20 + 2)//411,0	+ 0,03	+ 0,04	315,7
89	496,65	804,80	+ 0,080	− 0,195	6,64	10//(20 + 2)//761,0	+ 0,03	0,00	315,7
90	802,85	1999,1	− 0,195	− 3,30	4,64	10//(20 + 2)//761,0	+ 0,03	+ 0,03	315,7
91	517,52	792,8	+ 0,051	− 0,18	11,14	10//(20 + 2 + 1)//691,0	+ 0,09	− 0,03	314,6
92	791,0	1655,5	− 0,18	− 2,15	4,64	10//(20 + 2 + 1)//691,0	+ 0,06	− 0,08	314,6
93	508,19	831,51	+ 0,134	− 0,011	11,14	10//(20 + 1)//711,0	+ 0,07	− 0,01	309,2
94	831,40	2219,6	− 0,011	− 2,20	4,14	10//(20 + 1)//711,0	+ 0,05	+ 0,02	309,2
95	483,88	708,59	0,00	− 0,233	2,14	10//(20 + 5 + 1)	+ 0,03	+ 0,04	308,4
96	497,13	734,04	+ 0,091	− 0,037	3,14	10//(20 + 5 + 1 + 1)//1211,0	+ 0,04	+ 0,08	308,4
97	732,97	1376,15	− 0,037	− 1,10	3,64	10//(20 + 5 + 1 + 1)//1211,0	+ 0,04	− 0,19	308,4
98	468,86	699,96	+ 0,096	− 0,034	10,06	10//(20 + 5)//261,0	+ 0,12	− 0,03	306,1
99	699,62	1357,1	− 0,034	− 0,97	3,64	10//(20 + 5)//261,0	+ 0,06	− 0,01	306,1
100	469,50	744,08	+ 0,104	− 0,013	10,64	10//20//1111,0	+ 0,07	0,00	304,2
101	743,95	1741,8	− 0,013	− 1,56	3,64	10//20//1111,0	+ 0,03	+ 0,02	304,2
102	484,51	771,39	+ 0,094	− 0,062	3,64	10//(20 + 1)//561,0	+ 0,03	− 0,02	304,2
103	770,59	1829,8	− 0,062	− 2,25	3,64	10//(20 + 1)//561,0	+ 0,03	− 0,06	304,2
104	493,65	744,31	+ 0,145	+ 0,011	6,14	10//(20 + 5 + 1)//1611,0	+ 0,04	− 0,02	303,4
105	744,42	1484,5	+ 0,011	− 0,92	3,64	10//(20 + 5 + 1)//1611,0	+ 0,04	+ 0,08	303,4
106	511,86	768,10	+ 0,115	+ 0,148	4,64	10//(20 + 5 + 2)	+ 0,03	+ 0,01	301,9
107	770,80	1526,4	+ 0,148	− 1,04	2,64	10//(20 + 5 + 2)	+ 0,03	+ 0,02	301,9
108	509,94	1380,5	+ 0,210	− 0,470	4,64	10//(20 + 2)//661,0	+ 0,04	+ 0,02	301,1
109	565,10	1764,4	− 0,053	− 2,90	3,64	10//(20 + 2)//2111,0	+ 0,05	+ 0,05	301,1
110	498,80	1230,8	+ 0,295	− 0,50	1,64	10//(20 + 2 + 1)//1311,0	+ 0,06	+ 0,03	300,7
111	632,03	2292,5	− 0,097	− 10,62	2,64	10//(20 + 2 + 1)	+ 0,05	− 0,01	300,7

angegeben, die zugehörigen Temperaturen in Tab. IX. Über den Wert V des Normalelements vgl. S. 327. Die Temperatur desselben, aus der sich die Korrektion ergibt, ist ebenfalls unter V in Tab. IX angegeben. Die letzte Spalte enthält die Zeit T in Sekunden (vgl. über die Ermittelung der Zeit S. 330). Die Zeitdauer beträgt für die Versuche 18—107 nahe 6 Minuten, für den Versuch 73 6,5 Minuten, für die Versuche 108—111 nahe 10 Minuten. Aus den in Tab. IX angeführten Zahlen ergeben sich nach den Formeln (5) und (6) (S. 325) die Werte J für die Stromstärke (etwa 10 Amp.), die Spannung E (etwa 80 Volt), die Leistung $E \cdot J$ (etwa 1 KW.) und hieraus die Energie $E\,J\,T$, die für die Versuche 18—107 etwa 300 KW.-Sekunden, für Versuch 73 325 KW.-Sekunden, für die Versuche 108—111 500 KW.-Sekunden beträgt, schließlich der Wert R' des Heizwiderstandes (etwa 8 Ohm) als E/J. Betreffs des Heizwiderstandes vgl. S. 328, Tab. III.

Erläuterung zu Tab. X.

Tab. X enthält außer dem korrigiertem Wassergewicht die Größen, welche zur Berechnung des Wertes U' nach Formel (42), S. 341, erforderlich sind (vgl. Beispiele S. 355). Bezüglich der zur Zusammensetzung des Vergleichswiderstandes R benutzten Widerstände vgl. S. 354. Die Temperaturmessungen wurden bei den Versuchen Nr. 18—92 mit dem Platinthermometer *H 23*, von Nr. 93 an bis Ende mit *E 1* ausgeführt; über die Konstanten der Thermometer vgl. S. 356, Tabb. VI—VIII.

Aus den Größen E, J, T, G und U', die sich aus den vorstehenden Tabb. IX und X direkt oder indirekt ergeben, berechnet sich das Wärmeäquivalent A der elektrischen Energie, in der auf S. 357 angegebenen Weise. Die so erhaltenen Zahlen sind in Tab. XI, der Temperatur nach geordnet zusammengestellt, wobei teilweise nahe zusammenfallende Versuche gemittelt worden sind.

Von den angestellten 111 Messungen mußten eine Anzahl ausgeschieden werden; die Gründe für die Ausscheidung sind im folgenden zusammengestellt:

1—17 { Nr. 1—10 Temperaturmessung mit Kompensator, Isolationsfehler der Heizspule.
„ 9—17 Thermometer Ni III (Nickelthermometer).

(Fortsetzung S. 364.)

Tabelle XI.

Zusammenstellung der Resultate.

Nr.	Temp.	Beob.	Rechnung	Diff. in 10^{-4}
71	4,75°	4,1991	4,1970	+ 5
52, 53	5,65	2015	1956	+ 14
72	6,15	1945	1949	− 1
65, 66	6,38	1959	1946	+ 3
69	7,41	1954	1932	+ 5
73	8,51	1930	1917	+ 3
70	8,81	1900	7613	− 3
63	8,95	1907	1910	− 1
74	10,02	1876	1898	− 5
67, 68	11,33	1902	1882	+ 5
75	11,45	1875	1880	− 1
48	11,61	1853	1879	− 6
64	12,06	1887	1874	+ 3
60	12,59	1869	1868	0
56	12,60	1865	1868	− 1
76	12,87	1801	1865	−15
49	13,03	1837	1862	− 6
61	13,97	1814	1852	− 9
57	14,00	1901	1852	+ 12
46	14,88	1814	1843	− 7
50	14,99	1818	1842	− 6
47	16,31	1830	1830	0
51	16,39	1837	1829	+ 2
59	17,33	1790	1821	− 7
31	17,41	1833	1820	+ 3
19	18,42	1804	1812	− 2
33	18,42	1797	1812	− 4
35	18,55	1804	1811	− 2
32	18,82	1817	1809	+ 2
18	18,83	1804	1809	− 1
37	19,75	1806	1802	+ 1
36	19,95	1819	1801	+ 4
20	20,01	1799	1800	0
100	21,13	1796	1792	+ 1
38	21,15	1789	1792	− 1
21	21,41	1780	1790	− 2
77	21,80	1783	1788	− 1
101	22,53	1780	1784	− 1
78	23,24	1771	1777	− 1
102	23,96	1776	1776	0
79	24,11	1766	1775	− 2
93	24,82	1760	1772	− 3
103	25,36	1770	1770	0
80	25,55	1750	1769	− 5
94	26,24	1771	1766	+ 1
81	26,33	1741	1766	− 6
82	27,76	1766	1760	+ 1
108	29,15	1779	1757	+ 5

Tabelle XI (Fortsetzung).

Nr.	Temp.	Beob.	Rechnung	Diff. in 10^{-4}
83	29,19	1758	1757	0
84	30,60	1757	1755	0
109	31,49	1788	1753	+ 8
85	32,54	1768	1752	+ 4
86	33,98	1745	1752	− 2
110	34,32	1813	1752	+14
98	34,39	1769	1752	+ 4
87	35,75	1783	1753	+ 7
99	35,79	1785	1754	+ 7
[111	36,64	1873	1755	+29]
88	37,19	1735	1756	− 5
89, 90	39,41	1766	1762	+ 1
91, 92	43,09	1804	1778	+ 6
104	44,34	1803	1790	+ 3
95	45,56	1725	1792	−16
105	45,79	1774	1793	− 5
96	46,96	1803	1801	0
97	48,36	1802	1812	− 2
106, 107	49,60	1808	1822	− 3

(Fortsetzung von S. 362.)

22—30 { Nr. 22—25 Thermometer Ni III.
„ 26—27 Energiemessung schlecht.
„ 28—30 Element k_m statt l_m.

„ 34 Ohne Zeit.

39—45 { „ 39—43 Manteltemperatur schwankend.
„ 44—45 Isolation schlecht, alles feucht.

„ 54 Anfangsgang: Galv. unruhig, Mittelgang schlecht, Endgang nach graphischer Darstellung schlecht.

„ 55 Endgang: Während der Messung plötzliche Störung.

„ 58 Nachperiode erst $^3/_4$ Stunden später beobachtet, Regler hat versagt, Draht gebrochen, Meßstrom plötzlich geändert.

„ 62 Hat kein Zeitende, fehlt deutliche Marke.

Die Resultate sind mittels einer quadratischen Formel nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen worden, wobei aber der stark abweichende Versuch Nr. 111 fortgelassen wurde. Bei Berücksichtigung dieses Versuchs wird das Resultat nur sehr wenig geändert. Da aber kein ausreichender Grund

zur Ausscheidung dieses Versuchs gefunden wurde, schien es erforderlich, ihn hier mit anzuführen. Die Ausgleichung ergab folgende, zwischen 5° und 50° C. geltende Formel:

$$A_u = 4{,}2047_7 - 0{,}001768\,u + 0{,}00002644_7\,u^2.$$

In der letzten Spalte der Tab. XI sind die Unterschiede zwischen den nach dieser Formel berechneten und den beobachteten Werten in Zehntausendstel des Wertes angegeben. Die Abweichungen betragen durchschnittlich nur einige Zehntausendstel.

In der unten stehenden Tab. XII sind die Werte für A, A/A_{15} und den Temperaturkoeffizienten $\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{du}$ von 5 zu 5° zusammengestellt.

Tabelle XII.

u	A	A/A_{15}	Temp.-Koeff. 10^{-4}
5°	4,1966	$1{,}0029_5$	− 3,58
10°	1897_5	$1{,}0013_5$	− 2,96
15°	1842	1,0000	− 2,34
20°	1800	0,9990	− 1,70
25°	1771	0,9983	− 1,07
30°	1755	0,9979	− 0,43
35°	1753	$0{,}9978_5$	+ 0,20
40°	1764	$0{,}9981_5$	+ 0,83
45°	1788	0,9987	+ 1,47
50°	1825	0,9996	+ 2,10

Der Wert der Kalorie bei 15° ist also hiernach $\mathbf{4{,}184_2}$, das Minimum von A liegt bei 33,5°. Zugrunde gelegt ist für den Widerstand die Einheit der Reichsanstalt, für die Spannung des Westonelements (mit gesättigtem Elektrolyt) der Wert 1,0183 V bei 20° C., der seit dem 1. Januar 1911 international angenommen wird, für die Temperatur die durch 0°, 100° und den Schwefelsiedepunkt (444,5°) fixierte normale Temperaturskala.

Es ist wichtig, zu bemerken, daß die erwähnten elektrischen Grundlagen — Widerstand und Spannung des Normalelements — soweit die Reproduzierbarkeit und internationale Übereinstimmung in Frage kommen, mit größerer Genauigkeit festgelegt sind, als es für den vorliegenden Zweck erforderlich ist. Denn sowohl bei der Widerstandseinheit wie bei dem

Normalelement kann diese Genauigkeit auf einige Hunderttausendstel angesetzt werden. Die *gesetzlichen* internationalen Grundeinheiten sind aber bekanntlich nicht das Ohm und das Volt, sondern das Ohm und das Ampere, die definiert sind durch den Quecksilberwiderstand und die Menge des Silberniederschlages.

Der oben angegebene Wert des Weston-Normalelements ist aus diesen Einheiten mit einer Genauigkeit von etwa ein Zehntausendstel abgeleitet. Der mittels des Widerstandes und des Normalelements berechneten Wattsekunde kommt daher eine Genauigkeit von ein bis zwei Zehntausendsteln zu; um denselben Betrag kann der Gradwert in der oben angegebenen Temperaturskala von dem Gradwert in der Normalskala zwischen 0° und 100° abweichen. Diese Genauigkeit entspricht auch, wie gezeigt wurde, derjenigen, mit welcher die kalorimetrischen Messungen ausgeführt werden konnten.

Man kann daher das erhaltene Resultat dahin aussprechen, daß innerhalb der angegebenen Genauigkeitsgrenze von einigen Zehntausendsteln die Wärmekapazität des Wassers auf die *internationale Wattsekunde* und die *normale Temperaturskala* zurückgeführt worden ist.

(Eingegangen 8. August 1920.)

2. *Spektralanalytische Beobachtungen an den Kanal- und Kathodenstrahlen des positiven Spitzenstroms in Sauerstoff und Stickstoff;*

von Albert Schultz.

(Auszug aus der Greifswalder Dissertation.)

1. Einleitung.

In einer früheren Arbeit von M. Weth (1) sind zum ersten Male die Ergebnisse einer spektrographischen Untersuchung des positiven Spitzenstroms in Wasserstoff mitgeteilt, die mit der von J. Stark (2) gegebenen Theorie des positiven Spitzenstroms in Übereinstimmung stehen. Es war daher von Interesse, den positiven Spitzenstrom auch in anderen Gasen zu untersuchen, da weitere Ergebnisse über die Spitzenstromkanalstrahlen (3), die zwei Ionisationsgebiete des positiven Spitzenstroms und die Träger der Spektren zu erwarten waren. Unter diesen Gesichtspunkten ist die vorliegende Untersuchung des positiven Spitzenstroms in Sauerstoff und Stickstoff angestellt worden.

Eine eingehende Darstellung der Theorie des positiven Spitzenstroms findet sich in der eingangs erwähnten Arbeit von M. Weth.

2. Versuchsanordnung.

Nach eingehenden Vorversuchen erhielt die Stromröhre für Sauerstoff folgende Gestalt (Fig. 1): Der Entladungsraum bestand aus einer 6 cm langen Glasröhre von 4 cm lichter Weite, deren eines Ende sich in ein achsenparalleles Ansatzrohr fortsetzte, durch das der Haltestift der Kathode herausgeführt wurde und das gleichzeitig die Verbindung mit dem Gasvorratsgefäß und der Pumpe herstellte. Das andere Ende der Röhre wurde durch ein aufgekittetes Quarzfenster verschlossen, durch das die spektrographischen Aufnahmen gemacht wurden. Durch ein seitliches Ansatzrohr wurde die Anode eingeführt, die wie die von M. Weth (1) zuerst be-

schriebene Form folgendermaßen hergestellt wurde: In ein Glasrohr (Fig. 2) wurde ein Messingstift eingeschmolzen und mit Siegellack und Quecksilber abgedichtet. Rohr und Messingstift wurden gemeinsam eben abgeschliffen. Die Durchmesser der Anodenflaschen betrugen bei verschiedenen Versuchen 2—5 mm. Die Kathode bestand aus einem rechteckigen, etwas gebogenen Aluminiumblech von ungefähr 20 cm^2 Oberfläche. Anodenrohr und Kathodenhaltestift waren mit Siegellack in die Ansatzrohre eingekittet.

Für die Versuche in Stickstoff konnte die von M. Weth (1)

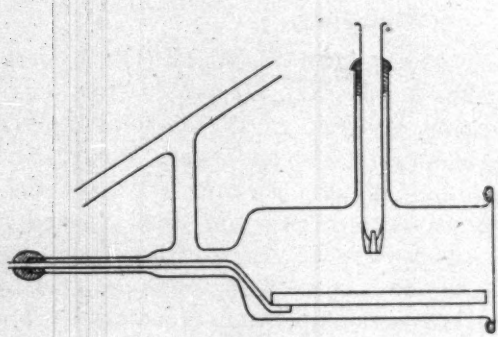


Fig. 1.

Fig. 2.

beschriebene Röhre benutzt werden. Ihre Kathodenoberfläche betrug ungefähr 175 cm^2.

Der benutzte Sauerstoff wurde rein dargestellt, indem in einem Glasrohr durch umgelegte Heizspiralen Kaliumpermanganat erhitzt wurde; das gewonnene Gas wurde längere Zeit über Phosphorpentoxyd getrocknet und in ein Vorratsgefäß geleitet, das durch einen Doppelhahn mit der Stromröhre in Verbindung stand. Gasentwicklungsrohr, Trockenrohr und Vorratskugel waren unter sich und mit der Stromröhre verblasen.

Der benutzte Stickstoff wurde einer Bombe entnommen, über Phosphorpentoxyd getrocknet und ebenfalls in ein Vorratsgefäß geleitet.

Im übrigen war die Versuchsanordnung dieselbe, wie sie von M. Weth (1) beschrieben ist, ebenso wurden dieselben Spektrographen und dasselbe Mikrophotometer benutzt.

3. Beobachtungen.

a) Sauerstoff.

Bei Drucken von ungefähr 2,5—1,5 mm Hg ist die Anodenfläche von einer ziemlich dünnen, weißlich blauen Lichthaut bedeckt; mit sinkendem Druck wächst das Leuchten unter gleichzeitiger Abnahme der Lichtstärke weiter in den Gasraum hinein und nimmt die ungefähre Form eines Kegelstumpfes an, dessen kleinere Grundfläche auf der Anodenfläche aufsitzt. Die Farbe ist weißlichblau; die Helligkeit ist am intensivsten unmittelbar an der Anode und nimmt mit den Abständen von ihr ab. Eine Schichtung ist nicht zu unterscheiden. Bei $p = 0{,}6$ mm Hg erstreckte sich das Leuchten bis ungefähr 6 mm in den Gasraum hinein. Bei gleichem Druck und wachsender Stromstärke wuchs die Lichtstärke beträchtlich, die räumliche Ausdehnung nur sehr wenig. Die Elektrodenspannung ΔV wuchs ebenfalls sehr wenig mit wachsender Stromstärke. Bei $p = 0{,}65$ mm Hg, Anodendurchmesser 2 mm, Elektrodenabstand 17 mm, schlug der Spitzenstrom bei $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Amp. unstetig in Glimmstrom um. Die Höchststromstärke wuchs anscheinend etwas mit sinkendem Druck. Unter sonst scheinbar gleichen Verhältnissen waren jedoch Höchststromstärke und Elektrodenspannung nicht immer konstant. Um für die spektrographischen Aufnahmen, die wegen der Lichtschwäche der Erscheinung lange Belichtungszeiten erforderten, einigermaßen konstante Verhältnisse zu bekommen, mußten Zugeständnisse an Lichtstärke und Höchststromstärke gemacht werden. Als Bestwert des Druckes ergab sich nach mehreren Versuchen 0,6 mm Hg bei einer Anodenfläche von 2 mm Durchmesser und einem Elektrodenabstand von 17 mm. Diese Anordnung wurde für alle Aufnahmen beibehalten. Bei größeren Anodenflächen war der positive Spitzenstrom äußerst inkonstant und schließlich nicht mehr existenzfähig. Dasselbe trat bei weiterer Vergrößerung des Elektrodenabstandes ein. Selbstevakuation wurde auch bei den längsten Aufnahmen (19 Stunden) nicht beobachtet. Bei längerem Betriebe sank die Höchststromstärke bis auf ein Drittel der ursprünglichen, wahrscheinlich weil sich auf der Anode eine Oxydhaut gebildet hatte. Es mußte dann die Anode durch eine frisch abgeschliffene ersetzt werden.

b) Stickstoff.

Die optischen und elektrischen Erscheinungen sind im allgemeinen dieselben wie bei Sauerstoff. Bei Drucken von 2,5—1 mm Hg sitzt auf der Anodenfläche eine intensivere blauviolette Schicht; der übrige Teil der Lichterscheinung ist lichtschwächer und von rötlichvioletter Farbe. Mit wachsender Stromstärke und wachsendem Elektrodenabstand wächst der Lichtkegel ziemlich schnell. Elektrodenspannung und Höchststromstärke sind viel konstanter als in Sauerstoff. Ebenso steigt die Elektrodenspannung mit wachsender Stromstärke schneller; dagegen wächst die Höchststromstärke mit wachsendem Druck. Für die Aufnahmen wurde eine Anodenfläche von 4 mm Durchmesser und ein Elektrodenabstand von 5 cm gewählt.

4. Spektrogramme.

a) Sauerstoff.

Im sichtbaren Spektrum des positiven Spitzenstroms treten ziemlich intensiv die Funkenlinien auf, in bedeutend geringerer Intensität die stärksten der Serienlinien. Im ultravioletten Teil sind bei weitem am intensivsten die Dupletlinien bei 2882 und 2896 Å; außerdem werden erhalten zahlreiche Banden im näheren Ultraviolett in mäßiger Intensität und die stärksten Bandenkanten des ersten Bandenspektrums, die fälschlicherweise meist Wasserdampfbanden genannt werden, in sehr geringer Intensität.

Die Serienlinien (4) haben als Träger vermutlich das einwertige Atomion (5) (6) (7).

Die Funkenlinien haben als Träger vermutlich das zweiwertige Atomion (5) (6) (7).

Die Duplets bei 2882 und 2896 Å werden zu einem zweiten Bogenspektrum des Sauerstoffs gerechnet und ihnen als Träger ebenfalls das einwertige Atomion zugeordnet (6) (7).

Die zahlreichen Banden im näheren Ultraviolett gehören vermutlich dem neutralen dreiatomigen Molekül an (8) (7), das erste Bandenspektrum dem neutralen Atom (9) (8) (7).

Mit einem Hartmannschen Mikrophotometer wurde die Verteilung der Schwärzung entlang den einzelnen Linien und Banden gemessen und die relative Schwärzung in willkürlichem Maß als Ordinate, der Abstand von der Anode als Abszisse aufgetragen (Figg. 3—8).

Alle Linien und Banden haben den Höchstwert ihrer Intensität unmittelbar an der Anode. Die Intensität der Funkenlinien fällt zuerst langsam, dann ziemlich schnell ab, während bei den Serienlinien das Umgekehrte eintritt. Außerdem

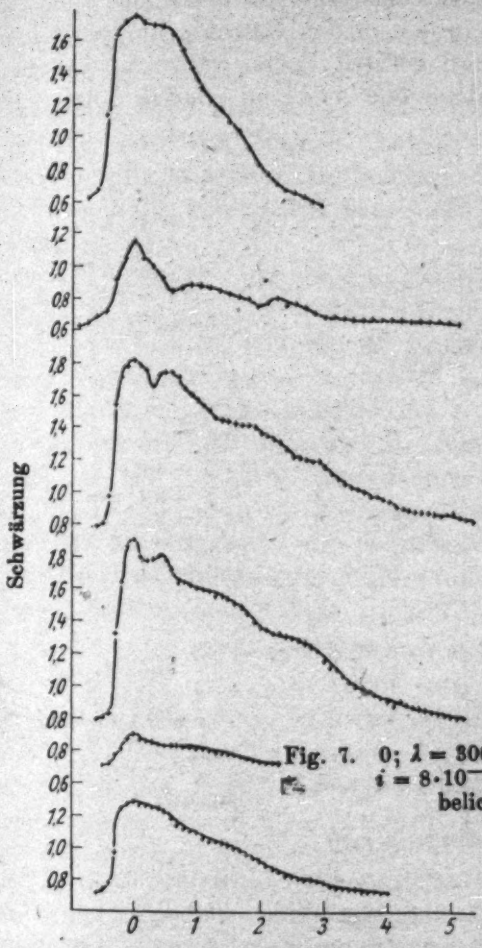


Fig. 3.
0^{++} $\lambda = 4649 - 51$ Å
$p = 0{,}6$ mm Hg
$i = 8{,}4 \cdot 10^{-6}$ Amp.
$\Delta V = 650$ Volt
belichtet 19 Stunden

Fig. 4.
0^{+} $\lambda = 4368$ Å
$p = 0{,}6$ mm Hg
$i = 8{,}4 \cdot 10^{-6}$ Amp.
$\Delta V = 650$ Volt
belichtet 19 Stunden

Fig. 5.
0^{+} $\lambda = 2882$ Å
$p = 0{,}6$ mm Hg
$i = 8 \cdot 10^{-6}$ Amp.
$\Delta V = 650$ Volt
belichtet 18 Stunden

Fig. 6.
0^{+} $\lambda = 2896$ Å
$p = 0{,}6$ mm Hg
$i = 8 \cdot 10^{-6}$ Amp.
$\Delta V = 650$ Volt.
belichtet 18 Stunden

Fig. 7. 0; $\lambda = 3067$ Å $p = 0.6$ mm Hg
$i = 8 \cdot 10^{-6}$ Amp. $\Delta V = 650$ Volt
belichtet 18 Stunden

Fig. 8.
0_2; $\lambda = 3244$ Å
$p = 0{,}6$ mm Hg
$i = 8 \cdot 10^{-6}$ Amp.
$\Delta V = 650$ Volt
belichtet 18 Stunden

haben die Serienlinien einen zweiten kleineren Intensitätsgipfel ungefähr dort, wo der stärkere Intensitätsabfall der Funkenlinien schon begonnen hat, und schließlich noch ein drittes kleines Maximum dort, wo die Intensität der Funkenlinien beinahe Null ist. Der Intensitätsabfall der Dupletlinien

bei 2882 und 2896 Å zeigt ein ähnliches Verhalten wie der der Serienlinien, nur liegt der zweite Gipfel näher am Hauptgipfel und ist nur wenig kleiner als dieser, dagegen verschwindet ger dritte Gipfel fast ganz. Die Intensität der Ozonbanden und des ersten Bandenspektrums fällt von der Anode ziemlich gleichmäßig ab. Am weitesten in den Gasraum hinein reichen die Linien des ersten und zweiten Bogenspektrums, während die Funkenlinien bedeutend eher endigen. Daraus folgt, daß

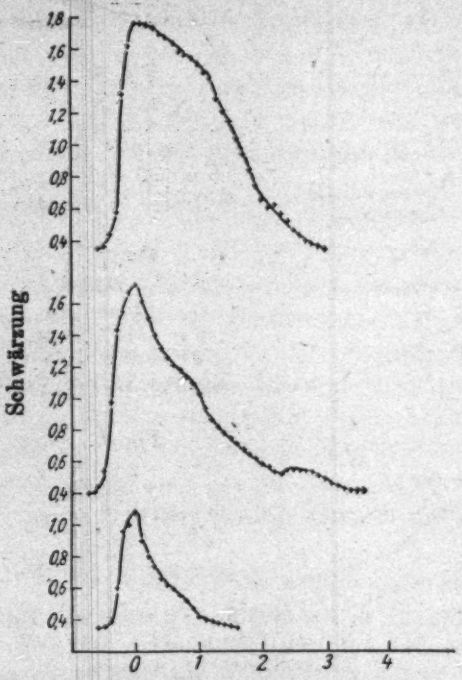


Fig. 9.
N_2^{++}; $\lambda = 4708$ A
$p = 2{,}1$ mm Hg
$i = 3 \cdot 10^{-6}$ Amp.
$\Delta V = 680$ Volt
belichtet 3 Stunden

Fig. 10.
N_2^{+}; $\lambda = 4059$ Å
$p = 2{,}1$ mm Hg
$i = 3 \cdot 10^{-6}$ Amp.
$\Delta V = 680$ Volt
belichtet 3 Stunden

Fig. 11.
N^{++}; $\lambda = 4630$ Å
$p = 2{,}1$ mm Hg
$i = 3 \cdot 10^{-6}$ Amp.
$\Delta V = 680$ Volt
belichtet 3 Stunden

unmittelbar vor der Anode an der Lichtemission in der Hauptsache die Funken- und Bogenlinien beteiligt sind, dagegen das schwächere Leuchten des Kegelstumpfes nur von den Bogenlinien ausgeht. Ozonbanden und erstes Bogenspektrum liefern nur einen verhältnismäßig sehr kleinen Teil der Lichtemission.

b) Stickstoff.

Im sichtbaren Teil des Spektrums (Figg. 9—11) treten die stärksten negativen Banden und die zweite Deslandressche Gruppe der positiven Banden in ungefähr gleicher Intensität

auf, außerdem die stärksten Funkenlinien in bedeutend geringerer Intensität. Im ultravioletten Teil treten nur die positiven Banden auf, und zwar in großer Intensität die zweite Deslandressche Gruppe, während die stärksten Bandenkanten der dritten Deslandresschen Gruppe nur in fast verschwindender Intensität erscheinen.

Die negativen Banden haben als vermutlichen Träger das zweiatomige zweiwertige Stickstoffmolekül (7).

Die positiven Banden haben als Träger das zweiatomige einwertige Stickstoffmolekül (7) (10).

Die Funkenlinien (12) haben als Träger das zweiwertige Atomion (7).

Alle Banden und Linien haben den Höchstwert ihrer Intensität unmittelbar an der Anode. Die Intensität der negativen Banden fällt zuerst langsam, dann schneller ab; die Intensität der positiven Banden fällt ziemlich gleichmäßig und schnell ab und hat ungefähr an der Stelle, wo der stärkere Intensitätsabfall der negativen Banden beginnt, die Andeutung eines zweiten Gipfels in Gestalt eines Buckels in der Kurve; schließlich tritt noch ein kleinerer dritter Gipfel an der Stelle auf, wo die Intensität der negativen Banden beinahe Null ist. Die Intensität der Funkenlinien fällt von der Anode ziemlich gleichmäßig und schnell ab.

5. Deutung der Schwärzungskurven.

a) Sauerstoff.

Die im Gas freigemachten Elektronen werden durch das elektrische Feld auf die Anode zu beschleunigt, durchfallen den Anodenfall des positiven Spitzenstroms, dessen kleinster Wert nach Angaben von Stark (12) in Luft 440, in Stickstoff 450 Volt beträgt, erlangen so eine große Geschwindigkeit und treffen als schnelle Kathodenstrahlen auf die Anode. Hier werden sie teils reflektiert, teils machen sie sekundäre langsame Kathodenstrahlen frei, die jedoch durch das entgegenstehende Feld schnell abgebremst und zurückbeschleunigt werden. Der Vorgang wiederholt sich. Dadurch und durch die Querschnittsverringerung der Strombahn in Richtung der schnellen Kathodenstrahlen ist unmittelbar vor der Anode die Elektronendichte am größten und damit die Ionisierung am stärksten. So erklärt sich, daß alle Linien und Banden den Höchstwert ihrer Intensität dicht an der Anode haben.

Der Unterschied der Schwärzungsverteilungen der Serienlinie 4368 und der Funkenlinie 4649 läßt sich in folgender Weise auf Grund der Annahme erklären, daß jene das optisch freie einwertige Atomion, dieses das optisch freie zweiwertige positive Atomion als Träger hat. In etwa 0,7 mm Abstand von der Anode, da wo der erste Knick der Schwärzungskurven liegt, setzt nach der Anode zu die Ionisierung durch Kathodenstrahlen und damit die Lichtemission ein; diese ist für die Serienlinie unmittelbar vor der Anode intensiver als für die Funkenlinie im Vergleich zu dem Intensitätsverhältnis in größerem Abstand von der Anode, weil unmittelbar vor dieser die Zahl der langsameren Kathodenstrahlen größer ist und diese einwertige, nicht zweiwertige Atomionen durch ihren Stoß erzeugen. Das Ansteigen rechts von dem betrachteten Knick, also von der Anode weg, rührt von dem Einsetzen der Ionisierung durch den Stoß der von der Anode fortlaufenden Kanalstrahlen her. Es ist für die Serienlinie ausgeprägter als für die Funkenlinie, weil die Energie der langsamen Kanalstrahlen zumeist nur für einfache Ionisierung ausreicht. Von dem betrachteten Knick weg leuchten also die O^+- und O^{++}-Strahlen in bewegter Intensität, dazu kommt die ruhende Emission von Seite der neu erzeugten Ionen. Die O^{++}-Strahlen können sich nur oberhalb einer gewissen Geschwindigkeit behaupten; wenn diese bei ihrem Vorwärtsdringen auf einen gewissen Wert gesunken ist, verwandeln sie sich in O^+-Strahlen und es nimmt darum deren Lichtintensität wieder etwas zu, wenn die Emission der Funkenlinie erlischt; dies ist ungefähr in 2 mm Abstand von der Anode beim zweiten Intensitätsminimum der Fall.

b) Stickstoff.

An der Grenze zwischen dem schnellen und langsamen Intensitätsabfall der negativen Banden beginnt die Ionisierung durch den Stoß der schnellen Kathodenstrahlen. Wie Stark (18) darlegte, ist mit der mehrfachen Ionisierung mehratomiger Gasmoleküle dann zu rechnen, wenn die Geschwindigkeit der schnellen Kathodenstrahlen die Ionisierungsspannung des einwertigen Ions erheblich übersteigt. Diese Ionisierung kann ein- und mehrstößig erfolgen. Der Vergleich der Breite der Intensitätsgipfel der negativen und positiven Banden unter

gleichzeitiger Beachtung der räumlichen Geschwindigkeitsverteilung der stoßenden Kathodenstrahlen zeigt, daß die negativen Banden durch erheblich größere Kathodenstrahlgeschwindigkeiten angeregt werden als die positiven. Dasselbe Ergebnis fanden Gehrcke und Seeliger (14) nach einer anderen Methode.

Es erklärt sich also der Intensitätsverlauf der positiven und der negativen Banden ähnlich wie im Falle des Sauerstoffs auf Grund der Annahme, daß die positiven Banden das optisch freie N_2^+-, die negativen Banden das N_2^{++}-Ion als Träger haben. Bei dem Kurvenknick in ungefähr 1 mm Abstand von der Anode setzt die Ionisierung durch die auf die Anode zu laufenden Kathodenstrahlen ein und mit ihr nimmt nach der Anode zu die Lichtintensität zu. Von der Knickstelle ab rührt in der Richtung von der Anode weg die Lichtintensität von den N_2^+- und N_2^{++}-Strahlen her und ist zum Teil bewegt, zum Teil ruhend, und zwar ist der zweite Anteil für die positiven Banden größer als für die negativen, weil die einfache Ionisierung überwiegt. Das geringe Ansteigen der Intensität der positiven Banden bei etwa 2,2 mm Abstand mag von der Zunahme der Zahl der N_2^+-Strahlen infolge der Umwandlung der N_2^{++}-Strahlen in sie beim Unterschreiten einer gewissen Geschwindigkeit herrühren.

6. Ergebnisse.

1. Im Spektrum des positiven Spitzenstroms treten auf

a) in Sauerstoff: Funkenlinien, Serienlinien, Dupletlinien des zweiten Bogenspektrums, erstes Bandenspektrum, Ozonbanden;

b) in Stickstoff: negative Banden, positive Banden, Funkenlinien.

2. Im positiven Spitzenstrom bestehen langsame Kathodenstrahlen, schnelle Kathodenstrahlen und langsame Kanalstrahlen; ihnen entsprechen zwei Ionisationsgebiete.

3. Die Intensitätsverteilung der beobachteten Linien läßt sich auf Grund folgender Annahmen deuten:

a) Der Träger der Serienlinien des Sauerstoffs ist das einwertige Atomion, derjenige der Funkenlinien das zweiwertige Atomion.

b) Der Träger der negativen Banden des Stickstoffs ist das zweiwertige zweiatomige Molekülion (N_2^{++}), derjenige der positiven Banden das einwertige zweiatomige Molekülion (N_2^{+}).

c) In den Kanalstrahlen des positiven Spitzenstromes treten Umladungen auf: in Sauerstoff vom zweiwertigen zum einwertigen Atomion, in Stickstoff vom zweiwertigen zum einwertigen Molekülion.

7. Literatur.

1. M. Weth, Ann. d. Phys. **62.** S. 589. 1920.
2. J. Stark, in Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. **4.** 1. 1905.
3. J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. El. **15.** S. 329. 1918.
4. C. Runge u. F. Paschen, Ann. d. Phys. **61.** S. 641. 1897.
5. J. Stark, Ann. d. Phys. **26.** S. 806. 1908.
6. J. Stark, G. Wendt u. H. Kirschbaum, Physik. Zeitschr. **14.** S. 770. 1913.
7. J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. El. **14.** S. 139. 1917.
8. J. Stark, Ann. d. Phys. **43.** S. 319. 1914.
9. W. Steubing, Ann. d. Phys. **33.** S. 553. 1910.
10. J. Stark, Ann. d. Phys. **52.** S. 221. 1917.
11. J. Stark u. R. Künzer, Ann. d. Phys. **45.** S. 29. 1914.
12. J. Stark, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **6.** S. 112. 1904.
13. J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. El. **13.** S. 395. 1916.
14. E. Gehrcke u. R. Seeliger, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **14.** S. 1023. 1912.

Greifswald, Physikalisches Institut der Universität,
im Februar 1920.

(Eingegangen 10. September 1920.)

3. *Grundschwingung und Oberschwingungen einlagiger Spulen;*

von Wilhelm Geiss.

(Frankfurter Dissertation.)

I. Kapitel.

Einleitung.

Die Eigenperiode einlagiger Spulen, ihre experimentelle Bestimmung und ihre theoretische Berechnung ist wiederholt die Aufgabe der physikalischen Forschung gewesen. Vor allem hat Drude[1]) eine Reihe experimenteller Untersuchungen an beiderseits offenen Spulen angestellt und auf Grund derselben in seiner Arbeit: „*Zur Konstruktion von Teslatransformatoren, Schwingungsdauer und Selbstinduktion von Drahtspulen*" Tabellen gegeben, die es unter gewissen Voraussetzungen ermöglichen, die Eigenschwingungen von Spulen rechnerisch zu ermitteln. Als weitere Beiträge sind die Arbeiten an einseitig offenen Spulen zu nennen von Slaby[2]), Drude[3]), Gehrcke[4]), Nesper[5]) u. a.

Auf theoretischem Wege haben Drude und Slaby Formeln aufgestellt, die die Wellenlänge als Funktion einer Anzahl charakteristischer Parameter der Spule darstellen, indem sie die Spule als geschlossenen Schwingungskreis ansehen, für welchen die Thomson-Kirchhoffsche Gleichung

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{C_m \cdot L_m}$$

gilt. Da beiden eine exakte Definition der Spulenkapazität fehlte, können und sollen ihre gegebenen Gleichungen nur Näherungswerte sein.

Eine eingehende Theorie für das Spulenproblem hat Lenz[6]) vor einiger Zeit in „*Berechnung der Eigenschwingung*

1) P. Drude, Ann. d. Phys. **9.** S. 293. 1902.
2) A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. **26.** S. 1003. 1905.
3) P. Drude, Elektrotechn. Zeitschr. **26.** S. 339. 1905.
4) E. Gehrcke, Elektrotechn. Zeitschr. **26.** S. 697. 1905.
5) E. Nesper, Ann. d. Phys. **15.** S. 768. 1904.
6) W. Lenz, Ann. d. Phys. **43.** S. 796. 1914.

einlagiger Spulen" aufgestellt. Indem er die Spule als System mit verteilter Kapazität betrachtet, nähert er sich zweifellos mehr den tatsächlichen Verhältnissen. Soweit er allerdings seine theoretischen Ergebnisse mit dem Experiment vergleichen kann, — es kommen hierfür nur die Messungen Drudes an kurzen weiten Spulen in Betracht —, muß Lenz selbst die Übereinstimmung als „nicht ganz befriedigend" bezeichnen. Den Grund für diese Abweichung schiebt er dem Umstande zu, daß bei Drude anscheinend die von ihm geforderte große Windungszahl nicht immer erfüllt gewesen sei.

Unter Berücksichtigung dieser Forderung das Problem für kurze Spulen experimentell neu aufzufassen, für lange Spulen die überhaupt fehlenden experimentellen Grundlagen zur Prüfung der Lenzschen Theorie zu schaffen, war das eine Ziel dieser Arbeit.

Neben der Berechnung der Eigenperiode von Spulen hat Drude in der obengenannten Arbeit das Verhältnis von Grund- zur Oberschwingung berührt. Die Disharmonie dieses Verhältnisses hat Wachsmuth bei Demonstrationen am Slabyschen Wellenstabe beobachtet und damit die Anregung zu dieser Arbeit gegeben. Bei weiteren, orientierenden Versuchen habe ich eine Tendenz des Verhältnisses der nten zur $(n+1)$ten Oberschwingung feststellen können, sich mit zunehmender Ordnungszahl dem harmonischen zu nähern, ein vorläufiges Ergebnis, das sich mit einem von Lenz[1]) und Szasz[2]) auf Grund theoretischer Überlegung geforderten vollkommen decken würde.

Eine eingehende Prüfung des Verhältnisses der Grund- zur Oberschwingung und der Oberschwingungen verschiedener Ordnungszahl zueinander, vor allem auch an einseitig geerdeten Spulen, war die zweite Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

II. Kapitel.

Meßmethode.

Wenn ein absolut geeichter Wellenmesser nicht zur Verfügung steht, so bedarf die Meßmethode als Grundlage zur Bestimmung der Frequenz elektrischer Schwingungen einer eingehenden Erörterung.

1) W. Lenz, a. a. O.
2) Szasz, Ann. d. Phys. **43**. S. 798. 1914.

Für die Versuche wurden Wellen von der Größenordnung 50—400 m benutzt, und zwar aus den beiden folgenden Gründen: Einerseits sind die theoretischen Bedingungen: große Windungszahl bei kurzen Spulen oder große Länge im Verhältnis zum Durchmesser bei langen Spulen für diese Wellenlängen leichter zu erfüllen; andererseits sollten die Versuche auch gleichzeitig zeigen, wie weit man die Drudeschen Resultate exakt auf größere, geometrisch ähnliche Spulen übertragen kann.

Zur Wellenlängenmessung benutzte ich einen geschlossenen Schwingungskreis nach Franke-Dönitz der gebräuchlichen Art, bestehend aus einer stetig variablen Kapazität (Drehkondensator) und auswechselbaren Selbstinduktionsspulen verschiedener Größen. Für einen derartig geschlossenen Kreis gilt die von H. Diesselhorst[1]) erweiterte Thomson-Kirchhoffsche Formel

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{(C+k)(L+l)},$$

wo l die Zusatzinduktivität des Drehkondensators (unabhängig von der jeweiligen Einstellung) und der Zuleitungen, k die Zusatzkapazität der Spule und der Leitungen bedeuten. Hiernach ist die erstere in Serie zur Induktivität der Spule, letztere parallel zum Kondensator geschaltet zu denken, eine Annahme, die sich experimentell bestätigt und bei Rietz[2]) für k eine theoretische Begründung gefunden hat.

Die Zusatzgrößen l und k bestimmt Diesselhorst aus der Eigenschwingung der kurzgeschlossenen Spule, bzw. des kurzgeschlossenen Kondensators. Dazu bedarf man aber eines geeichten Wellenmessers, und das bedeutet Zurückgreifen auf eine andere Methode.

Dies zu vermeiden und lediglich mit Hilfe geeichter Kapazitäten und Selbstinduktivitäten die Wellenlänge absolut zu bestimmen, gelingt auf die folgende Weise. Von verschiedener Seite ist schon gezeigt worden, daß die Kapazität von Spulen aus 3 und mehr Windungen relativ klein ist, so daß in erster Annäherung die Kapazität zweier ihrer Dimensionen nach nicht allzu verschiedener Spulen gleichgesetzt werden darf.

---

1) H. Diesselhorst, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **1.** S. 262. 1907.
2) Rietz, Ann. d. Phys. **41.** S. 543. 1913.

Zur Verfügung standen ein Luftdrehkondensator, geeicht von der Phys. Techn. Reichsanstalt und zwei von Nesper geeichte Spulen. Der Meßkreis wurde durch einen Stoßkreis in Schwingungen versetzt, die Resonanz beider Kreise mittels Detektor und Telefon bestimmt. Für eine beliebige bekannte Frequenz λ_1 wurde bei Einschalten von L_1 eine bestimmte Kondensatorstellung $\varphi_1 \sim C_1$ gefunden, bei L_2 eine andere Stellung $\varphi_2 \sim C_2$ für eine zweite Frequenz λ_2 entsprechend beim Einschalten von L_1 $\varphi_3 \sim C_3$ von L_2 $\varphi_4 \sim C_4$. Aus diesen 4 Gleichungen für λ_1 und λ_2 lassen sich die Wellenlängen λ eliminieren und man erhält 2 Gleichungen für die Unbekannten $k = k_1 = k_2$ und l.

$$\lambda_1 = 2\pi\sqrt{(C_1 + k_1)(L_1 + l')} = 2\pi\sqrt{(C_2 + k_2)(L_2 + l)},$$

$$\lambda_2 = 2\pi\sqrt{(C_3 + k_1)(L_1 + l)} = 2\pi\sqrt{(C_4 + k_2)(L_2 + l)}.$$

$$k = k_1 = k_2 \qquad k = \frac{C_1 C_4 - C_2 C_3}{(C_2 + C_3) - (C_1 + C_4)},$$

$$l = \frac{L_1(C_1 + k) - L_2(C_2 + k)}{C_2 - C_1}.$$

Mit einer dritten Frequenz ließe sich die Verschiedenheit von k_1 und k_2 ermitteln, doch zeigt sich in vorliegendem Falle experimentell, daß der Wert k für jede Frequenz die obigen Gleichungen erfüllt, so daß sich die gemachte Voraussetzung als berechtigt erweist.

Die Induktivität der Spulen beträgt für

$$L_1 = 121{,}7 \text{ m},$$
$$L_2 = 25{,}3 \text{ m},$$

die Kapazität des Drehkondensators für die Einstellwinkel

$$\varphi = 5^0 \quad C = 1{,}584 \text{ m},$$
$$\varphi = 85^0 \quad C = 9{,}477 \text{ m},$$

die Abhängigkeit der Kapazität vom Einstellwinkel φ ist nahezu eine lineare.

Sowohl die Induktivitäten als die Kapazitäten sind nach mehreren der bekannten Methoden unter Beachtung aller Vorsichtsmaßregeln und mit großer Sorgfalt mit Induktivitäts- und Kapazitätsnormalien verglichen und richtig gefunden worden.

Die Daten einer Messung sind:

Ia) L_1 $C = 1{,}669$ m
Ib) L_2 $C = 7{,}367$ m
IIa) L_1 $C = 2{,}129$ m
IIb) L_2 $C = 9{,}283$ m

woraus $k = 0{,}154$ m, $l = 5{,}35$ m.

Da als Resonanzindikator späterhin ein Hitzdrahtinstrument von Hartmann und Braun benutzt werden sollte, so mußten zur induktiven Kopplung desselben eine Kopplungsspule in den Meßkreis eingeschaltet werden und dann die Gesamtwerte für L und K gemessen werden. Es ergaben sich

$L' = 131{,}1$ m bei Spule 1
$L'' = 34{,}7$ m „ „ 2
$K = C + 0{,}15$ m,

wo C die Kapazität des Kondensators bedeutet.

Um einen Anhaltspunkt für die Genauigkeit der Messungen zu geben, seien die folgenden Resultate angeführt:

λ = 95,56 m	101,86	103,1
= 95,54 m	101,04	103,1
+ 0,02	+ 0,02	0

= 107,0	107,0
= 106,9	107,1
+ 0,1	−0,1

Die Differenzen bleiben also unter 1 Proz., im Mittel unter 0,5 Proz., d. h. innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Apparatur.

Hiermit ist eine einfache Methode gegeben, einen geschlossenen Schwingungskreis absolut zu eichen.

III. Kapitel.

Apparatur.

Die Versuchsanordnung zur Erzeugung schneller elektrischer Schwingungen war infolge der nachkriegszeitlichen Verhältnisse und der damit verbundenen Unmöglichkeit rascher Beschaffung von Hilfsapparaten zur Erzeugung ungedämpfter Schwingungen eine sehr einfache und ursprüngliche. Trotzdem

zeigen die Resultate in sich, der Verlauf der Kurven und der Vergleich mit den Messungen Drudes, daß die Methode den Anforderungen genügte.

Der Schwingungskreis bestand aus einer Anzahl Leydener Flaschen verschiedener Größe als Kapazität C, die je nach Bedarf in Reihe, parallel oder einzeln ausgeschaltet werden konnten und aus einer stetig veränderlichen Selbstinduktionsspule L nach Art der Kohlrauschschen Walzenbrücke; beide waren über eine Zinkfunkenstrecke F geschlossen, die ihrerseits an die Enden der Sekundärspule eines Induktoriums J angelegt war.

Die Primärspule wurde mit 120 Volt Gleichstrom gespeist, als Unterbrecher diente ein „Simon", der bei nicht zu lang dauernder Belastung gut und gleichmäßig arbeitete.

In den Schwingungskreis waren zwei weitere Spulen $K1$ und $K2$ eingeschaltet, wovon die eine zur Kopplung des Meßkreises diente. Die zweite bestand aus einem einfachen Drahtkreis von etwa 25 cm Durchmesser und bildete den Erreger der zu untersuchenden Spulen. Alle Kopplungen wurden bei verhältnismäßig großer Energie des Schwingungskreises sehr lose gewählt, um Rückwirkungen und Kopplungsschwingungen zu vermeiden, die Einflußlosigkeit der Kopplung auf die Eigenschwingung in jedem Falle festgestellt.

Die Wellenlängen wurden mit dem oben besprochenen Wellenmesser bestimmt. Als Resonanzlage galt durchweg die mittlere Abszisse zwischen zwei gleichgroßen Ordinaten der Resonanzkurve, die Ordinaten waren dabei ungefähr $^1/_2$—$^2/_3$ des Maximums. Es gelang fast ausnahmslos, die Genauigkeit der Wellenlänge auf 1 Proz. zu bringen. Die in der Arbeit angegebenen Werte sind Mittel aus 4—6 Einstellungen vor, während und nach jeder Resonanzeinstellung der zu untersuchenden Spulen. Immer wurde darauf geachtet, daß bei gleichzeitiger Kopplung von Meßkreis und Spule mit dem Schwingungskreis die Resonanzlagen unverändert blieben.

Die Versuche wurden an einschichtigen, auf Glasrohr gewickelten Spulen ausgeführt. Der benutzte Draht war seiden- oder baumwollumsponnener Runddraht verschiedenen Querschnittes. Bei der Wicklung wurde auf Konstanz der Ganghöhe geachtet. Die kurzen weiten Spulen standen auf Holzklötzen, die langen Spulen hingen an Seidenfäden, 2 m über

dem Erdboden, mehr als 0,5 m von allen Gegenständen entfernt.

Als Resonanzindikator der Spulen diente eine Helium-Neon-Röhre, die möglichst im Innern des Spulenkerns, mindestens 1 cm vom freien Spulenende angebracht war.

Der Lenzschen Forderung doppelter bis dreifacher Kernlänge gegenüber der Spulenlänge bzw. des Spulendurchmessers war in den möglichen Fällen Rechnung getragen.

Im folgenden sei eine Zusammenstellung der gebrauchten Bezeichnungen gegeben:

$2r$ = Durchmesser der Spule von Drahtmitte zu Drahtmitte,
h = Höhe der Spule,
l = Länge des aufgewundenen Drahtes,
n = Anzahl der Windungen,
g = Ganghöhe der Windung,
δ = Dicke des Drahtes ohne Isolation,
ε_i, ε_e = Innere bzw. äußere Dielektrizitätskonstante,
L_k = Länge des Spulenkerns,
ω = Wandstärke des Spulenkerns,
λ_1 = Grundschwingung,
λ_2, λ_3, . . = 1. 2., . . Oberschwingung.

Der Zusammenhang zwischen h, g, n und l ist durch die Gleichungen

$$h = n\,g \qquad l = 2\,r\,\pi\,n$$

gegeben.

IV. Kapitel.

Kurzer Überblick über die Ergebnisse der Lenzschen Theorie der Grundschwingung von Spulen.

Die außerordentlichen Schwierigkeiten, die der mathematischen Behandlung des Spulenproblems entgegenstehen, hat Lenz weitgehend vermindern können, indem er zwei Arten von Spulen unterscheidet und diese unter verschiedenen Gesichtspunkten in Angriff nimmt; die im Verhältnis zum Durchmesser *kurzen*, *weiten* Spulen und die *langen* Spulen.

Wird der Durchmesser einer Spule groß im Verhältnis zur Höhe, so kann das Problem als *ebenes* angesehen werden; andererseits läßt sich eine *lange* Spule als Teil einer unendlich langen Spule betrachten. Dabei kann die Grundschwingung

gewissermaßen als Oberschwingung einer unendlich langen Spule angesehen werden, zweitens wird die gegenseitige Beeinflussung der Teile mit wachsender Spulenhöhe verschwindend.

Eine weitere Vereinfachung bedeutet es, daß die Spulen sich als *quasistationäres* System behandeln lassen. Die quasistationäre Rechnung fordert als Bedingung, daß die größten Entfernungen des elektromagnetischen Wechselfeldes, d. h. die Entfernung des Aufpunktes von den auftretenden Ladungen und Strömen, klein sind gegen die Wellenlänge.

Bei *kurzen* Spulen ist die größte Entfernung nahe gleich dem Durchmesser, bei *langen* Spulen gleich der Höhe. Es muß also sein:

bei *kurzen* Spulen
$$2r \ll \lambda$$
bei *langen* Spulen
$$h \ll \lambda .$$

Für eine kurze Spule $h/2 < 0{,}3$ ist die Wellenlänge mehr als dreimal so groß als die Drahtlänge, d. h. bei 12 Windungen schon

$$\lambda = 3\pi n \cdot 2r ,$$

$$2r < \frac{\lambda}{100} \ll \lambda .$$

Bei einer *langen* Spule $g/2r = 10$ und 200 Windungen ist die Wellenlänge ungefähr gleich der Drahtlänge, also

$$\lambda \overset{n}{=} 1 \cdot \pi \cdot n \cdot 2r ,$$

$$\lambda \overset{n}{=} 60\, h ,$$

$$h < \frac{2\lambda}{100} \ll \lambda .$$

Das elektrische Wechselfeld läßt sich in quasistationärem Falle nach Clebsch auffassen als Überlagerung eines wirbelfreien Potentialfeldes und eines quellenfreien Wirbelfeldes. Dabei rührt das Potentialfeld von den am Draht entstehenden Ladungen, das Wirbelfeld von der Induktion des magnetischen Wechselfeldes her.

Aus der Berechnung des elektrischen und magnetischen Induktionsfußes läßt sich die Wellenlänge berechnen.

Die Grundschwingung einer *kurzen* Spule ergibt sich für

$$\frac{h}{2r} \ll 0{,}3 \qquad \lambda = l \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{2 \ln 16 \frac{2r}{h} - \frac{7}{2}} ,$$

für *lange* Spulen

$$\frac{h}{2r} > \gamma \qquad \lambda = l \cdot f(\varepsilon_i, \varepsilon_a) \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \ln 2 \frac{h}{2r} - 2{,}058}}.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß bei der Eigenschwingung der Strom an den Enden dauernd verschwindet.

Um die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Drahtlänge zu charakterisieren, hat Drude einen Parameter f eingeführt

$$\frac{\lambda_1}{2} = f \cdot l,$$

wo f eine Funktion der für die Eigenschwingung wesentlichen Konstanten bedeutet:

$$f = f\left(\frac{h}{2r},\ 8/\delta,\ \varepsilon_i,\ \varepsilon_a\right).$$

Für diesen Wert f hat Drude ausführliche Tabellen gegeben für $\frac{h}{2r} < 6$.

Nach Lenz ist dieser Parameter

1. für *kurze* Spulen

$$f' = \frac{\pi}{4}\sqrt{2 \ln 16 \frac{2r}{h} - \frac{7}{2}} \cdot \varphi_1(\varepsilon_i, \varepsilon_a).$$

2. für *lange* Spulen

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{2 \ln 2 \frac{h}{2r} - 2{,}058}} \cdot \varphi_2(\varepsilon_i, \varepsilon_a).$$

Für das Gebiet

$$0{,}3 < \frac{h}{2r} < \gamma$$

gibt Lenz eine extrapolatorische Kurve, die sich den beiden für f in Abhängigkeit von $h/2r$ anschmiegt.

V. Kapitel.

Versuche an kurzen, weiten Spulen.

Zu den Versuchen an kurzen, weiten Spulen wurden eine Reihe von Spulen auf Glasröhren gewickelt. Die einzelnen Windungen waren fest aneinander gepreßt und mit einem feinen Überzug von Klebwachs festgehalten, so daß der Querdruck der

Endwindungen die Konstanz der Ganghöhe nicht beeinflußte. Die Spulen wurden mitten im Zimmer weit ab von allen Gegenständen auf Holzklötzen aufgestellt. Die Entfernung der Mittelebene der Spulen von der Ebene des erregenden Drahtkreises betrug 10—30 cm, die Kopplung war immer so lose gewählt, daß die Indikatorröhre eben noch deutlich ansprach. Dazu genügte es in den meisten Fällen, die Entfernung zwischen dieser und dem freien Spulenende nicht unter 1 cm zu nehmen. Wurde die Kopplung zwischen Erreger und freischwingender Spule etwas fester genommen, so zeigten die Endwindungen im Resonanzfalle ein lebhaftes Sprühen. Etwaige schadhafte Stellen der Isolation zwischen zwei Windungen ergaben in der Nähe der Resonanzlage ein lebhaftes Funkenspiel. Der Strom pflanzt sich bei Resonanz sowohl im Draht als quer zu den Wicklungen fort. Böhm[1]) definiert die *kritische Frequenz* ja gerade als die Stromresonanz der Parallelanordnung, bei der der durch die Windungskapazität fließende Strom gleich ist dem die Induktivität durchfließenden.

In den folgenden Tabellen sind die Resultate an Spulen verschiedener Ganghöhe bei den im übrigen gleichen, charakteristischen Parametern für die Eigenschwingungen zusammengestellt.

Die Spulen der Tab. 1 bestanden aus einfachbaumwollumsponnenem Runddraht, die auf die gleiche Glasröhre aus Thüringer Glas gewickelt waren. Tab. Ia gibt die Konstanten, Tab. Ib eine Nebeneinanderstellung der eigenen Werte f_G, der von Drude für Glasröhren f_D und der von Lenz für kernlose Spulen f_L. Die Werte in ihrer Abhängigkeit von $h/2r$ sind in den unten gegebenen Kurven aufgetragen. γ bedeutet den Quotienten der eigenen Werte zu den Lenzschen:

$$\gamma = f_G : f_L .$$

Tabelle Ia.

$2r$	ω	L_2	g	ω/r	δ	g/δ	Isolation
13,77	0,37	13,4	0,027	1/19	0,017	1,58	einfach baumwollen

1) O. Böhm, Archiv f. Elektrotechnik 5. S. 411. 1917.

Tabelle Ib.

n	l	λ	$h/2r$	f_D	f_G	f_L	γ
102	44,1	236	0,20	2,65	2,68	1,79	1,50
97	42,0	225,5	0,19		2,68	1,80	1,49
92	39,8	217	0,18$_5$		2,72	1,82	1,50
87	37,7	215	0,17		2,85	1,85	1,54
77	33,3	192	0,15	2,88	2,85	1,90	1,50
67	28,9	178	0,12$_8$		3,04	1,96	1,55
37	16,0	117	0,07	3,35	3,57	2,17	1,64
27	11,7	96	0,05$_5$	3,40	3,96	2,26	1,75
14	6,05	54	0,03$_6$	3,30	4,46	2,38	1,87

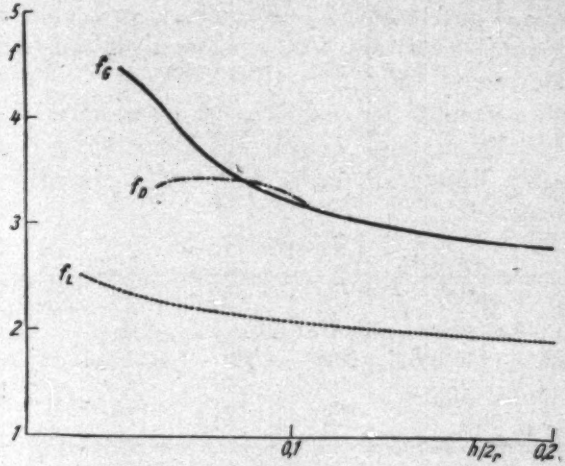


Fig. 1.

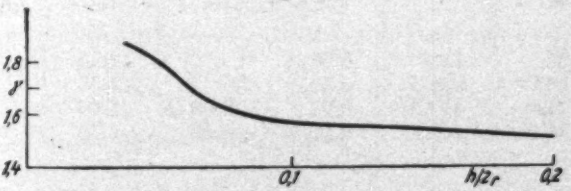


Fig. 2.

Der Vergleich mit den Drudeschen Messungen zeigt für $h/2r > 0{,}1$ eine weitgehende Übereinstimmung. Damit ist für die Spulen die Behauptung Abrahams[1]) erwiesen, „daß nach dem Bau der Maxwellschen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes die Perioden der Eigenschwingungen geometrisch ähnlicher Systeme der Länge entsprechender Strecken proportional sind."

1) M. Abraham, Wied. Ann. 66. S. 442. 1898.

Für $h/2r < 0{,}1$ zeigen die Drudeschen Kurven einen charakteristischen Knick, der jedoch nicht die Folge weiter abnehmender Spulenhöhe ist, vielmehr die Abhängigkeit des f von der Windungszahl bei wenigen Windungen anzeigt. Nimmt man nach dem Vorschlage von Lenz eine größere Windungszahl, so verläuft die Kurve weiter im gleichen Sinne. Allerdings ergibt sich auch hier, etwa bei $0{,}5 = h/2r$ ein Knick, — die Kurve für γ läßt ihn noch deutlicher hervortreten — der aber eine einfache Deutung findet:

Wenn die Kraftlinienverteilung außerhalb und innerhalb der Spule eine gleichmäßige geworden ist, so hört eine weitere Zunahme des Wertes von f in Abhängigkeit von der Dielektrizitätskonstanten auf.

Um den Einfluß der *Ganghöhe* zu bestimmen, werden auf den gleichen Kern einige Spulen mit kleinerem g/d gewickelt. Der benutzte Runddraht hatte eine etwas präparierte baumwollene Isolation.

Tabelle IIa.

$2r$	ω	L_k	g	d	ω/r	g/d	Isolation
13,78	0,37	13,4	$0{,}057_8$	0,040	1/19	1,44	präpar. baumwoll.

Tabelle IIb.

n	l	λ	$h/2r$	f_{G_1}	f_{G_2}	g_1/δ_1 1,58	g_2/δ_2 1,44
71	30,7	143	$0{,}29_8$		2,35		
60	26,0	131,5	$0{,}25_2$		2,53		
50	21,6	114,5	0,21	2,66	2,65		
45	19,5	107,5	$0{,}18_9$	2,69	2,76		

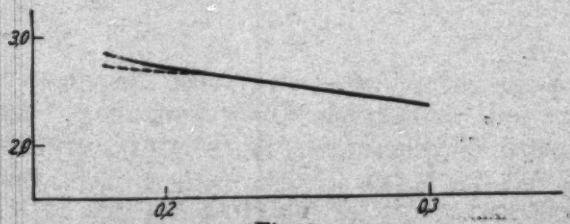


Fig. 3.

Der Vergleich der beiden Kurven, — die ausgezogene gilt für $g/d = 1{,}44$, die gestrichelte Kurve für $g/d = 1{,}58$ —

zeigt eine kleine Abhängigkeit der Eigenschwingung von der Ganghöhe. Für sehr kurze Spulen ist demnach die Windungskapazität nicht zu vernachlässigen.

Eine dritte Versuchsreihe soll die Abhängigkeit der Eigenschwingung vom Verhältnis der Wandstärke zum Radius zeigen. Auf ein weiteres Becherglas von etwa 25 cm Durchmesser werden einige Spulen auf Runddraht gewickelt. Die Ergebnisse liefert Tab. III.

Tabelle IIIa.

$2r$	ω	L_1	g	d	ω/r	g/d	Isolation
24,8	0,31	10	0,058	0,040	1/40	1,45	wie bei II

Tabelle IIIb.

n	l	λ	$h/2r$	$\omega/r = 1/40$ f_G	$= 1/10$ f_G
44	34,3	205	0,103	2,99	3,17
40	31,1	189	0,094	3,03	3,27
25	19,5	137	0,059	3,51	3,85
20	15,6	117	0,047	3,77	4,17
15	11,7	95	0,035	4,07	4,42
10	7,8	72	0,023	4,63	
7	5,5	52	0,016	4,73	

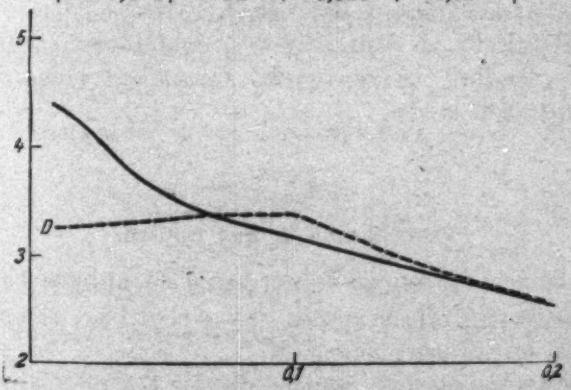


Fig. 4.

Für sehr kurze Spulen ist die Wandstärke des Hohlkerns von starkem Einfluß.

Die bisher benutzten Glasröhren waren von ähnlichem Material: *Thüringer Glas*. Zum Vergleich sei noch die Kurve

für Spulen angegeben, die auf eine andere Glassorte gewickelt waren. Obwohl die Glasstärke eine relativ größere war, verläuft die Kurve bedeutend unterhalb der Drudeschen, woraus sich auf eine kleinere Dielektrizitätskonstante der letzten Glasart schließen läßt. Vgl. Kurvenblatt Nr. 4.

Die vorstehenden Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Angaben Drudes zur Berechnung der Eigenschwingungen kurzer Spulen lassen sich ohne weiteres auf geometrisch ähnliche Spulen übertragen. Es gelten auch hier die Beobachtungen Drudes, d. h. die Eigenperiode wird beeinflußt durch den Quotienten Ganghöhe zur Drahtdicke, die Wellenlänge wird kleiner mit relativ abnehmender Wandstärke und mit abnehmender Dielektrizitätskonstante.

Der Einfluß der Dielektrizitätskonstanten auf die Eigenperiode wurde von Meßtorff[1]) direkt zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten benutzt.

2. Der Knick der Drudeschen Kurven für f bei ungefähr $g/2r = 0{,}05$ ist lediglich eine Folge kleiner Windungszahl, wie Lenz voraussagt.

3. Der Vergleich der Lenzschen Theorie mit den Resultaten ergibt für Glasröhren einen Proportionalitätsfaktor γ, der mit abnehmendem $h/2r$ wächst. Über den Einfluß der Dielektrizitätskonstanten auf diesen Wert soll im Anschluß an die Resultate an langen Spulen gesprochen werden, bei denen der Einfluß verschwindend ist, so daß sich dann Vergleiche anstellen lassen.

VI. Kapitel.

Versuche an langen Spulen.

Bei langen Spulen sind drei Arten zu unterscheiden:

1. *Beiderseits offene* Spulen, die in $\lambda/2$ bzw. einem ganzen Vielfachen davon schwingen.

2. *Einseitig geerdete* Spulen, die in $\lambda/4$ oder einem Vielfachen schwingen.

3. Spulen, die als Teil einer längeren Spule schwingen, die kurz als „*geschlossene* Spulen" bezeichnet werden sollen.

---

1) G. Meßtorff, Frankfurter Dissertation 1914.

Den Ausgangspunkt bildeten eingehende Versuche am Slabyschen Multiplikationsstabe. Derselbe besteht bekanntlich aus einer einseitig geerdeten Spule, längs deren Windungen ein metallener, geerdeter Gleitstift verschoben werden und damit eine beliebige Anzahl von Windungen kurz geschlossen und geerdet werden kann. Jedem Berührungspunkte des Gleitstifts entspricht eine bestimmte Wellenlänge, bei der die Spule in Resonanz ist mit der induzierenden Schwingung. Am offenen Ende A entsteht ein Stromknoten und ein Maximum des Potentials.

Am Erdungspunkt des Gleitstiftes liegt ein Strombauch und ein Potentialknoten. Es entsteht nun zuerst die Frage: Ist das kurzgeschlossene „*tote Ende*" von irgendwelchem Einfluß auf den Strom- und Spannungsverlauf oder schwingt das freie Ende als stehende Welle?

Durch Umwickeln des toten Endes mit Staniolpapier wie durch Abwickeln einer Anzahl von Windungen wurde die Länge des toten Endes variiert. Immer blieb die Länge des schwingenden Endes für dieselbe Welle unveränderlich: Die Eichung eines Slabyschen Multiplikationsstabes ist unabhängig von der Gesamtlänge des Stabes. Im freien Ende schwingt die elektrische Energie in einer stehenden Welle.

Die Spule läßt sich also als Thomson-Kreis auffassen, dessen Eigenschwingung aus Kapazität und Selbstinduktion berechnet werden kann.

Als Näherungswert für die Kapazität gilt die Formel:

$$C = p \cdot \frac{h}{2 \cdot l \cdot n \cdot h/2r}, \tag{1}$$

wo p einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Die Induktivität einer Spule ist bei konstanter Stromstärke:

$$L = \frac{l^2}{h} \cdot$$

Soll der Strom am Anfang verschwinden, am Erdungspunkt ein Maximum haben, so ist bei harmonischer Stromverteilung:

$$(2)\quad \begin{cases} L = \int_0^x - \frac{L_x \cdot dx}{h}, \\ L_x = L \cdot \sin dx = \frac{h}{\pi/2} \cdot dx, \\ L' = \int_0^{\pi/2} L \cdot 2/\pi \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha, \\ L' = 2/\pi \cdot L = \frac{2 \cdot l^2}{h}. \end{cases}$$

Setzt man Gleichung (1) und (2) in die Thomsonsche Gleichung, so wird

$$\lambda/4 = \pi/2 \cdot \sqrt{p \cdot \frac{h \cdot 2 \cdot l^2}{2 \cdot \ln h/r \cdot \pi \cdot h}}$$

$$= \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{1}{\ln \frac{2h}{2r}}}$$

wo $\alpha = \sqrt{\frac{\pi \cdot p}{2}}$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Slaby hat den Wert dieses Faktors bestimmt und fand, daß von einer gewissen Höhe ab der Wert konstant und im Mittel 0,78 blieb.

Aus den unten folgenden Daten des mir zur Verfügung stehenden Slabystabes ergab sich ein größerer Wert. Es ist zu vermuten, daß der von Slaby gefundene Wert aus seinen ersten Eichungen stammt, bei denen die Wellenlängen zu kurz waren.[1])

Tabelle IVa.

Slaby-Stab.

$2r$	ω	L_k	g	d	ω/r	g/d	Isolation
2,0	0,1		1/90	0,008	1/10	1,39	Seide

Tabelle IVb.

$2h/2r$	l	$\lambda/4$	φ	a
4,8	27,1	20	0,738	0,925
8,7	49,2	30	0,611	0,900
12,3	69,4	40	0,577	0,913
16,5	93,2	50	0,536	0,903
21,0	118,5	60	0,506	0,885
25,4	143,5	70	0,488	0,878
29,7	167,5	80	0,478	0,882
33,9	191,5	90	0,470	0,882
38,4	217	100	0,462	0,882
42,8	242	110	0,455	0,882

1) A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. **26.** S. 87, 1003. 1905; P. Drude, Elektrotechn. Zeitschr. **26.** S. 339. 1905; E. Gehrcke, Elektrotechn. Zeitschr. **26.** S. 697. 1905.

wo

$$\varphi = \frac{\lambda/4}{l_2} \quad \text{analog} \quad f = \frac{\lambda/2}{l_1}.$$

Für

$$\alpha = \frac{\sqrt{p \cdot \pi}}{2}$$

ergibt sich demnach ein Mittelwert 0,88, der von $h/2r = 10$ fast konstant bleibt.

Leider enthalten die Messungen Gehrckes an Slabyschen Stäben keine näheren Angaben über die Spulendimensionen. Stab Nr. 6 läßt fast dieselben Dimensionen vermuten wie der hier benutzte. Der Mittelwert 0,88 erfüllt die Beziehung zwischen λ und l mit guter Näherung.

Vergleicht man die von Slaby für *einseitig offene* Spulen aufgestellte Formel mit der von Lenz für *beiderseits offene* Spulen berechneten, so zeigt sich eine gewisse Analogie, die nach einigen Umformungen noch augenscheinlicher wird:

1. Formel von Lenz

$$f = \frac{1}{\sqrt{2 \ln 2 \frac{2h'}{2r} - 2{,}058}} \cdot \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_a),$$

wo h' die Spulenhöhe der einseitig offenen Spule bedeutet.

Nach Umformung

$$f = 0{,}707 \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{2h'}{2r} - 0{,}336}} \cdot \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_a).$$

2. Formel von Slaby

$$f = 0{,}88 \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln 2h'/2r}}.$$

Numerisch bleibt der Unterschied zwischen den Werten von Lenz und den experimentell aus den Daten des Slaby-Stabes ermittelten allerdings bedeutend. Stellt man die Werte F_E, wie sie sich aus der Eichung des Slaby-Stabes ergeben, neben die von Lenz berechneten f_L und bildet den Quotienten

$$= f_E : f_L,$$

so ergibt sich folgende Tab. V.

Tabelle V.

$2h/2r$	f_E	f_L	γ
4,8	0,73 (8)	0,64	1,16
8,7	0,61 (1)	0,525	1,16
12,3	0,57 (7)	0,48	1,20
16,5	0,53 (6)	0,45	1,20
21,0	0,50 (6)	0,43	1,18
25,4	0,48 (8)	$0,42_8$	1,17
29,7	0,47 (8)	$0,40_5$	1,17
33,9	0,47 (0)	0,40	1,17
38,4	0,46 (2)	0,39	1,18
42,8	0,45 (5)	0,38	1,19

Die Tabelle zeigt, daß sich die Lenzsche Formel, versehen mit dem konstanten Proportionalitätsfaktor

$$\gamma = 1{,}18 \pm 0{,}015$$

eignet, die Eichung des Slabyschen Multiplikationsstabes zu berechnen.

Bevor jedoch eine physikalische Bedeutung dieses Proportionalitätsfaktors versucht werden kann, muß die Richtigkeit einiger stillschweigend gemachten Voraussetzungen bei diesem Vergleich bewiesen werden.

Da das akustische Analogon beiderseits offener und einseitig verdeckter Röhren zu einem Vergleich der beiden Spulenarten auffordert, sollen die Verhältnisse untersucht werden, die beim Übergang von offenen zu einseitig geerdeten Spulen sich ändern können.

Es mag auch bedenklich erscheinen, ein *offenes* mit einem *geerdeten* System in Analogie zu setzen. In welcher Weise beeinflußt die Erdung die Schwingung des Systems? Für gerade Drähte hat E. F. Huth die Antwort gegeben: „Die Frequenz wird durch die Erdung nicht geändert."

Zur Klärung dieser Fragen wurden einige Probeversuche an beiderseits offenen Spulen vorgenommen.

Tabelle VI.

$h/2r$	f_G	f_L	γ	g/δ	ω/r
25,6	0,48	0,41	1,17	1,45	1/10
23	0,50	0,42	1,19		
20,5	$0,50_5$	0,43	1,17		
					1/20
6	0,69	0,59	1,17		
5	0,72	(0,62)	(1,16)		

$\gamma = 1{,}18 \pm 0{,}8$ Proz.

Die Werte sind auf dem Kurvenblatt Nr. 6 eingezeichnet.

Wurden die offenen Spulen in der Mitte geerdet, so änderte sich die Eigenschwingung nicht, ebensowenig, wenn die eine Hälfte der Spule in sich kurz geschlossen und geerdet wurde. Wir gewinnen daraus folgende Ergebnisse:

1. Der gegenseitige Einfluß der beiden Spulenhälften einer langen beiderseits offenen Spule ist unmerklich.

2. Die Frequenz einer Spule wird durch Erdung nicht geändert.

3. Eine einseitig geerdete Spule hat dieselbe Eigenschwingung wie eine doppelt so lange, offene Spule.

Wir können demnach die Verhältnisse an *geerdeten* Spulen ohne weiteres auf die *offenen* Spulen übertragen.

In der folgenden Tabelle sind eine Reihe von Messungen an Spulen verschiedener Dimensionen, verschiedenen Drahtmaterials gegeben.

Auch hier wurde immer der etwaige Einfluß des toten Endes untersucht und durch Vergleichung mit Spulen ohne dieses tote Ende keine Frequenzänderung gefunden.

Im Kurvenblatt 5 sind die Daten des Slaby-Stabes mit aufgetragen, zum Vergleich außerdem die Kurve, die aus der Formel von Lenz resultiert. h bedeutet die Höhe einer einseitig offenen Spule.

$$h = 2\,h.$$

Tabelle VII.

$2h/2r$	l	$\lambda/4$	f	f_L	γ
5,0	20,4	15,0	$0{,}73_5$	0,625	1,18
7,7	31,4	20,3	$0{,}64_5$	$0{,}54_5$	1,18
10,3	41,8	25,3	$0{,}60_5$	$0{,}50_5$	1,19
10,8	44,0	26,3	$0{,}59_5$	0,50	1,19
12,9	52,8	29,9	$0{,}56_5$	$0{,}47_7$	1,18
16,4	67,0	35,5	0,53	0,45	1,18
23,8	97,3	48,3	$0{,}49_5$	0,42	1,18
27,4	112,0	54,6	$0{,}48_5$	0,41	1,19
36,0	134,2	66,0	0,47	0,39	1,19
37,4	153,0	71,2	$0{,}46_7$	0,39	1,19
41,0	167,0	74,8	0,45	0,38	1,18

Um eine etwaige Abnahme des Koeffizienten festzustellen, wurden einige Versuche an *sehr langen* Spulen bis $2h/2r \leqq 150$ angestellt. Der Mittelwert blieb auch hier 1,18.

Die charakteristischen Daten der oben benutzten Spulen waren annähernd dieselben, wie bei dem Slabyschen Wellenstabe:

$$g/d = 1{,}45, \quad w/r = 1{,}10.$$

Wir finden also, daß der absolute Wert der Drahtdicke ohne Einfluß auf die Eigenschwingung ist.

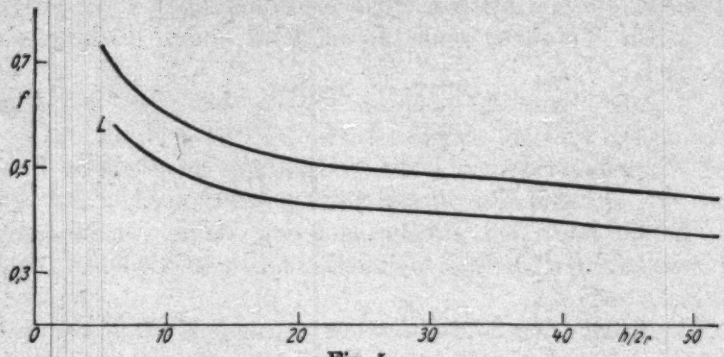


Fig. 5.

Überblicken wir die gewonnenen Ergebnisse im Anschluß an die Messungen Drudes an kernlosen Spulen und im Zusammenhang mit der Lenzschen Theorie, so gelangen wir zu den folgenden Schlüssen:

Für *lange* Spulen stimmt die Formel von Lenz mit den experimentellen Ergebnissen bis auf einen Faktor γ überein. Dieser Faktor ist eine Konstante für das gleiche Kernmaterial, er wächst mit zunehmender Dielektrizitätskonstante des Innern und mit zunehmender Wandstärke des Hohlkerns.

Für kernlose *kurze* sowohl wie für lange Spulen hat der Koeffizient den Wert $\gamma \doteq 1{,}15$, so daß wir hieraus den Einfluß des Kerns feststellen können.

Es läßt sich aber auch eine physikalische plausible Erklärung für den Faktor γ angeben: Die Forderung von Lenz als „eigentliche Bedingung der Grundschwingung, daß der Strom an den Enden dauernd verschwindet", ist bei den offenen Spulen nicht erfüllt. Vielmehr hat die Endwindung eine gewisse Kapazität gegenüber der Umgebung, die wie ein dem System angehängter Kondensator wirkt und infolgedessen eine Phasenverschiebung des Stroms und der Spannung hervorruft. Die schon vorher gebrauchte Analogie der akustischen Verhältnisse an offenen Röhren bewährt sich auch hier.

Die Richtigkeit der gemachten Annahme war bewiesen, wenn die Verhältnisse an Spulen, *ohne Endenwirkung* direkt aus der Formel von Lenz folgten. Schon Drude hatte bemerkt, daß eine Spule bei Oberschwingungen nicht in kongruenten Teilen schwingt, daß vielmehr die Potentialknoten nach den Enden zu verschoben sind. Da eine gegenseitige Beeinflussung der Teile nicht eintritt, wie schon vorher gezeigt ist, können wir, ebenso gut wie vorher bei offenen Spulen die Verhältnisse zwischen zwei Spannungsmaxima betrachtet wurden, die Verhältnisse zwischen zwei Potentialknoten betrachten, d. h. an Spulen, die ich eingangs als *geschlossene* bezeichnete.

Die Untersuchungen an beiderseits offenen Spulen, die in einem ganzen Vielfachen von $\lambda/2$, und an einseitig geerdeten Spulen, die in einem ungeraden ganzen Vielfachen von $\lambda/4$ schwangen, sind im folgenden Kurvenbild gegeben. Auch hier wurde eine etwaige Beeinflussung der Teile untereinander und des toten Endes untersucht, durch Anhängen von Kapazitäten oder Spulen an das offene Ende: Der Abstand blieb davon unberührt.

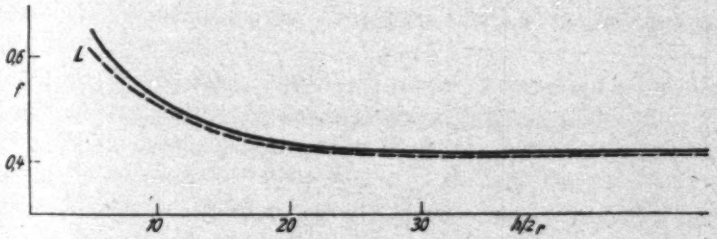


Fig. 6.

h ist der Abstand zweier Potentialknoten.

Die gefundene Kurve entspricht den zu erwartenden Ergebnissen vollkommen: Die Kurve muß oberhalb der von Lenz gegebenen verlaufen, da bei dieser das Kernmaterial unberücksichtigt ist.

Im Anschluß hieran lassen sich die Oberschwingungen und ihre Verhältnisse zueinander ohne weiteres behandeln.

VII. Kapitel.
Grund- und Oberschwingungen.

Für *kurze, weite* Spulen gibt Lenz das Spektrum der Eigenwellenlängen an:

$$\lambda_n = \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_a) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot l \cdot q_n ,$$

$$q_2 = 0{,}832, \qquad q_4 = 0{,}363,$$
$$q_3 = 0{,}522, \qquad q_5 = 0{,}283.$$

Eine experimentelle Prüfung dieser Werte ist aus mehreren Gründen nach den Methoden dieser Arbeit nicht ausführbar: Die Eigenschwingung ist abhängig von dem Verhältnis der Ganghöhe zur Drahtdicke, in starkem Maße vom Kernmaterial. vor allem können aber die einzelnen Teile einer kurzen Spule, die in Oberschwingungen schwingt, nicht für sich betrachtet werden.

Wir beschränken uns deshalb auf die Untersuchung der Verhältnisse an *langen* Spulen.

Hier ist

$$\frac{\lambda_1}{2} = l_1 \cdot f\left(\frac{h_1}{2r}\right),$$

$$\frac{\lambda_2}{2} = l_2 \cdot f\left(\frac{h_2}{2r}\right).$$

Da auf der Spule von der Höhe h_1 gerade eine ganze Welle von der Länge λ_2 Platz findet, so muß sein

$$2 h_2 = h_1$$
$$2 l_2 = l_1$$

also

$$\frac{\lambda_1}{2} = l_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \ln 2 \frac{h_1}{2r} - 2{,}058}},$$

$$\frac{\lambda_2}{2} = \frac{l_1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \ln \frac{h_1}{2r} - 2{,}058}}.$$

Im harmonischen Fall müßte sein

$$\frac{2\lambda_2}{\lambda_1} = 1.$$

In Wahrheit weichen die Verhältnisse davon ab

$$\frac{2\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{1 + \frac{2 \ln 2}{2 \ln \frac{h}{2r} - 2{,}058}}.$$

Es ergibt sich hieraus, daß das Verhältnis sich mit wachsender Spulenhöhe dem harmonischen nähert.

Für das Verhältnis der $(n+1)$ten zur n-ten Oberschwingung wird, da

$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 \ln 2 \frac{h_n}{2r} - 2{,}058}} .$$

Nun ist

$$l_n = \frac{1}{n} \cdot l_1 \qquad h_n = \frac{1}{n} \cdot h_1 ,$$

$$l_n + 1 = \frac{1}{n+1} \cdot l_1 \qquad h_n + 1 = \frac{1}{n+1} \cdot h_1 ,$$

dies eingesetzt

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \sqrt{1 + \frac{2 \ln \frac{n+1}{n}}{2 \ln \frac{h}{2r} - 2{,}058 + 2 \ln \frac{2}{n+1}}} ,$$

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{n}{n+1} \cdot \sqrt{1+\delta}$$

$$\lim_{n=\infty} \delta = 0 .$$

Mit wachsendem n nähert sich der Ausdruck unter der Wurzel dem Werte Eins, das Verhältnis der Oberschwingungen damit dem harmonischen.

Der experimentelle Nachweis dieser Formeln ist in den beiden vorhergezeigten Tatsachen zu erblicken:

1. Der theoretisch gefundene Wert für f stimmt mit dem Experiment überein.

2. Bei langen Spulen ist die gegenseitige Beeinflussung der Teile verschwindend.

VIII. Kapitel.

Zusammenfassung.

1. Die Lenzsche Theorie der Grundschwingung offener Spulen stellt unter den geforderten Einschränkungen die tatsächlichen Verhältnisse in sehr guter Näherung dar. Die Formeln gelten demnach für offene Spulen, an deren Enden der Strom bzw. die Spannung dauernd verschwindet und unter Vernachlässigung der Windungskapazität.

2. Für offene Spulen mit freien Enden tritt infolge der Kapazität der Endwindungen gegen die Umgebung eine Phasenverschiebung bei der Reflexion von Strom und Spannung ein;

die Spulenhöhe ist also kleiner, als die Theorie von Lenz fordert.

3. Der Koeffizient γ, der die wirkliche Eigenschwingung zu der theoretisch berechneten darstellt, ist für lange Spulen ($h/2r > 5$) eine Konstante, die etwas abhängt von der Natur und der Wandstärke des Spulenkerns.

4. Die Theorie von Lenz läßt sich ohne weiteres auf die einseitig geerdeten Spulen übertragen. Sie kann sowohl zur Berechnung der Eigenschwingung von Seibtschen Spulen dienen als auch die Eichung eines Slabyschen Multiplikationsstabes auf Grund der charakteristischen Parameter der Spule ermöglichen.

Die Eichung eines auf Glasrohr gewickelten Wellenstabes für

$$w/r \triangleq 1{,}10, \qquad h'/2r > 3$$

ergibt sich nach der Formel:

$$\lambda/4 = \frac{2r \cdot \pi \cdot h'}{g} \cdot 0{,}845 \cdot \sqrt{\frac{1}{\ln 2\,\frac{h'}{2r} - 0{,}336}}.$$

5. Da der Abstand zweier Potentialknoten unabhängig ist von der Kapazitätsempfindlichkeit des freien Endes, lassen sich Wellenlängen aus diesem Abstand mit größerer Genauigkeit ermitteln.

6. Die Theorie der Oberschwingungen stimmt mit dem Experiment überein.

Die vorliegende Arbeit wurde im Wintersemester 1918/19 im Physikalischen Institut der Universität Frankfurt a. M. in den Räumen des Physikalischen Vereins begonnen und im Sommersemester 1919 zu Ende geführt.

Herrn Professor Wachsmuth danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine stets freundliche Beratung. Herrn Dr. Grotrian bin ich für Hilfe bei den Experimenten, Herrn Professor Déguisne für mehrfache Überlassung von Apparaten zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen 25. Juni 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur [illegible]

Werkstätten für Pr[illegible]

Spezialfabrik von Luftpumpen zu [illegible]

und für [illegible]

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-[illegible]

System Pfeiffer, D.R.P.

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Sonderanfertigungen nach Angabe.

Vakuummeter u. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.

Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–[illegible] m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Hebelmaschinen.

1921. № 5.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Über die Erwärmung von Drähten in verdünnten Gasen durch den elektrischen Strom;* von *Hans Busch.*

(Göttinger Habilitationsschrift.)

Einleitung.

§ 1. Nimmt an einem in verdünntem Wasserstoff ausgespannten Eisendraht die Stromspannungskurve auf, so findet man bei passend gewählten Bedingungen eine eigentümliche Erscheinung, welche schematisch durch Fig. 1 wiedergegeben ist. Mit wachsender Spannung e steigt der Strom i zunächst an und zwar langsamer als die Spannung; von einem gewissen Spannungswerte an hört jedoch das Anwachsen des Stromes auf (Punkt a); der Strom bleibt von nun ab in einem beträchtlichen Spannungsbereich praktisch nahezu konstant, bis er von einem bestimmten Werte der Spannung ab (Punkt b) ziemlich plötzlich wieder anzusteigen beginnt.

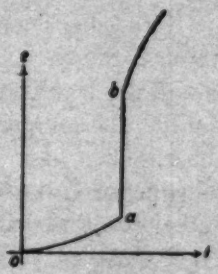


Fig. 1.

Diese Eigenschaft derartiger Eisenwiderstände ist seit langem bekannt und wird vielfach in der Technik verwendet, um den Strom in einem Apparat unabhängig von der Netzspannung konstant zu halten, so insbesondere bei den Nernstlampen; auch werden sie (unter dem Namen „Variatoren") als Anlaßwiderstände für kleinere Motoren benutzt.

Eine Erklärung für die eigentümliche Form der Stromspannungskurve findet sich bisher in der Literatur nicht; es ist wohl hin und wieder auf den bekannten hohen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes des Eisens hingewiesen worden, der ja auch die starke Krümmung des unteren Zweiges $0—a$ der Charakteristik verständlich macht; woher aber der senkrechte Anstieg des Stückes $a—b$ kommt, bedarf noch der Aufklärung.

Es soll im folgenden versucht werden, diese Aufklärung im Rahmen einer allgemeinen Untersuchung des Verhaltens elektrisch geheizter Drähte in verdünnten Gasen zu geben.

Wir werden dabei ausgehen von der Gleichung der Wärmebilanz:

$$i^2 R(T) = A(T), \tag{1}$$

(i = Stromstärke,
T = Temperatur des Drahtes,
$R(T)$ = Widerstand des Drahtes bei der Temperatur T,
$A(T)$ = pro Sek. abgeführte Wärmemenge bei der Temperatur T),

welche uns, sobald R und A als Funktionen der Temperatur bekannt sind, zu jedem Strom i die Temperatur und damit auch Widerstand R und Klemmenspannung $e = i \cdot R$ gibt.

Über die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes liegen in der Literatur zahlreiche Messungen vor, so daß die Funktion $R(T)$ für fast alle in Betracht kommenden Metalle als bekannt angesehen werden kann. Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeabgabe A bedarf dagegen einer eingehenderen Untersuchung, welcher der erste Teil der folgenden Arbeit gewidmet ist. Im zweiten Teil werden wir die gewonnenen Ergebnisse zur Konstruktion der Charakteristiken benutzen; wir werden dabei finden, daß gerade in dem Falle der oben erwähnten Eisenwiderstände die auf Grund der Gleichung (1) konstruierten Charakteristiken sich nicht realisieren lassen, weil sie labilen Zuständen entsprechen; das wirkliche Verhalten der Drähte wird abgeleitet und damit eine Theorie dieser Widerstände gegeben werden. Im dritten Teile werden schließlich die Ergebnisse der Theorie an Hand von Versuchen geprüft werden.

I. Die Abkühlungsgesetze.

§ 2. Für die Abkühlung eines erwärmten Körpers sind im allgemeinen drei Ursachen wirksam: Strahlung, Wärmeleitung und Konvektion.

a) Die Strahlung ist gegeben durch das Stefan-Boltzmannsche Gesetz, welches für einen schwarzen Körper lautet:

$$(2) \qquad A_s(T) = \sigma\,(T^4 - T_0^4)\cdot o\,.$$

T = absolute Temperatur des Körpers,

T_0 = absolute Temperatur der Umgebung,

o = Oberfläche des Körpers,

σ = Strahlungskonstante $= 5{,}76 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2\,\text{grad}^4}$ · [1])

Für einen nicht schwarzen Körper tritt zur rechten Seite als Faktor noch das Absorptionsvermögen hinzu, welches im allgemeinen von der Temperatur abhängt. Bei blanken Metallen wird das Strahlungsgesetz dadurch modifiziert, daß das Absorptionsvermögen außerdem von der Wellenlänge der Strahlung abhängt; die Theorie [Aschkinass][2]) ergibt für diesen Fall eine Strahlungsformel, welche wir unter Verwendung obigen Wertes der Strahlungskonstante in folgender Form schreiben können:

$$(3) \qquad A_s = 1{,}04 \cdot \sqrt{s}\left[\left(\frac{T}{1000}\right)^{4{,}5} - \left(\frac{T_0}{1000}\right)^{4{,}5}\right] \cdot o\ \text{Watt},$$

worin s den spezifischen Widerstand des Metalles bei der Temperatur T in $\Omega\,\frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$, d. h. den Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt bedeutet.

Der Anteil der Strahlung an der Wärmeabgabe ist nur bei hohen Temperaturen und sehr kleinen Drucken merklich; sie wird für uns im allgemeinen nur als Korrektionsgröße in Betracht kommen.

b) Während die ausgestrahlte Wärme sich zu dem übrigen Wärmeverlust einfach addiert, trifft dies für die durch *Konvektion* entzogene Wärme nicht zu. Diese läßt sich nicht getrennt für sich ermitteln, vielmehr wird durch die Konvektion der Vorgang der Wärmeleitung nur modifiziert. Der von dem bewegten Gase mitgeführte Wärmestrom ändert die Temperaturverteilung im Gase und damit auch die durch Leitung übertragene Wärme. Aus diesem Grunde ist die Konvektion der Messung sowohl wie der Theorie schwer zugänglich. Der einzige, soweit mir bekannt, vorliegende Versuch einer Theorie ist der von L. Lorenz[3]); er erhält für die von einer frei im

1) W. Gerlach, Zeitschr. f. Phys. **2**. S. 76. 1920.
2) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. **17**. S. 960. 1905.
3) L. Lorenz, Wied. Ann. **13**. S. 579. 1884.

Raume senkrecht aufgehängten ebenen Platte pro Flächeneinheit abgegebene Wärmemenge einen Ausdruck von der Form

$$A_K = C \cdot l^{-1/4} \varrho^{1/2} (T - T_0)^{5/4}, \tag{4}$$

C = Konstante,
l = Höhe der Platte,
ϱ = Dichte des umgebenden Gases in sehr großer Entfernung.

Diese Formel kann aber offenbar nur für solche Fälle gelten, in denen Wärmeverlust groß gegenüber dem bei ruhendem Gase ist; ohne diese Voraussetzung würde der nach der Formel berechnete Wärmeverlust pro Grad Temperaturüberschuß $A_K/(T - T_0)$, der mit zunehmendem l oder abnehmendem $(T - T_0)$ unter alle Grenzen sinkt, schließlich kleiner werden als der Wärmeverlust bei ruhendem Gase, was unmöglich ist. Das Lorenzsche Ergebnis — das übrigens durch Versuche bestätigt worden ist — ist daher nur sehr beschränkt verwendbar.

Wir werden uns daher im folgenden auf solche Fälle beschränken, in denen Wärmeverlust durch Konvektion möglichst ausgeschlossen ist; nach Kundt und Warburg[1]) kann man das immer dadurch erreichen, daß man den Gasdruck genügend gering wählt; denn dadurch wird einerseits der Auftrieb, die Triebkraft der Gasbewegung, und damit die Gasgeschwindigkeit klein, andererseits die Wärmekapazität der Volumeinheit und mit ihr die Kühlwirkung des Gases verringert. Diese Druckabhängigkeit kommt übrigens auch in der Lorenzschen Formel (4) in dem Faktor $\varrho^{1/2}$ zum Ausdruck.

c) Somit bleibt für uns als wesentliche Ursache der Wärmeentziehung die *Wärmeleitung* durch das umgebende Gas übrig. Wir legen von jetzt ab eine bestimmte Anordnung zugrunde: Ein Draht vom Radius r_1 und der Länge l sei in der Achse eines zylindrischen Gefäßes vom Radius r_0 ausgespannt; die absolute Temperatur des Drahtes sei T_1, die des Gefäßes T_0. Die Drahtlänge sei so groß gegen seinen Radius, daß wir den Draht als unendlich lang, d. h. seine Temperatur auf der ganzen Länge als gleich ansehen können; wir sehen also von der Wärmeableitung durch die Enden ab. $\varkappa$ sei das Wärmeleitvermögen

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 156. S. 177. 1875.

des Gases, T seine Temperatur in der Entfernung r von der Achse. Im stationären Zustande tritt durch jeden zum Draht konzentrischen Elementarzylinder vom Radius r und der Dicke dr der gleiche Wärmestrom, nämlich die vom Drahte abgegebene Wärmemenge

$$A_L = -2\pi r \varkappa \frac{dT}{dr} l.$$

Nun ist nach der kinetischen Gastheorie $\varkappa$ proportional zu $\sqrt{T}$, in Übereinstimmung mit dem Mittel der ziemlich weit auseinandergehenden Messungsergebnisse.[1]) Setzen wir dementsprechend

$$\varkappa = \varkappa_0 \sqrt{T},$$

so wird

$$A_L \frac{dr}{r} = -2\pi \varkappa l \sqrt{T}\, dT,$$

und integriert

$$A_L = \frac{\frac{4}{3}\pi \varkappa_0 l (T_1^{3/2} - T_0^{3/2})}{\ln \frac{r_0}{r_1}}. \tag{5}$$

Damit ist die gesuchte Temperaturabhängigkeit der durch Leitung abgeführten Wärmemenge gegeben. A_L ist hiernach unabhängig vom Gasdruck.

§ 3. Die Formel (5) gilt jedoch nur bei hohem Gasdruck. Bei tieferen Drucken wird der Wärmeübergang beeinflußt durch den zwischen der heißen Drahtoberfläche und der unmittelbar daran angrenzenden Gasschicht auftretenden *Temperatursprung*, der die Wärmeableitung verkleinert. Für diesen Fall gilt nach Smoluchowski[2]) für den Wärmeverlust die Formel

$$A_L = \frac{2\pi \varkappa l (T_1 - T_0)}{\ln \frac{r_0}{r_1} + \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0}\right)}, \tag{5a}$$

worin γ der „Temperatursprungkoeffizient" ist, d. h. diejenige Länge, welche, mit dem Temperaturgefälle im Gase multipliziert, den Temperatursprung ergibt. γ ist von der Größen-

1) Landolt-Börnstein, Phys.-Chem. Tab., 4. Aufl. S. 743. 1912.

2) M. v. Smoluchowski, Wied. Ann. **64**. S. 101. 1898.

ordnung der mittleren freien Weglänge L im Gase und ihr proportional, also umgekehrt proportional dem Gasdruck p. Man erkennt, daß mit abnehmendem Druck p das zweite Glied des Nenners wächst, also A in der Tat abnimmt. Für sehr großen Druck verschwindet das zweite Glied gegen das erste; dann geht die Smoluchowskische Formel in unsere Formel (5) über, wenigstens für kleine Temperaturdifferenzen ($T_1 - T_0 \ll T_0$), bei denen man statt $(T_1^{3/2} - T_0^{3/2})$ setzen kann $\frac{3}{2}\sqrt{T_0}\,(T_1 - T_0)$.

In der Tat gilt die Smoluchowskische Formel nur für kleine Temperaturdifferenzen, da bei ihrer Ableitung sowohl $\varkappa$ als auch γ als unabhängig von T angenommen wurden. In Wirklichkeit ändern sich $\varkappa$ und γ erheblich mit der Temperatur; $\varkappa$, wie oben bemerkt, proportional mit $\sqrt{T}$, und γ ist proportional der mittleren freien Weglänge L, etwa gleich $\gamma_0 L = \gamma_0 L_0 T$, da ja L proportional der absoluten Temperatur ist. Da nach den theoretischen Vorstellungen[1]), welche man sich von dem Zustandekommen des Temperatursprungs macht, eine erhebliche Veränderlichkeit des Proportionalitätsfaktors γ_0 mit der Temperatur nicht zu erwarten ist, so ist anzunehmen, daß γ proportional zu T ist. Wegen der Vernachlässigung dieser Temperaturabhängigkeit ist die Smoluchowskische Formel für unsere Zwecke, bei denen Temperaturdifferenzen bis nahe 1000° in Frage kommen, ungeeignet. Es liegt nun nahe, zu versuchen, ob sich die Ableitung jener Formel nicht so abändern läßt, daß sie auch für große Temperaturintervalle gilt. Dies ist in der Tat möglich; die erhaltenen Formeln werden aber so verwickelt, daß sie weder zur Gewinnung eines Überblicks noch für technische Anwendung geeignet sind. Vor allem aber läßt sich die Rechnung, ebenso wie die Smoluchowskische, nur unter der Voraussetzung durchführen, daß mittlere freie Weglänge klein gegen den Drahtradius ist; für Drahtradien, die von gleicher Größenordnung sind wie L oder noch kleiner, gibt es bisher keine Theorie. Jene Voraussetzung bedeutet aber in unserem Falle, in welchem der Drahtradius klein gegen den Gefäßradius ist, daß in Gleichung (5a) das

1) Vgl. z. B. M. Knudsen, Ann. d. Phys. **34.** S. 593. 1911; M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **35.** S. 983. 1911; H. Bolza, M. Born u. Th. v. Kármán, Göttinger Nachr. 1913; B. Baule, Ann. d. Phys. **44.** S. 145. 1914.

Glied $\gamma\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_0}\right)$ klein gegen $\ln\frac{r_0}{r_1}$, d. h., daß der Einfluß des Temperatursprungs auf die Wärmeabgabe gering ist. Wenn also der Temperatursprung die Wärmeabgabe merklich beeinflußt, ist obige Voraussetzung gerade nicht erfüllt.[1])

Wir sind daher für die Ermittlung der Wärmeabgabe bei tiefen Gasdrucken auf den Versuch angewiesen.

§ 4. Die *Versuche* wurden in der Weise angestellt, daß durch den zu untersuchenden Draht ein gemessener elektrischer Strom i geschickt und die Klemmenspannung e an seinen Enden bestimmt wurde. Dann ist im stationären Zustande die abgegebene Wärmemenge, im Energiemaß gemessen, gleich der zugeführten elektrischen Energie ei; die Temperatur andrerseits läßt sich aus dem Widerstande $R=\frac{e}{i}$ ermitteln, wenn dieser als Funktion der Temperatur bekannt ist.

Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 2. Der zu untersuchende Draht D war in einem dünnwandigen, mit Kühlmantel versehenen Glasgefäß G von 30 mm Durchmesser senkrecht ausgespannt. Die Drahtenden waren in 3 mm dicke Messingstäbe fest eingeklemmt; der obere war zwecks leichter Auswechselbarkeit des Drahtes in einen Schliff S eingekittet, während der untere nur aus einem kurzen Stück bestand, an das ein Kupferdraht angelötet war; dessen unteres Ende tauchte in Quecksilber, durch welches der Strom zugeführt wurde. Auf diese Weise wurde der Draht D gleichmäßig gespannt gehalten und konnte der bei den verwendeten hohen Temperaturen ziemlich beträchtlichen Wärmeausdehnung frei folgen.

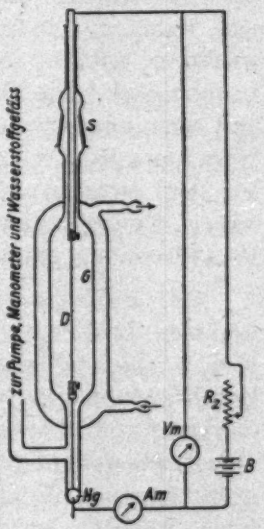


Fig. 2.

1) Bei Smoluchowski liegt die Sache anders: bei ihm ist der Durchmesser des inneren, wärmeabgebenden Zylinders nur wenig geringer als der des Gefäßes, also $\ln r_0/r_1$ von erheblich kleinerer Größenordnung. Daher kommt es, daß bei ihm der Temperatursprung von $\frac{L}{r_1}\approx\frac{1}{100}$ ab einen merklichen Einfluß auf die übertragene Wärmemenge ausübt.

Die Konstanthaltung der Temperatur der Gefäßwand geschah durch Wasser, welches den Kühlmantel durchströmte und dessen Temperatur mit einem Quecksilberthermometer bestimmt wurde. Das Gefäß *G* konnte mittels einer Gaedeschen rotierenden Quecksilberpumpe evakuiert werden; die Druckmessung geschah bei höheren Drucken mit einem Quecksilberbarometer, bei tiefen Drucken (unterhalb 4 mm Hg) mit einem Mc Leod-Manometer. Der zur Füllung verwendete Wasserstoff wurde elektrolytisch aus Kalilauge mit Nickelelektroden entwickelt und mit Chlorkalzium und Phosphorpentoxyd getrocknet; Kontrollmessungen, die mit durch ein glühendes Palladiumrohr eindiffundiertem reinstem Wasserstoff angestellt wurden, ergaben die gleichen Meßwerte, ein Zeichen, daß der elektrolytisch hergestellte Wasserstoff genügend rein war. Als Drahtmaterial wurde Platin benutzt, welches einerseits zur Temperaturbestimmung am besten geeignet ist, andrerseits eine reine, gut definierte Oberfläche gewährleistet. Zur Verwendung kamen sogenannte Haardrähte[1]) von 0,0513 mm Durchmesser. Die Drahtlänge betrug durchweg 10 cm. Strom und Spannung wurden mit technischen Präzisionsinstrumenten (Strommesser *Am* und Spannungsmesser *Vm*) gemessen; der auf den Strommesser entfallende Spannungsabfall wurde aus seinem Widerstande berechnet und von der gemessenen Spannung in Abrechnung gebracht.

§ 5. *Fehlerquellen und Korrektionen.* Als Fehlerquellen kommen in Frage: 1. Der Wärmewiderstand der Glaswand und 2. die endliche Drahtlänge (Wärmeableitung durch die Zuführungen). Die Wirkung des ersteren kann man sich ersetzt denken durch diejenige einer Wasserstoffschicht von gleichem Wärmewiderstande, sie kommt also auf eine scheinbare Vergrößerung des Gefäßradius hinaus; da aber Glas die Wärme etwa fünfmal besser als Wasserstoff leitet und die Glasdicke nur etwa 0,5 mm betrug, beträgt diese Vergrößerung des Gefäßradius nur etwa 0,1 mm, kann also vernachlässigt werden. Dagegen hat die Wärmeableitung durch die Drahtenden einen erheblichen Einfluß, der sich darin äußert, daß wegen der tieferen Temperatur der Enden sowohl der gemessene Widerstand und damit die Temperatur, als auch die Wärme-

1) Lieferant: Hartmann u. Braun, A.-G., Frankfurt a. M.

abgabe kleiner erscheinen, als es einem gleichmäßig temperierten Drahte entsprechen würde. Man kann von dieser Fehlerquelle freikommen, indem man die Spannung nicht zwischen den Drahtenden, sondern zwischen zwei genügend weit von den Enden entfernten Punkten des Drahtes mißt; dieses Verfahren ist aber bei unseren dünnen Drähten nicht anwendbar, weil die zur Messung der Spannung erforderlichen Zuleitungen, auch wenn man sie noch so dünn wählt, ebenfalls eine Kühlwirkung ausüben und die Drahttemperatur an den betreffenden Stellen erniedrigen. Ein andrer Weg wäre der, den gleichen Strom durch zwei in gleicher Weise eingespannte Drahtstücke von verschiedener Länge zu schicken und Wärmeabgabe und Temperatur aus der Differenz der gemessenen Spannungen zu ermitteln[1]); wegen des nicht ganz geklärten Einflusses der Konvektion, der ja nach Gleichung (4) von der Drahtlänge abhängt, habe ich aber auch diesen Weg nicht beschritten, sondern vorgezogen, die erforderliche Korrektion rechnerisch zu bestimmen und zwar in folgender Weise:

Bezeichnen wir mit x die Entfernung eines Drahtpunktes vom einen Ende, mit λ das Wärmeleitvermögen des Drahtmetalls in Watt/cm Grad, mit q den Drahtquerschnitt und mit $A^0(T)$ bzw. $R^0(T)$ Wärmeabgabe und Widerstand pro Zentimeter Drahtlänge, so wird die Temperaturverteilung längs des Drahtes bestimmt durch die Differentialgleichung

$$\lambda q \frac{d^2 T}{dx^2} = A^0(T) - i^2 R^0(T) \tag{6}$$

mit der Nebenbedingung, daß die Temperatur des Drahtendes ($x = x_0$) gleich der Temperatur T_0 der Umgebung ist, eine Voraussetzung, die in Anbetracht des großen Querschnitts der Messingzuführungsstäbe mit genügender Annäherung als erfüllt angesehen werden kann. Wir setzen ferner den Draht als so lang voraus, daß seine Temperatur in der Mitte unabhängig von x ist $\left(\frac{dT}{dx} = \frac{d^2T}{dx^2} = 0\right)$; wir können dann den Draht nach der einen Seite als unendlich lang ansehen und brauchen uns um das andere Ende nicht zu kümmern. Die Gleichung läßt sich leicht integrieren für den Fall, daß $A^0(T)$ und $R^0(T)$ lineare Funktionen von T sind:

---

1) R. Goldschmidt, Physik. Zeitschr. 12. S. 417. 1911.

$$A^0(T) = C \cdot \vartheta\,; \qquad R^0(T) = R_1{}^0(1 + a\,\vartheta);$$
$$\vartheta = T - T_0$$

($R_1{}^0$ = Widerstand pro cm bei der Temperatur T_0, C und a = Konstanten). Dann wird

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{1}{\lambda q}\{(C - i^2 R_1{}^0 a)\vartheta - i^2 R_1{}^0\} = \beta^2(\vartheta - \vartheta_\infty)$$

mit

$$\vartheta_\infty = \frac{i^2 R_1{}^0}{C - i^2 R_1{}^0 a}; \quad \beta^2 = \frac{C - i^2 R_1{}^0 a}{\lambda q} = \frac{i^2 R_1{}^0}{\lambda q\,\vartheta_\infty}.$$

ϑ_∞ ist die Temperatur der Drahtmitte, weil für $\vartheta = \vartheta_\infty$ $d^2\vartheta/dx^2 = 0$ wird.

Die Lösung der Differentialgleichung lautet mit Rücksicht auf die Nebenbedingung:

$$\vartheta = \vartheta_\infty(1 - e^{-\beta x})$$

oder

$$(7) \qquad \begin{cases} T = T_\infty - (T_\infty - T_0)\,e^{-\beta x}, \\ \beta = i\sqrt{\dfrac{R_1{}^0}{\lambda q\,(T_\infty - T_0)}}. \end{cases}$$

Die bei unserer Anordnung gemessene Temperatur T_b ist deren Mittelwert:

$$T_b = \frac{2}{l}\int_0^{l/2} T\,dx = T_\infty - (T_\infty - T_0)\,\frac{2}{\beta l},$$

woraus sich für die Temperatur die Korrektionsformel ergibt:

$$(8) \qquad \begin{cases} T_\infty = T_b + \dfrac{(T_\infty - T_0)^{3/2}}{i} \cdot K \\ \text{mit} \quad K = 2\sqrt{\dfrac{\lambda q}{l\,R(T_0)}}. \end{cases}$$

Für unsere Versuchsanordnung (Platindraht 0,0518 mm Durchmesser, 10 cm lang, $R = 5{,}14$ Ohm bei 10^0, $\lambda = 0{,}70$ Watt/cm Grad) berechnet sich der Faktor K zu

$$K = 1{,}06 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Amp.}}{\sqrt{\text{Grad}}} = 1{,}06\,\frac{m\,A}{\sqrt{\text{Grad}}}.$$

Die beobachtete Wärmeabgabe ist gleich

$$A_b = 2\int_0^{l/2} A^0(T)\,dx = 2\,A^0(T_\infty)\left[\frac{l}{2} - \frac{1}{\beta}\right] = A(T_\infty)\left[1 - \frac{2}{\beta l}\right];$$

damit ergibt sich für A die Korrektionsformel

$$(9) \qquad A(T_\infty) = \frac{A_b}{1 - \frac{\sqrt{T_\infty - T_0}}{i} K},$$

oder angenähert $\left(\frac{A_b}{i} = e = \text{Klemmenspannung}\right)$:

$$(9a) \qquad A(T_\infty) = A_b\left(1 + \frac{\sqrt{T_\infty - T_0}}{i} K\right) = A_b + e\sqrt{T_\infty - T_0} \cdot K.$$

Bisher hatten wir linearen Verlauf der Funktionen $A(T)$ und $R(T)$ angenommen. Lassen wir jetzt diese Voraussetzung fallen, so läßt sich die Lösung der Differentialgleichung nicht mehr in einer brauchbaren Form darstellen. Wir können aber, wenn der Verlauf von A und R nicht sehr von dem geradlinigen abweicht, eine Näherungslösung angeben, indem wir für T den Ansatz (7) machen, aber der Konstanten β einen anderen Wert beilegen, nämlich einen solchen, daß dT/dx für $x = 0$ den richtigen Betrag annimmt. Dieser läßt sich nämlich aus der Differentialgleichung (6) streng berechnen: einmalige Integration ergibt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $dT/dx = 0$ für $T = T_\infty$:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = \frac{2}{\lambda q}\left\{-\int_T^{T_\infty} A^0(T)\,dT + i^2\int_T^{T_\infty} R^0(T)\,dT\right\},$$

also

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \sqrt{\frac{2}{\lambda q}\left\{i^2\int_{T_0}^{T_\infty} R^0(T)\,dT - \int_{T_0}^{T_\infty} A^0(T)\,dT\right\}}.$$

Da andrerseits nach dem Ansatz (7)

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \beta(T_\infty - T_0)$$

sein muß, erhält man nach einigen Umformungen für β den Wert

$$\beta = i\sqrt{\frac{R_1^0}{\lambda q (T_\infty - T_0)}}\,\frac{1}{f(T_\infty)}$$

mit

$$(10) \qquad f(T_\infty) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{(T_\infty - T_0)R(T_0)}\int_{T_0}^{T_\infty} R(T)\,dT - \frac{R(T_\infty)}{R(T_0)}\frac{2}{(T_\infty - T_0)A(T_\infty)}\int_{T_0}^{T_\infty} A(T)\,dT}},$$

also für die Temperatur die Korrektionsformel

$$T_\infty = T_b + \frac{(T_\infty - T_b)^{3/2}}{i} K \cdot f(T_\infty). \tag{8a}$$

Bei den Messungen wurde der in Formel (10) vorkommende Mittelwert des Widerstandes R rechnerisch aus dem Konstanten der Widerstandsformel, der Mittelwert von A im allgemeinen durch graphische Integration ermittelt; f ergab sich stets nicht weit, im Höchstfalle 20 Proz., von Eins verschieden.

Die Korrektionsformel für die Wärmeabgabe ließ sich nicht in allgemeiner Form entwickeln. Die zu beobachtende Wärmeabgabe

$$A_b = 2 \int_0^{l/2} A^0(T)\, dx$$

wurde deshalb unter Annahme verschiedener Funktionen $A^0(T)$, die teils schneller, teils langsamer als linear anstiegen, berechnet; stets ergab sich für A_b ein Ausdruck von der Form

$$A_b = A(T_\infty)\left[1 - \frac{2}{\beta l}\, g(T_\infty)\right];$$

der Faktor $g(T_\infty)$ war immer nahe gleich dem reziproken Werte von $f(T_\infty)$, so daß das Produkt $f \cdot g$, das in Formel (9) und (9a) zu K als Faktor hinzutritt, mit genügender Annäherung gleich Eins gesetzt werden konnte. Diese Formeln behalten daher auch für den Fall nicht linearen Verlaufs von $A(T)$ und $R(T)$ Gültigkeit.

§ 6. *Messungsergebnisse.* Zunächst wurde die Widerstandsfunktion $R(T)$ des verwendeten Platindrahtmaterials bestimmt. Dazu wurde der Draht in der üblichen Weise auf ein Glimmerkreuz gewickelt, dieses in ein mit verdünntem Wasserstoff gefülltes Glasgefäß eingeschmolzen und das so hergestellte Widerstandsthermometer mit einem im Siedeapparat geeichten Platinwiderstandsthermometer von Heraeus im Paraffinölbade bei Temperaturen zwischen 0° und 380° C. in Stufen von etwa 20° verglichen. Die Messungsergebnisse ließen sich auf $^1/_{10}$ Grad genau darstellen durch die quadratische Gleichung

$$\frac{R}{R_0} = 1 + 0{,}003241\, t - 0{,}449 \cdot 10^{-6}\, t^2 \tag{11}$$

(t = Temperatur in Celsiusgraden, R_0 = Widerstand bei 0° C.). Bei dieser großen Genauigkeit konnte die Formel unbedenklich auch für höhere Temperaturen (bis etwa 900°) verwendet werden, trotz der aus dem niedrigen Werte der ersten Kon-

stanten zu schließenden nicht sehr großen Reinheit des Metalls. Bei den eigentlichen Messungen geschah die Bestimmung der mittleren Drahttemperatur aus dem gemessenen Widerstande mit Hilfe obiger Gleichung auf graphischem Wege.

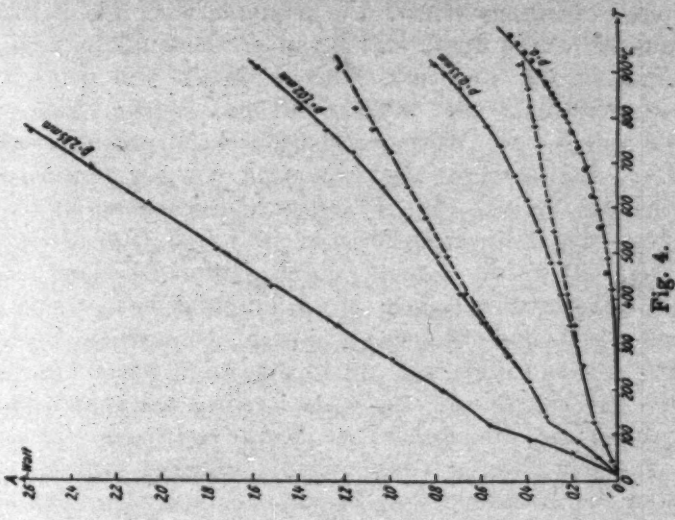


Fig. 4.

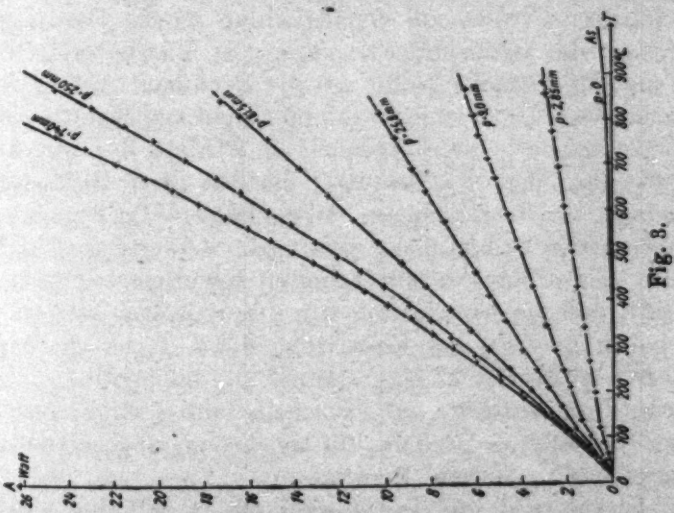


Fig. 3.

Sodann wurden Strom und Spannung am Versuchsdraht bestimmt, aus ihnen, wie in § 4 beschrieben, Temperatur und Wärmeabgabe berechnet und nach Formel (8a) und (9a) korrigiert. Die Ergebnisse sind in den Kurventafeln Figg. 3 u. 4

zusammengestellt, in denen die Wärmeabgabe als Funktion der Temperatur für verschiedene Gasdrucke p aufgetragen ist.

Die so gemessene Wärmeabgabe A setzt sich zusammen aus Strahlung und — eventuell durch Konvektion beeinflußtem — Leitungsverlust. Um letzteren auch allein ermitteln zu können, wurde durch eine besondere Messung im äußersten Vakuum — der Gasdruck war, abgesehen von dem Quecksilberdampfdruck, der etwa 0,001 mm betrug, kleiner als 0,0001 mm — der Wärmeverlust durch Strahlung ermittelt. Hierbei erschien wegen des sehr stark von der Linearität abweichenden Verlaufs der $A(T)$-Kurve (Gleichung 3) die Anwendung der Korrektionsformeln (8a) und (9a) nicht mehr zulässig. A wurde deshalb durch Differenzbildung der an zwei gleichen, von gleichem Strom durchflossenen, verschieden langen (10,0 und 34,2 cm) Drähten gemessenen Spannung ermittelt. Das Ergebnis ist die in Fig. 4 mit $p = 0$ bezeichnete Kurve, und zwar die mit einfachen Kreuzen markierten Punkte. Die durch sie hindurchgelegte Kurve ist nach der Aschkinassschen Theorie (Gleichung 3) berechnet worden, jedoch mußten die berechneten A-Werte noch mit dem Faktor 1,7 multipliziert werden, um den Anschluß an die Messungen zu erreichen; das Absorptionsvermögen der Platinoberfläche war also um das 1,7fache größer als die Rechnung ergibt; auf die Ursache dieses Unterschiedes soll hier nicht eingegangen werden. Gleichzeitig wurde die Gelegenheit zur Prüfung der Korrektionsformeln (8a) und (9a) benutzt; die mit ihrer Hilfe aus den Messungen an dem kürzeren (10 cm langen) Draht, also unter ungünstigsten Verhältnissen erhaltenen A-Werte sind in Fig. 4 durch die mit Kreisen eingerahmten Kreuze bezeichnet. Man erkennt, daß die Abweichung von den richtigen Werten, trotz des hohen Betrages der Korrektion, die z. T. bis 40 Proz. der gemessenen Werte betrug, gering ist, namentlich bei den höheren Temperaturen. Die Formeln führen somit auch noch weit außerhalb des Bereichs, für welchen sie abgeleitet wurden, zu annähernd richtigen Resultaten.

Man erkennt aus Fig. 4, daß der Anteil der Strahlung an der Wärmeabgabe nur bei den tiefsten Drucken merklich in Betracht kommt; für diese ist die nach Abzug der Strahlung verbleibende Wärmeabgabe durch Leitung in Fig. 4 durch die beiden gestrichelten Kurven wiedergegeben.

§ 7. Ehe wir nun dazu übergehen, aus dem ermittelten Verlauf der Funktion $A(T)$ die Stromspannungskurven abzuleiten, sei mit einigen Worten auf den Verlauf der A-Kurven und die aus ihm auf die Wärmeleitung des Wasserstoffs zu ziehenden Schlüsse eingegangen. Die Kurven verlaufen bei hohem Druck konvex gegen die Abszissenachse und entsprechen ziemlich genau dem Gesetz

$$A(T) = \text{const} \cdot (T^{3/2} - T_0^{3/2})$$

wie Fig. 3 zeigt, in welcher die durch die zweitoberste beobachtete Punktreihe ($p = 250$ mm) gelegte Kurve nach diesem Gesetz berechnet ist.[1]) Mit abnehmendem Druck nimmt A ab, und zwar um so mehr, je höher die Temperatur ist; die Krümmung der Kurven nimmt ab, bei $p = 80$ mm sind sie fast geradlinig, bei noch weiter sinkendem Druck zeigen sie eine konkave Krümmung gegen die Abszissenachse, welche, wenn man die Strahlung in Abzug bringt (gestrichelte Kurven), mit abnehmendem Druck beständig zunimmt, ohne diese Korrektion aber infolge der Strahlung später wieder abnimmt und schließlich in eine gegen die Abszissenachse konvexe Krümmung übergeht. Der geschilderte Verlauf trifft aber nur bei höheren Temperaturen zu; bei tieferen Temperaturen (unter 130°) ist das Verhalten ein gänzlich anderes: Hier sind die Kurven nahezu genau geradlinig; und was das Auffallendste ist, der Übergang zu dem Gebiet höherer Temperatur erfolgt in einem ausgesprochenen Knick, namentlich bei den tiefsten Drucken. In Fig. 5, welche den unteren Teil der Kurve für $p = 0{,}33$ mm in vergrößertem Maßstabe darstellt, kommt dieser Knick be-

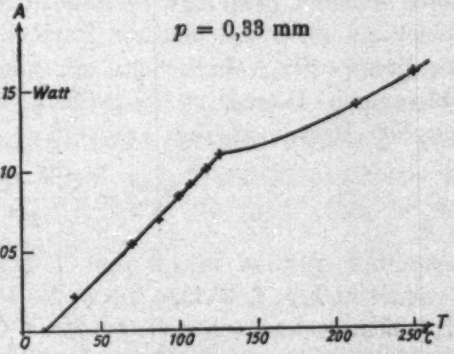


Fig. 5.

1) Die oberste Punktreihe ($p = 740$ mm) wurde wegen ihres — offenbar infolge des Konvektionseinflusses (vgl. u.) — etwas abweichenden Verlaufes hier außer Betracht gelassen.

sonders deutlich zum Ausdruck. Die Aufnahme der Punkte unmittelbar oberhalb des Knicks war schwierig, weil hier bereits die später erwähnten Labilitätserscheinungen auftraten; dies ist ein Beweis dafür, daß hinter dem Knick die Kurve sehr flach ansteigen muß. Der Knick liegt bei allen Drucken ungefähr bei der gleichen Temperatur, nämlich bei etwa 120°. Weitere Versuchsreihen zeigten, daß der Knick sowohl mit zunehmender Außentemperatur T_0, als auch mit abnehmendem Drahtdurchmesser zu höheren Temperaturen rückt.

Woher diese auffallende Trennung zweier verschiedener Temperaturgebiete kommt, ist sehr schwer einzusehen. Der zunächst sich aufdrängende Gedanke, daß ein Einfluß der Konvektion vorliege und der Knick dem Übergang von Laminarströmung zur Turbulenz entspreche, muß verworfen werden, da hierzu die Reynoldssche Zahl um viele Zehnerpotenzen zu klein ist. Die Klärung dieser Frage, die ja auch außerhalb des Zieles der vorliegenden Arbeit liegt, muß daher späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Es wurde nun versucht, die Beobachtung oberhalb 200° formelmäßig darzustellen. Der Aufbau der Smoluchowskischen Formel (5a) legt es nahe, die Darstellung durch eine Gleichung nach Art unserer Formel (5) zu versuchen, wobei der Nenner der rechten Seite um einen vom Temperatursprung abhängigen Betrag zu vergrößern wäre. Es wurde deshalb aus den Messungen der Ausdruck

$$F(T) = \frac{T^{3/2} - T_0^{3/2}}{A_L}$$

berechnet und in Fig. 6 und 7 graphisch aufgetragen, und zwar ist in Fig. 7, welche die F-Werte für die kleineren Drucke gibt, aus zeichnerischen Gründen als Ordinate das Produkt $p.F$ gewählt und bei der untersten Kurve, die sonst mit der darüber liegenden nahezu zusammenfallen würde, der Ordinatenmaßstab im Verhältnis 3:4 verkleinert worden. Es zeigt sich, daß die Punktreihen mit großer Genauigkeit auf geraden Linien liegen; nur die für Atmosphärendruck erhaltene Kurve ist merklich gekrümmt. Es liegt nahe, anzunehmen, daß hier die Konvektion eine störende Rolle gespielt hat, wir lassen diese Werte deshalb im folgenden außer Betracht. Daß bei den tieferen

Drucken die den höchsten Temperaturen entsprechenden Werte herausfallen, dürfte mit der durch Labilität (vgl. Teil II) verursachten ungleichmäßigen Temperaturverteilung zusammen-

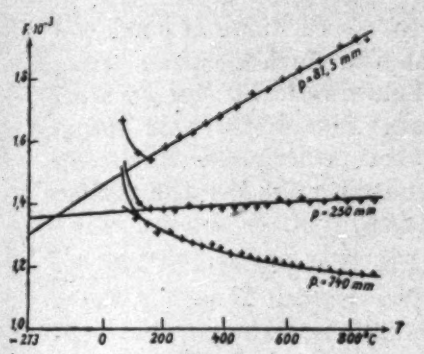


Fig. 6.

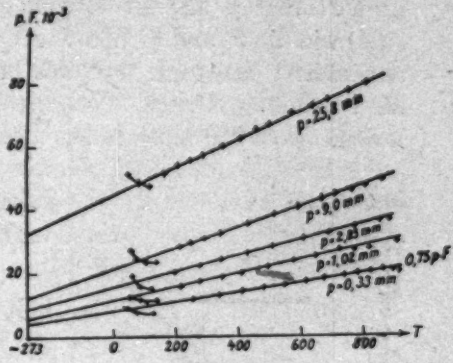


Fig. 7.

hängen, die in diesem Falle bisweilen beobachtet wurde und die Messungen fälschen mußte.

Demnach läßt sich also F darstellen durch die Gleichung

$$F(T) = M + N\,T$$

und A_L durch

$$A_L = \frac{T^{3/2} - T_0^{3/2}}{M + N\,T}, \tag{12}$$

worin M und N Konstanten sind, die vom Gasdruck p abhängen und die sich aus Fig. 6 und 7 ermitteln lassen. Sie sind in der dritten und vierten Spalte der Tab. 1 für die verschiedenen Drucke zusammengestellt.

Tabelle 1.

p (mm Hg)	$\frac{L_0}{r_1}$	$10^{-3} M_{\text{beob.}}$	$N_{\text{beob.}}$	$10^{-3} M_{\text{beob.}} \cdot p$	$N_{\text{beob.}} \cdot p$	$10^{-3} M_{\text{ber.}}$	$N_{\text{ber.}}$	$10^{3} n_{\text{ber.}}$
250	0,0222	1,35	0,057	337,5	14,2	1,30	0,221	0,170
81,5	0,0671	1,30	0,626	106	51	1,30	0,626	0,481
25,8	0,212	1,30	1,67	33,5	43	1,31	1,67	1,275
9,0	0,61	1,50	3,52	13,5	32	1,55	3,55	2,29
2,85	1,92	3,28	8,60	9,2	24,5	2,99	8,46	2,83
1,02	5,36	6,3	20,6	6,4	21	7,0	20,4	2,92
0,33	16,6	19	58	6,3	19	20,2	62	3,04

In der zweiten Spalte ist noch das Verhältnis der mittleren freien Weglänge im Gase bei der Temperatur T_0 (= 10° C.) zum Drahtradius L_0/r_1 angegeben; man erkennt, daß, solange L_0/r_1 klein gegen Eins ist, M konstant, N nahezu umgekehrt proportional p ist; ist umgekehrt L_0/r_1 groß gegen Eins, so sind, wie die 5. und 6. Spalte zeigen, die Produkte $M\,p$ und $N\,p$ angenähert konstant, letzteres hat aber einen kleineren Betrag als bei hohem Druck. Nur die Zahlenwerte für den höchsten Druck ($p = 250$ mm) fallen heraus; hier dürfte wohl ebenso wie bei Atmosphärendruck ein störender Einfluß der Konvektion vorliegen.

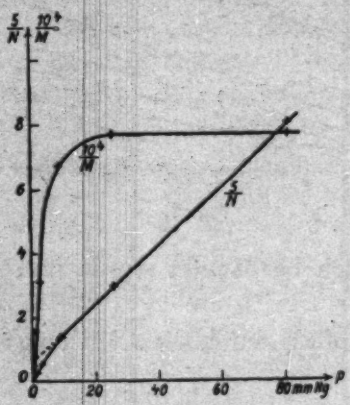


Fig. 8.

Um die genauere Abhängigkeit der Größen M und N von p zu ermitteln, wurden ihre reziproken Werte als Funktionen von p graphisch aufgetragen; Fig. 8, in der dies durchgeführt ist, zeigt, daß $1/M$ und $1/N$ sich am einfachsten durch Exponentialfunktionen darstellen lassen. Man erhält so für M und N die empirischen Formeln

$$M = \frac{1300}{1 - e^{-1{,}1\, r_1/L_0}}; \tag{13a}$$

$$N = \frac{10{,}2}{\frac{r_1}{L_0} + 1{,}4\,(1 - e^{-1{,}3\, r_1/L_0})}. \tag{13b}$$

Die nach ihnen berechneten Werte von M und N sind in der 7. und 8. Spalte der Tab. 1 wiedergegeben; sie zeigen befriedigende Übereinstimmung mit den aus den Beobachtungen ermittelten Größen.

Für höhere Drucke, bei denen die Exponentialglieder vernachlässigt werden können ($p > 20$ mm), ergibt sich aus ihnen für die Wärmeableitung die einfachere Formel

$$A_L = \frac{T^{3/2} - T_0^{3/2}}{1300 + 10{,}2 \cdot T_0 \dfrac{L_0\, T/T_0}{r_1 + 1{,}4\, L_0}}. \tag{14}$$

Wenn man beachtet, daß $L_0 \cdot \frac{T}{T_0}$ die mittlere freie Weglänge L in unmittelbarer Umgebung des Drahtes ist, so bemerkt man große Ähnlichkeit mit der nach Analogie von Gleichung (5) für höhere Temperaturdifferenzen erweiterten Smoluchowskischen Gleichung (5a):

$$A_L = \frac{\frac{1}{2}\pi \varkappa_0 l (T^{3/2} - T_0^{3/2})}{\ln \frac{r_0}{r_1} + \frac{\gamma_0 L}{r_1}}, \tag{5b}$$

sie unterscheidet sich von dieser nur dadurch, daß in dem zweiten Gliede des Nenners der Radius r_1 um einen der 1,4fachen mittleren freien Weglänge gleichen Betrag vergrößert erscheint. Gleichsetzung beider Formeln ergibt für $\varkappa_0$ und γ_0 die Werte

$$\varkappa_0 = \frac{\ln \frac{r_0}{r_1}}{\frac{1}{2}\pi l \cdot 1300} = 1{,}17 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Watt}}{\text{cm Grad}^{3/2}},$$

$$\gamma_0 = \frac{\ln \frac{r_0}{r_1} \cdot 10{,}2 \cdot T_0}{1300} = 14{,}2$$

und für das Wärmeleitvermögen des Wasserstoffs bei 0° C.

$$\varkappa(0^0) = \varkappa_0 \sqrt{273} = 1{,}93 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Watt}}{\text{cm Grad}} = 4{,}62 \cdot 10^{-4} \frac{\text{g cal}}{\text{cm Grad sec}},$$

$$\varkappa(100^0) = \varkappa_0 \sqrt{373} = 2{,}26 \cdot 10^{-3} \quad „ \quad = 5{,}40 \cdot 10^{-4} \quad „$$

Von anderen Autoren wurden früher gemessen:

$\varkappa(0^0) = 3{,}19 \cdot 10^{-4}$ (Graetz)[1]),

$\varkappa(0^0) = 3{,}27 \cdot 10^{-4}$ (Winkelmann)[2]),

$\gamma_0 = 6{,}96$ (Smoluchowski[3]) für Wasserstoff an Glas),

$\gamma_0 = 5{,}70$ (Gehrcke[4]) für Wasserstoff an Silber),

$\gamma_0 = 5{,}6$ (Smoluchowski[5]) für Wasserstoff an Platin nach Messungen von Knudsen).

Der Vergleich zeigt, daß die Übereinstimmung unserer empirischen Formel (14) mit (5b) nur ein formaler ist; insbesondere ergibt sich aus ersterer der Wert des Temperatur-

1) L. Graetz, Wied. Ann. **14**. S. 232. 1881.
2) A. Winkelmann, Wied. Ann. **44**. S. 177, 429. 1891.
3) M. v. Smoluchowski, a. a. O.
4) E. Gehrcke, Ann. d. Phys. **2**. S. 103. 1900.
5) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **35**. S. 983. 1911.

sprungkoeffizienten um mehr als das Doppelte zu groß. Bezüglich dieses letzteren ist eine Übereinstimmung auch nicht zu erwarten, da die Anwendung von Formel (5b) bei höheren Temperaturdifferenzen sich theoretisch nicht rechtfertigen läßt. Man ist also auch nicht berechtigt, aus der beobachteten formalen Übereinstimmung einen Schluß auf die Temperaturabhängigkeit des Temperatursprungkoeffizienten zu ziehen.

Dagegen stößt die Erklärung der erheblichen Abweichung des gefundenen Wärmeleitvermögens von den Werten anderer Beobachter auf Schwierigkeiten. Bemerkenswert ist, daß Schleiermacher[1]), der das Wärmeleitvermögen des Wasserstoffs nach einer der hier verwendeten ähnlichen Methode, allerdings an erheblich dickeren Drähten, bestimmte, ebenfalls zu hohe Werte des Wärmeleitvermögens erhielt, nämlich

$$\varkappa\,(0^0) = 4{,}10 \cdot 10^{-4},$$
$$\varkappa\,(100^0) = 5{,}23 \cdot 10^{-4},$$

von denen namentlich der letztere nur wenig von unseren Ergebnissen abweicht. Der Vorgang der Wärmeleitung durch Gase in der Umgebung dünner Drähte bedarf daher noch der Aufklärung durch weitere Versuche, wobei insbesondere der Drahtradius[2]) zu variieren wäre.

II. Die Stromspannungskurven und die Abhängigkeit der Drahttemperatur vom Strom.

§ 8. Mittels der im ersten Teil ermittelten Funktion $A(T)$ ist es uns nunmehr auf dem in der Einleitung angedeuteten Wege möglich, die Stromspannungskurven für Drähte aus beliebigem Material zu konstruieren. Die dazu benötigten Funktionen $R(T)$, welche die Abhängigkeit des Drahtwiderstandes von der Temperatur angeben, entnehmen wir einer Arbeit von Somerville[3]), welcher die Temperaturkoeffizienten des Widerstandes einer großen Anzahl von Metallen in einem weiten Temperaturbereich (0—1000°) untersucht hat. Der

1) A. Schleiermacher, Wied. Ann. **34.** S. 623. 1888; vgl. a. S. Weber, Ann. d. Phys. **54.** S. 325. 437. 1917; daselbst auch weitere Literaturangaben.

2) Es sei besonders betont, daß die Formeln (13a) und (13b) natürlich nicht den Anspruch erheben, die Abhängigkeit der Wärmeabgabe vom Drahtradius darzustellen; die Größe r_1 ist in ihnen lediglich der übersichtlicheren Darstellung halber verwendet.

3) A. Somerville, Phys. Rev. **31.** S. 261. 1910.

Einfachheit halber werden wir im folgenden, wo nicht ausdrücklich anders bemerkt, stets die Drahtlänge als so groß annehmen, daß der Einfluß der Enden nicht in Betracht kommt, daß also die Temperatur als gleichmäßig über die ganze Länge verteilt angesehen werden kann.

Die Konstruktion der Stromspannungskurven läßt sich ohne Rechnung auf graphischem Wege wie folgt durchführen: Der Zusammenhang zwischen Spannung e, Strom i, Wärmeabgabe pro Sek. A und Widerstand R ist gegeben durch die Gleichungen

$$e \cdot i = A\,(T)\,,$$
$$\frac{e}{i} = R(T);$$

oder logarithmiert

$$\log e + \log i = \log A\,(T)\,,$$
$$\log e - \log i = \log R\,(T)\,.$$

In einem Koordinatensystem, in welchem $\log i$ als Abszisse und $\log e$ als Ordinate aufgetragen ist, sind also die Linien $\log A = \text{const.}$ parallele, unter 45^0 gegen die Koordinatenachsen geneigte Gerade, die Linien $\log R = \text{const.}$ ebenfalls parallele Gerade, die zur ersteren Schar senkrecht stehen. Das heißt aber, jeder Punkt im $\log e$, $\log i$-Koordinatensystem ist gleichzeitig ein Punkt im rechtwinkligen $\log R$, $\log A$-Koordinatensystem, welches gegen das $\log e$, $\log i$-System um 45^0 entgegen dem Uhrzeigersinne verdreht ist, wie es Fig. 9 zeigt; dabei ist der Maßstab im $\log R$, $\log A$-System um das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache kleiner als im $\log e$, $\log i$-System. Um die e, i-Kurve zu finden, braucht man also nur die R, A-Kurve, die ja durch die Funktionen $A(T)$ und $R(T)$ in Parameterdarstellung gegeben ist, auf logarithmisch geteiltem Koordinatenpapier aufzutragen; sie stellt dann zugleich die e, i-Kurve dar, wenn man nur die Koordinatenachsen um 45^0 im Sinne des Uhrzeigers dreht. Bringt man dann noch auf der R-Achse neben der Widerstandsskala eine Temperaturskala an, so lassen sich aus dem Diagramm alle in Betracht kommenden Größen ablesen.

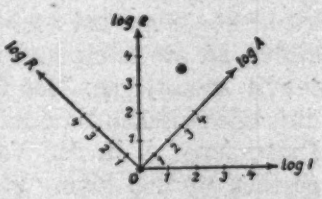


Fig. 9.

Diese Konstruktion ist in Fig. 10 für einen Eisendraht von 10 cm Länge und 0,0518 mm Durchmesser unter Benutzung der im ersten Teil erhaltenen A-Kurven und der Somervilleschen Widerstandswerte durchgeführt. Es ergibt sich das überraschende Resultat, daß die e (i)-Kurven, nachdem sie von kleinen Werten des Stromes und der Spannung an in ständig zunehmendem Maße gestiegen sind, *zurückbiegen*,

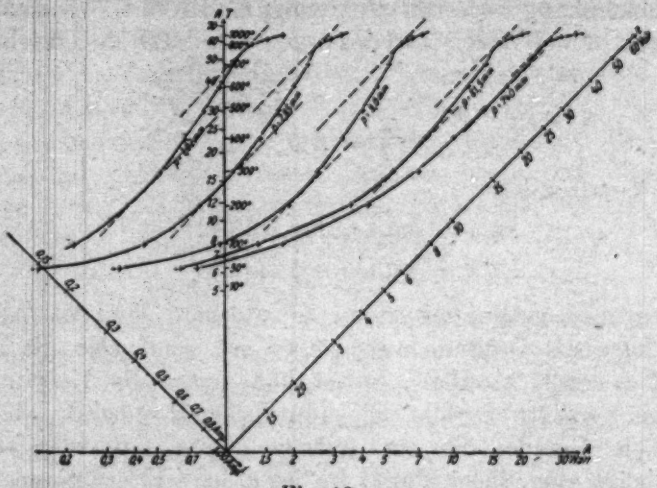


Fig. 10.

d. h. daß der Strom, der mit der Spannung zunächst ansteigt, ein *Maximum erreicht* und mit weiter wachsender Spannung *wieder abnimmt*. Bei noch höherer Spannung erreicht der Strom schließlich ein Minimum, um dann mit zunehmender Spannung wieder anzusteigen. Der Effekt, für den als Maß die Abszissendifferenz zwischen Maximum und Minimum in der logarithmischen Darstellung, d. h. das Verhältnis der zugehörigen Ströme angesehen werden kann, ist am ausgesprochensten bei mittleren Drucken ($p = 9$ mm); bei höheren sowohl wie bei tieferen Drucken nimmt er ab und ist bei Atmosphärendruck fast unmerklich.

Wir wollen derartige Stromspannungskurven, bei denen der Übergang vom ansteigenden zum abfallenden Teil durch ein *senkrechtes* Kurvenstück, d. h. ein Maximum des Stromes, erfolgt, fernerhin als „*rückfallende Charakteristiken*" bezeichnen, zum Unterschied von den „abfallenden" Kurven, bei denen der Übergang durch ein wagerechtes Kurvenstück (Maximum der Spannung) erfolgt.

Ehe wir uns der Frage des wirklichen Vorkommens solcher rückfallender Charakteristiken zuwenden, wollen wir die Bedingung dafür feststellen, daß die Konstruktion auf derartige Kurven führt. Die Bedingung ist offenbar die, daß die Spannung — oder, da die Spannung, wie aus Fig. 10 hervorgeht, mit zunehmender Temperatur stets ansteigt — die Temperatur mit abnehmendem Strome i zunimmt, d. h. daß

$$\frac{dT}{di} < 0$$

ist. dT/di berechnet sich aus Gleichung (1):

$$2 \log i = \log A(T) - \log R(T),$$

$$\frac{2}{i}\frac{di}{dT} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{R}\frac{dR}{dT},$$

oder, indem wir die dimensionslosen Größen

$$\alpha = \frac{T}{A}\frac{dA}{dT}, \qquad \varrho = \frac{T}{R}\frac{dR}{dT}$$

einführen:

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} \frac{T}{i}\frac{di}{dT} = \frac{\alpha - \varrho}{2}, \\ \frac{i}{T}\frac{dT}{di} = \frac{2}{\alpha - \varrho}. \end{cases}$$

α und ϱ, die logarithmischen Differentialquotienten der Funktionen $A(T)$ und $R(T)$, sind gleich den Potenzen der absoluten Temperatur, mit denen A und R in der Umgebung der betreffenden Temperatur anwachsen. Berechnung der entsprechenden Größen für die Funktionen $R(i)$ und $e(i)$ ergibt:

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} \varphi = \frac{i}{R}\frac{dR}{di} = \frac{i}{R}\frac{dR}{dT}\frac{dT}{di} = \varrho \cdot \frac{i}{T}\frac{dT}{di} = \frac{2\varrho}{\alpha - \varrho}; \\ \varepsilon = \frac{i}{e}\frac{de}{di} = \frac{1}{R}\left(R + i\frac{dR}{di}\right) = 1 + \varphi = \frac{\alpha + \varrho}{\alpha - \varrho}. \end{cases}$$

Aus Gleichung (15) bzw. (16) folgt als Bedingung für das Auftreten einer rückfallenden Charakteristik

$$\left(\frac{de}{di} \text{ bzw. } \frac{dT}{di} < 0\right):$$

$$\text{(17)} \qquad \alpha - \varrho < 0,$$

d. h. die Wärmeabgabe A muß mit der Temperatur prozentual langsamer anwachsen als der Widerstand R.

Trägt man α und ϱ als Funktionen von T auf, so fordert Bedingung (17), daß die α-Kurve tiefer liegt, als die ϱ-Kurve, oder, da dies nur streckenweise der Fall sein kann, daß die beiden Kurven sich schneiden. Ein solcher Schnittpunkt $(\alpha - \varrho = 0)$ bedeutet nach Gleichung (16), daß $de/di = \infty$ ist, er entspricht also einem Strommaximum oder -Minimum der Charakteristik Fig. 10.

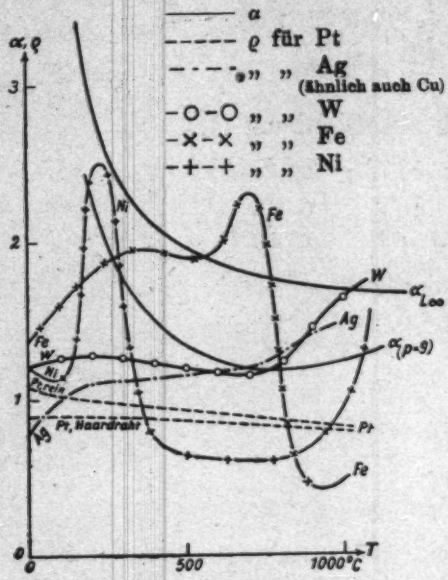


Fig. 11.

Die Kurven $\varrho = \varrho\,(T)$ zeigt für verschiedene Metalle Fig. 11; sie sind berechnet aus den oben erwähnten, von Somerville ausgeführten Messungen des Temperaturkoeffizienten

$$a = \frac{1}{R_0}\,\frac{dR}{dT}$$

mittels der Gleichung

$$\varrho = T\,\frac{R_0}{R}\,a\,,$$

bis auf die Werte für Platin, welche für das Material der verwendeten Haardrähte aus Gleichung (11), für reines Platin aus der Gleichung

$$\frac{R}{R_0} = 1 + 0{,}003945\,t - 0{,}584 \cdot 10^{-6}\,t^2$$

berechnet sind. Bei Pt, Ag, Cu und W liegt ϱ in der Nähe von 1, da bei diesen Metallen der Widerstand nahezu proportional mit der absoluten Temperatur wächst. Bei Eisen und Nickel erreicht ϱ wesentlich höhere Werte; die Kurve für Fe besitzt ein flaches Maximum bei 300—400° und über dieses übergelagert eine Spitze bei 700°; die ϱ-Kurve für Ni zeigt ein scharfes Maximum bei etwa 200°; die Maximalwerte von ϱ sind bei beiden Metallen größer als 2. Wegen des großen Einflusses geringfügiger Verunreinigungen sowie der mechanischen und thermischen Vorbehandlung können die

Kurven das Verhalten der Metalle natürlich nur in großen Zügen wiedergeben.

Die Größe a berechnen wir aus den Ergebnissen des ersten Teiles und erhalten

a) bei Abkühlung nur durch Strahlung aus Gleichung (3):

$$a_S = \frac{T}{A_S}\frac{dA_S}{dT} = \frac{4^1/_2 \cdot T^{4^1/_2}}{T^{4^1/_2} - T_0^{4^1/_2}} + \frac{1}{2}\,\frac{T}{s}\,\frac{ds}{dT},$$

oder, da

$$\frac{T}{s}\,\frac{ds}{dT} = \frac{T}{R}\,\frac{dR}{dT} = \varrho \approx 1$$

ist, angenähert

$$a_S = \frac{4^1/_2}{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^{4^1/_2}} + \frac{1}{2} \tag{18}$$

und für Temperaturen oberhalb 300° C., für welche

$$\left[1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^{4^1/_2}\right]$$

nahe gleich Eins ist,

$$a_s \approx 5; \tag{18a}$$

b) bei Abkühlung nur durch Leitung bei hohem Druck aus Gleichung (5):

$$a_{L_\infty} = \frac{\frac{3}{2}T^{3/2}}{T^{3/2} - T_0^{3/2}} = \frac{3/2}{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}}; \tag{19}$$

c) bei Abkühlung nur durch Leitung bei niedrigem Druck aus Gleichung (12):

$$a_L = \frac{\frac{3}{2}T^{3/2}}{T^{3/2} - T_0^{3/2}} - \frac{nT}{1+nT} = a_{L_\infty} - \frac{nT}{1+nT}, \tag{20}$$

wobei $n = N/M$ gesetzt ist; die Werte von n für die verschiedenen Drucke gibt die letzte Spalte von Tab. 1;

d) bei Abkühlung durch Leitung *und* Strahlung:

$$a = \frac{A_L}{A_L + A_S}\,a_L + \frac{A_S}{A_L + A_S}\,a_S \tag{21a}$$

$$= a_L + \frac{A_S}{A_L + A_S}\,(a_S - a_L). \tag{21b}$$

Zu den Formeln ist zu bemerken:

a) Bei Abkühlung nur durch Strahlung, also Drähten im Hochvakuum ist $\alpha = \alpha_s$ stets größer als 5, also immer weitaus größer als ϱ; in diesem Falle (z. B. bei Glühlampen) können daher niemals rückfallende Charakteristiken auftreten.

b) a_{L_∞} (Abkühlung durch Leitung bei hohem Druck) ist nach Gleichung (19) stets größer als $^3/_2$. Die Kurve $a_{L_\infty}(T)$ ist in Fig. 11 mit eingezeichnet; sie kommt mit einer der ϱ-Kurven, nämlich mit derjenigen für Eisen zum Schnitt bei etwa 550 und 770°; bei Eisendrähten in Wasserstoff von hohem Druck (etwa Atmosphärendruck) sind daher in einem engen Temperaturbereich rückfallende Charakteristiken zu erwarten.

c) Bei tieferen Drucken ist nach Gleichung (20) a_L stets kleiner als a_{L_∞} und zwar um den Betrag $n\,T/(1 + n\,T)$, der im Maximum den Betrag 1 annehmen kann und im übrigen außer von der Temperatur noch vom Druck p abhängt. n wächst gemäß Tab. 1 mit abnehmendem Druck ständig an und erreicht beim Druck Null einen endlichen Grenzwert, der etwa bei 0,003 liegt; im gleichen Sinne ändert sich $n\,T/1 + n\,T$ mit p. Von einer Wiedergabe der a_L-Kurven sehen wir ab, weil bei tiefen Drucken die Kurven durch die Strahlung erheblich beeinflußt werden.

d) Im allgemeinen Falle berechnet sich a aus a_L und a_s nach einer Art Mischungsregel (Gleichung 21 a); bequemer ist die Form (21 b), welche, da $a_s - a_L$ nur innerhalb enger Grenzen (im Temperaturgebiet 200—1000° C. nur zwischen 2,7 und 4,1) veränderlich ist, zeigt, daß infolge der Strahlung zu a_L ein Betrag hinzukommt, der dem Verhältnis von Strahlungsverlust zum gesamten Wärmeverlust proportional ist, der also bei tiefen Temperaturen sehr klein ist, bei höheren Temperaturen und tiefen Drucken aber sehr schnell mit der Temperatur ansteigt. Hierdurch wird bewirkt, daß — während a_L und a_s mit zunehmender Temperatur abnehmen — a bei tiefen Drucken und höheren Temperaturen mit zunehmender Temperatur wächst; die a-Kurven für tiefere Drucke müssen daher bei einer gewissen Temperatur ein Minimum durchlaufen.

Fig. 12 zeigt die hiernach berechneten a-Kurven, die das Gesagte bestätigen. Bei höheren Drucken nimmt a mit zunehmender Temperatur ab; mit abnehmendem Druck p rücken

die a-Kurven zunächst nach unten (wegen der Abnahme von a_L); von $p = 9$ mm an beginnen die Kurven bei höheren Temperaturen wieder anzusteigen und rücken bei weiter abnehmendem Druck (infolge zunehmenden Einflusses des zweiten Gliedes in Gleichung (21 b)) wieder nach oben. Die Kurve für $p = 9$ mm liegt am tiefsten von allen, entspricht also den kleinsten a-Werten; bei diesem Druck wird daher Gleichung (17) über den weitesten Temperaturbereich erfüllt, die rückfallende Charakteristik am ausgesprochensten sein, wie es das Charakteristikendiagramm Fig. 10 bereits zeigte. Diese Kurve ($p = 9$ mm) ist in Fig. 11 ebenfalls eingezeichnet. Sie schneidet außer der ϱ-Kurve für Fe noch diejenigen für Ni, Ag und W, und zwar erstere in drei, letztere in je einem Punkte; auch bei diesen Metallen sind somit rückfallende Charakteristiken zu erwarten.

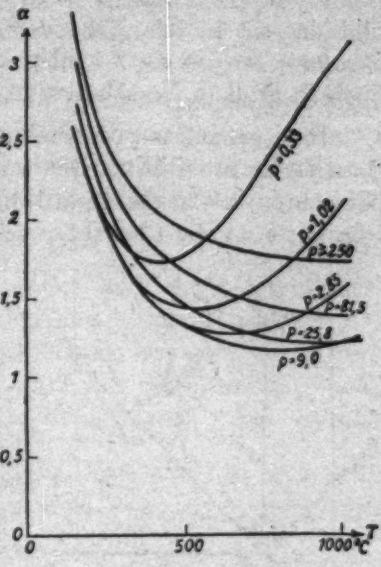


Fig. 12.

§ 9. Wir wenden uns nun der Frage des wirklichen Auftretens rückfallender Charakteristiken zu. Solche sind bisher nie beobachtet worden, und auch bei den von mir angestellten Versuchen — um das vorwegzunehmen — haben sich keine gezeigt. Wie erklärt sich dieser Unterschied zwischen Theorie und Wirklichkeit? Da, wie bekannt, bei Leitern mit abfallender Charakteristik leicht instabile Zustände auftreten können[1]), liegt es nahe, die Ursache der Abweichung in mangelnder Stabilität zu suchen. In der Tat ist bei einem Leiter mit rückfallender Charakteristik, der unter Vorschaltung eines Widerstandes R_v an eine Stromquelle angeschlossen ist, das Kauf-

1) W. Kaufmann, Ann. d. Phys. **2**. S. 158. 1900; zusammenfassende Darstellung z. B. bei H. Busch, Stabilität, Labilität und Pendelungen in der Elektrotechnik, Leipzig (S. Hirzel) 1913, Kap. I.

mannsche Stabilitätskriterium meistens nicht erfüllt; denn dieses verlangt, daß

$$R_v > -\frac{de}{di},$$

und das ist in der Nähe des Maximums oder Minimums des Stromes, wo $-de/di$ über alle Grenzen wächst, auch bei noch so großem Vorschaltwiderstande R_v sicher nicht der Fall.

Eine genauere Untersuchung zeigt jedoch, daß das Kaufmannsche Stabilitätskriterium hier nicht anwendbar ist. Wir betrachten hierzu das logarithmische Charakteristikendiagramm Fig. 13; e ist die Charakteristik des Leiters, E die der Stromquelle, wobei der Vorschaltwiderstand mit zur Stromquelle gerechnet werde. Dem stationären Zustande entspricht der Schnittpunkt P beider Kurven. Wir nehmen nun an, das Gleichgewicht sei in der Weise gestört, daß die Temperatur des Leiters etwas geringer sei als dem stationären Zustande entspricht; dann ist auch sein Widerstand geringer, so daß der Zustand etwa dem Punkte P_1 auf der Charakteristik E entspricht. Damit der Zustand stabil ist, muß die Gleichgewichtsstörung von selber verschwinden, d. h. die Temperatur steigen; dazu ist nötig, daß die zugeführte Wärmemenge größer als die abgeführte ist. Wir legen durch P_1 die Linie gleichen Widerstandes, d. h. gleicher Temperatur $\overline{P_1 Q}$ (Parallele zur A-Achse), welche die Charakteristik e im Punkte P_0 schneidet; dann ist die zugeführte Wärmemenge durch die Strecke $\overline{Q P_1}$, die fortgeführte durch $\overline{Q P_0}$ gegeben; Bedingung der Stabilität ist also die, daß der Punkt P_1 rechts oberhalb von P_0 liegt, d. h. daß die Charakteristiken E und e sich so schneiden, wie es in Fig. 13 der Fall ist; oder, analytisch ausgedrückt, daß

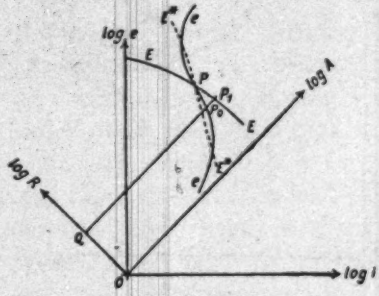


Fig. 13.

$$-\frac{dE}{di} < -\frac{de}{di}$$

und in dem Sonderfalle, daß E die Spannung einer konstanten Batterie mit vorgeschaltetem Widerstande R_v ist ($E = E_0 - i R_v$):

$$R_v < -\frac{de}{di}.$$

Damit der Zustand stabil ist, darf daher das Kaufmannsche Kriterium gerade nicht erfüllt sein.[1]) Labile Zustände treten also nur dann auf, wenn die Charakteristik der Stromquelle sehr steil, etwa wie die punktierte Kurve E^* in Fig. 13, verläuft.

Wir untersuchen weiter den Fall, daß zwei gleiche Widerstände mit rückfallender Charakteristik in Reihe geschaltet an eine Batterie von der konstanten Spannung E_0 gelegt sind. Bedingung für den Gleichgewichtszustand ist dann

$$E_0 - e_1(i) = e_2(i),$$

worin $e_1(i)$ und $e_2(i)$ die Spannungen an den beiden Widerständen sind. Man erhält somit die möglichen Gleichgewichtszustände, indem man die Charakteristik $e(i)$ mit der Kurve $e = E_0 - e(i)$, d. h. der gleichen aber von der Geraden $e = E_0$ aus nach unten aufgetragenen Charakteristik zum Schnitt bringt, wie in Fig. 14 geschehen. Die Figur zeigt, daß dann im allgemeinen drei Schnittpunkte auftreten, von denen die beiden äußeren S_1 und S_3 stabilen Zuständen entsprechen; dagegen erscheint bei dem dem mittleren Schnittpunkt S_2 entsprechenden Gleichgewichtszustande, bei welchem beide Widerstände gleiche Spannung und Temperatur und beide rückfallende Charakteristik haben, die Stabilität zweifelhaft und muß besonders untersucht werden. Hierbei ist aber die oben verwendete graphische Methode nicht anwendbar, weil der Zustand durch *zwei* voneinander unabhängige Variable,

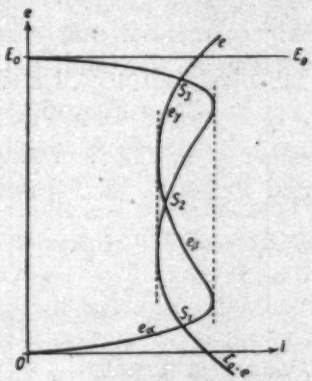


Fig. 14.

1) Wesentlich für das Resultat ist *gleichsinnige* Änderung von R und T, d. h. positiver Temperaturkoeffizient des Leiters. Bei negativem Temperaturkoeffizienten ergibt sich, wie man leicht sieht, das umgekehrte Resultat, also das Kaufmannsche Kriterium. Leiter mit abfallender Charakteristik, wie sie Kaufmann untersucht, haben in der Tat, soweit die Charakteristik durch thermische Vorgänge bestimmt ist, stets negativen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes.

nämlich die Temperaturen der beiden Widerstände, bestimmt ist; wir sind daher auf analytische Behandlung angewiesen. Diese läßt sich nach der bekannten Methode der kleinen Schwingungen[1]) ohne Schwierigkeit nach feststehenden Rechenregeln durchführen. Wir wollen jedoch einen einfacheren Weg einschlagen, der uns zwar nicht die vollständigen, aber die wichtigste notwendige Stabilitätsbedingung liefert.

Die Temperaturen der beiden Widerstände seien T_1 und T_2, ihre Wärmekapazität K, t sei die Zeit. Dann gelten die beiden Gleichungen

$$i^2 R(T_1) - A(T_1) = K \frac{dT_1}{dt},$$

$$i^2 R(T_2) - A(T_2) = K \frac{dT_2}{dt}.$$

Für den stationären Zustand im Punkte S_2 ($d/dt = 0$, $T_1 = T_2 = T_0$) gilt für beide Widerstände

$$i_0^2 R(T_0) - A(T_0) = 0.$$

Wir betrachten nun einen vom Gleichgewicht ein wenig abweichenden Zustand, indem wir setzen:

$$T_1 = T_0 + \vartheta_1, \quad T_2 = T_0 + \vartheta_2, \quad i = i_0 + j,$$

wobei ϑ_1, ϑ_2 und j so kleine Größen sein sollen, daß ihre Quadrate und Produkte zu vernachlässigen sind und wir setzen können

$$R(T_1) = R(T_0 + \vartheta_1) = R(T_0) + \vartheta_1 R'(T_0) \text{ mit } R'(T_0) = \left(\frac{dR}{dT}\right)_{T=T_0}$$

. . . . . .

usw.

Dann ergibt sich:

$$R(T_0) 2 i_0 j + [i_0^2 R'(T_0) - A'(T_0)] \vartheta_1 = K \frac{d\vartheta_1}{dt},$$

$$R(T_0) 2 i_0 j + [i_0^2 R'(T_0) - A'(T_0)] \vartheta_2 = K \frac{d\vartheta_2}{dt}$$

und durch Bildung der Differenz:

$$[i_0^2 R'(T_0) - A'(T_0)](\vartheta_1 - \vartheta_2) = K \frac{d(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{dt}.$$

Zur Stabilität ist erforderlich, daß vorhandene Abweichungen vom Gleichgewichtszustande von selber verschwinden, d. h. daß

1) Vgl. z. B. H. Busch, a. a. O. Kap. I, 4.

die absoluten Beträge von ϑ_1 und ϑ_2 mit der Zeit abnehmen müssen. Das gleiche muß aber auch für den absoluten Betrag der Differenz $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ gelten, da ja diese Differenz im stationären Zustande ebenfalls verschwinden muß. Eine notwendige, wenn auch nicht hinreichende Stabilitätsbedingung ist also die, daß $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ und $d(\vartheta_1 - \vartheta_2)/dt$ verschiedenes Vorzeichen haben müssen; die Bedingung dafür ist nach der letzten Gleichung

$$i_0^2 R'(T_0) - A'(T_0) = \frac{i_0^2 R(T_0)}{T_0} [\varrho(T_0) - \alpha(T_0)] < 0,$$

d. h.

$$\alpha - \varrho > 0.$$

Da aber nach Gleichung (17) bei Widerständen mit rückfallender Charakteristik diese Bedingung gerade *nicht* erfüllt ist, ergibt sich, daß der Zustand im Punkte S_2 stets *labil* ist. Das heißt aber:

Bei zwei gleichen, in Reihe geschalteten Widerständen mit rückfallender Charakteristik ist der Zustand gleicher Temperatur beider Widerstände stets labil.

Dies ist nun ein sehr wichtiges Ergebnis. Da man nämlich jeden Widerstand als aus einer beliebigen Anzahl von in Reihe geschalteten Teilwiderständen zusammengesetzt ansehen kann, so folgt, daß bei Widerständen mit rückfallender Charakteristik der Zustand gleichmäßiger Temperaturverteilung stets instabil ist; es muß sich also stets eine ungleichmäßige Temperaturverteilung einstellen.

§ 10. Welche Temperaturverteilung stellt sich nun in Wirklichkeit bei einem Widerstande mit rückfallender Charakteristik ein und welches ist der zu erwartende Verlauf der wirklichen Stromspannungskurve? Zur Beantwortung dieser Frage denken wir uns den Draht in eine Anzahl n in Reihe geschalteter Teilwiderstände unterteilt, und zwar nehmen wir zunächst $n = 2$, betrachten also wieder den durch Fig. 14 veranschaulichten Fall. Wir bezeichnen die Spannung längs des unteren Zweiges der Charakteristik e (bis zum Strommaximum) mit e_α, längs des mittleren rückfallenden Zweiges mit e_β und oberhalb des Strominimums mit e_γ; und zwar sollen e_α, e_β und e_γ die auf den ganzen Draht bezogenen Spannungen bedeuten; die Spannungen der Teilwiderstände sind also halb so groß. Dann entspricht der wirklich eintretende Zustand einem der

stabilen Schnittpunkte S_1 oder S_3; es nimmt also der eine Widerstand die Spannung $e_\alpha/2$, der andere $e_\gamma/2$, die Gesamtspannung also den Wert $(e_\alpha + e_\gamma)/2$ an. Allgemein erhält man die möglichen Gesamtspannungen, indem man alle möglichen Kombinationen zu zweien aus den drei Elementen $e_\alpha/2$, $e_\beta/2$, $e_\gamma/2$ bildet, also

$$e_\alpha, \quad \frac{e_\alpha + e_\beta}{2}, \quad \frac{e_\alpha + e_\gamma}{2}, \quad \frac{e_\beta + e_\gamma}{2}, \quad e_\gamma;$$

nur die Kombination

$$\frac{e_\beta}{2} + \frac{e_\beta}{2} = e_\beta$$

muß, da instabil, weggelassen werden. Trägt man diese 5 Spannungswerte als Funktion der Stromstärke auf, so erhält man eine zusammenhängende Kurve, die in Fig. 15 gezeichnet ist; dieses ist also die Gesamtcharakteristik des aus den beiden Teilen zusammengesetzten Widerstandes. Sie besteht aus 5 Zweigen, von denen der unterste und der oberste mit den Zweigen e_α und e_γ der für den gleichmäßig temperierten Draht geltenden, im folgenden kurz als „*Isotherme Charakteristik*" bezeichneten Kurve zusammenfallen; an Stelle des mittleren rückfallenden Zweiges e_β der isothermen Charakteristik (in Fig. 15 gestrichelt) sind drei neue Zweige getreten, welche sämtlich zwischen dem Strommaximum und dem Stromminimum der isothermen Charakteristik verlaufen. Man überzeugt sich leicht, daß, wenn man die Spannung E_0 von Null an ansteigend alle Werte durchläufen läßt, indem man in Fig. 14 die Kurve E_0—e, von der Stellung $E_0 = 0$ ausgehend, parallel mit sich selbst nach oben verschiebt, die Schnittpunkte S_1 bzw. S_3 in der Tat die der Charakteristik Fig. 15 entsprechenden Stromwerte durchlaufen.

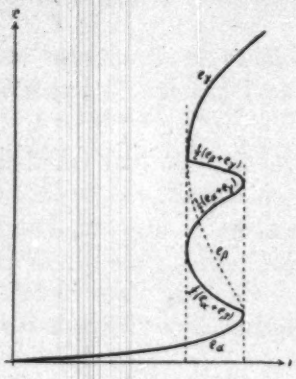


Fig. 15.

In gleicher Weise läßt sich die Gesamtcharakteristik ermitteln, wenn wir uns den Widerstand in n gleiche Teile von der Größe R/n unterteilt denken. Dann erhält man nämlich die möglichen Gesamtspannungen, indem man alle

möglichen Kombinationen zu n aus den drei Elementen e_α/n, e_β/n, e_γ/n bildet; dabei dürfen die Elemente e_α/n und e_γ/n in einer Kombination mehrmals vorkommen, e_β/n jedoch nicht, weil das ja Labilität bedeuten würde. Somit sind folgende Gesamtspannungen möglich:

a) $(n+1)$ Kombinationen ohne e_β:

$$\frac{n e_\alpha}{n},\quad \frac{(n-1)e_\alpha + e_\gamma}{n},\quad \frac{(n-2)e_\alpha + 2e_\gamma}{n},\quad \ldots\quad \frac{2e_\alpha + (n-2)e_\gamma}{n},$$
$$\frac{e_\alpha + (n-1)e_\gamma}{n},\quad \frac{n e_\gamma}{n};$$

b) n-Kombinationen mit e_β:

$$\frac{(n-1)e_\alpha + e_\beta}{n},\quad \frac{(n-2)e_\alpha + e_\beta + e_\gamma}{n},\quad \frac{(n-3)e_\alpha + e_\beta + 2e_\gamma}{n},\quad \ldots$$
$$\frac{e_\alpha + e_\beta + (n-2)e_\gamma}{n},\quad \frac{e_\beta + (n-1)e_\gamma}{n}.$$

Die Gesamtcharakteristik besteht demnach aus $(2n+1)$ Ästen, welche sämtlich zwischen dem Strommaximum und -Minimum der isothermen Charakteristik verlaufen, und sich leicht zeichnen lassen. Man erhält nämlich die erste Gruppe (Kombinationen ohne e_β), indem man bei der isothermen Charakteristik die durch e_α und e_γ begrenzten Ordinatenstücke in n Teile teilt und die Teilpunkte gleicher Ordnung durch $(n+1)$ Kurven verbindet (dabei sind die e_α- und e_γ-Kurve mitgerechnet). Die Glieder der zweiten Gruppe (Kombinationen mit e_β) unterscheiden sich von denen der ersten Gruppe um den Betrag $(e_\beta - e_\alpha)/n$; die ihnen entsprechenden Kurvenzweige teilen also den $(e_\gamma - e_\alpha)/n$ betragenden Abstand zwischen zwei benachbarten Kurven der ersten Gruppe im Verhältnis $(e_\beta - e_\alpha):(e_\gamma - e_\beta)$, d. h. im gleichen Verhältnis, in welchem bei der isothermen Charakteristik die Ordinatenabschnitte zwischen der e_α- und der e_γ-Kurve durch die e_β-Kurve geteilt werden. Die $(2n+1)$ Äste der Gesamtcharakteristik bilden somit eine zusammenhängende Zickzacklinie, die sich selbst nirgendwo schneidet. Sie ist in Fig. 16 für den Fall $n = 10$ gezeichnet. Die erste Gruppe der Äste ist mit den Ziffern 0—10 bezeichnet; diese Ziffer gibt die Anzahl der Teilwiderstände an, welche die Spannung e_α und die dieser entsprechende Temperatur T_α haben; der Rest der Widerstände hat die Temperatur T_γ. Auf den unmittelbar darunter liegenden Kurvenästen der zweiten Gruppe ist die Zahl der

Teilwiderstände von der Temperatur T_γ um Eins geringer, dafür hat ein Widerstand die Temperatur T_β.

Eine Charakteristik von der verwickelten Form Fig. 16 experimentell aufzunehmen, ist nur unter Anwendung besonderer Maßregeln möglich, auf die hier nicht eingegangen werden soll. Wir wollen aber ermitteln, wie die Charakteristik aussieht, wenn man sie in der üblichen Weise aufnimmt, indem man etwa den zusammengesetzten Widerstand an eine Stromquelle von der Spannung E_0 unter Vorschaltung eines Widerstandes R_v anschließt und nun den Vorschaltwiderstand R_v allmählich verringert. Was dann eintritt, erkennt man, indem man im Diagramm Fig. 16 die Gerade $e = E_0 - i \cdot R_v$ („Widerstandslinie") mit der Charakteristik $e(i)$ zum Schnitt bringt, und das Wandern des Schnittpunkts verfolgt, wenn man den Vorschaltwiderstand verringert, d. h. die Widerstandslinie um ihren Schnittpunkt mit der Ordinatenachse (Punkt D) entgegen dem Uhrzeigersinne dreht. Man erkennt dann folgendes: Zunächst wandert der Schnittpunkt auf dem untersten Ast der Charakteristik $e(i)$ nach rechts, bis die Widerstandslinie soweit gedreht ist, daß sie die Charakteristik im Punkte P_{10}, nahe dem ersten Maximum von i und e, berührt. Bei weiterer Drehung springt der Schnittpunkt auf den nächsten Zweig (9) der Charakteristik über, wandert auf diesem nach rechts bis zum Punkte P_9, springt dann auf Zweig (8) usw., bis der Zweig e_γ erreicht ist. Von der Charakteristik gelangen also nur die stark ausgezogenen Stücke zur Aufnahme. Läßt man jetzt R_v wieder zunehmen, dreht also die Widerstandslinie zurück, so ergibt sich ein anderer Verlauf: Der Schnittpunkt wandert längs des Zweiges e_γ zurück bis etwas über das oberste Strommminimum hinaus, springt dann auf den nächst tieferen Zweig (1) der Charakteristik e, wandert auf diesem nach unten bis zum nächsten Minimum von i und e, springt wieder auf den Ast (2) usw., bis der Ast (10) erreicht ist, längs dessen dann Spannung und Strom stetig bis zu Null abnehmen.

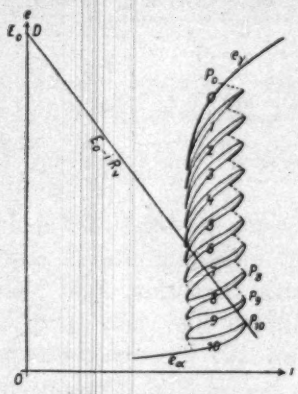


Fig. 16.

Physikalisch spielt sich dabei folgendes ab: Nimmt die Spannung vom Werte Null an allmählich zu, so haben die Teilwiderstände zunächst alle die gleiche Temperatur T_α, welche stetig mit der Spannung ansteigt, bis der Punkt P_{10} erreicht ist; dann nimmt — entsprechend dem Sprung des Schnittpunkts S im Diagramm auf den Zweig 9 — einer der Teilwiderstände sprungweise die höhere Temperatur T_γ an, wobei der Strom fällt und die Temperatur T_α dementsprechend sinkt; bei weiterem Wachsen der Spannung steigen die Temperaturen wieder stetig bis zum Punkte P_9, in welchem ein weiterer Widerstand die Temperatur T_γ annimmt usw., bis im Punkte P_0 sämtliche Teilwiderstände die hohe Temperatur T_γ erreicht haben, welche von da ab bei allen Widerständen gleichmäßig steigt. Auf dem Rückwege (bei abnehmender Spannung) findet der analoge Vorgang in umgekehrter Reihenfolge statt, jedoch bei tieferen Temperaturen, nämlich in der Nähe derjenigen Temperaturen T_{α_1} und T_{γ_1}, welche dem Minimalwert i_k des Stromes entsprechen, während beim Ansteigen der Spannung die Temperaturen in der Nähe der dem Maximalwert i_m von i entsprechenden Temperaturen T_{α_1} und T_{γ_1} lagen.

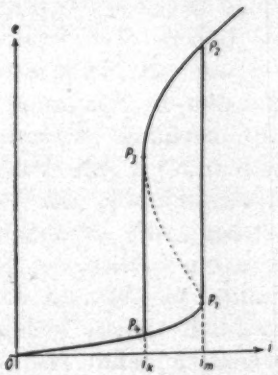


Fig. 17.

Gehen wir nun, um das Verhalten des wirklichen, aus unendlich vielen Teilwiderständen zusammengesetzt zu denkenden Widerstands mit rückfallender Charakteristik zu finden, für $n = \infty$ zur Grenze über, so rücken die einzelnen Stücke der unterbrochenen Zickzacklinien Fig. 16 unendlich dicht aneinander und werden unendlich klein: die beiden Zickzacklinien gehen in die senkrechten Geraden $i = i_m$ und $i = i_k$ über; die Charakteristik nimmt also den in Fig. 17 gezeichneten Verlauf, welcher sich aus der isothermen Charakteristik (in Fig. 17 gestrichelt) in leicht ersichtlicher Weise ergibt.

Die Theorie ergibt also in der Tat einen der Fig. 1 ähnlichen, durch Konstanz des Stromes über einen weiten Spannungsbereich gekennzeichneten Verlauf der Charakteristik; jedoch

zeigt die theoretische Kurve die Eigentümlichkeit, daß der konstante Stromwert für zunehmende Spannung größer ist als für abnehmende: der Widerstand zeigt Hysteresis.

Der physikalische Vorgang beim Durchlaufen der senkrechten Strecken der Charakteristik ist ein ganz ähnlicher, wie der oben für den Fall endlicher Unterteilung beschriebene, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt, entsprechend der verschwindenden Größe der Teilwiderstände, die Änderung der Gesamtlänge des heißen Teils des Drahtes nicht mehr in endlichen Sprüngen, sondern stetig erfolgt, und daß, wegen der Konstanz des Stromes, die Temperaturen des heißen und kalten Teils konstant bleiben. Bei steigender Spannung nimmt also im Punkte P_1 (Strommaximum der isothermen Charakteristik) ein kleines Stück des bis dahin gleichmäßig temperierten Drahtes plötzlich die dem Punkte $P_2\,[e = e_\gamma(i_m)]$ entsprechende Temperatur T_{γ_1} an, während der übrige Teil des Drahtes die dem Punkte P_1 entsprechende Temperatur T_{a_1} behält; in dem Maße, wie die Spannung steigt, wächst die Länge des heißen Drahtstückes, während seine Temperatur ebenso wie die des kalten Stückes konstant bleibt, bis schließlich der ganze Draht die höhere Temperatur T_{γ_1} angenommen hat (Punkt P_2); von nun an bleibt der Draht gleichmäßig temperiert. Läßt man nun die Spannung wieder abnehmen, so bleibt die Temperatur zunächst gleichmäßig über den Draht verteilt, und zwar nicht nur bis zum Punkt P_2, sondern darüber hinaus bis zum Stromminimum der isothermen Charakteristik (Punkt P_3), welchem die Drahttemperatur $T_{\gamma_2} < T_{\gamma_1}$ entspricht. Bei weiterem Sinken der Spannung nimmt ein kleines Stück des Drahtes plötzlich die dem Punkte $P_4\,[e = e_a(i_k)]$ entsprechende erheblich tiefere Temperatur $T_{a_2} < T_{a_1}$ an; mit abnehmender Spannung dehnt sich das kalte Stück, während die Temperaturen konstant gleich T_{γ_2} bzw. T_{a_2} bleiben, aus, bis der Punkt P_4 erreicht ist, in welchem der ganze Draht die Temperatur T_{a_2} besitzt. Von da ab bis zur Spannung Null bleibt der Draht gleichmäßig temperiert.

Die Temperaturverteilung längs des Drahtes auf den senkrechten Strecken entspricht demnach etwa der Fig. 18. Die Länge des heißen Stückes muß, wie man leicht sieht, linear mit der Spannung wachsen.

§ 11. Die Betrachtung des § 10 gilt streng genommen nur für einen aus einer sehr großen Zahl diskreter Stücke zusammengesetzten Leiter. Fügt man diese Stücke zu einem kontinuierlichen Drahte zusammen, so tritt ein wesentlicher neuer Einfluß hinzu, den wir bisher außer Acht gelassen haben, nämlich die Wärmeleitung innerhalb des Drahtes. Diese verhindert das Auftreten von Unstetigkeiten des Temperaturverlaufs längs des Drahtes; eine Temperaturverteilung, wie in Fig. 18 gezeichnet, ist daher in Wirklichkeit ausgeschlossen, weil das unendlich große Temperaturgefälle an der Grenze zwischen kaltem und heißem Teil durch die Wärmeleitung sofort in ein endliches verwandelt würde. Der im vorigen Paragraphen ausgeführte Grenzübergang ist daher physikalisch nicht zulässig. Um das wirkliche Verhalten unseres Drahtes zu finden, müssen wir deshalb jetzt den Einfluß der Wärmeleitung untersuchen.[1])

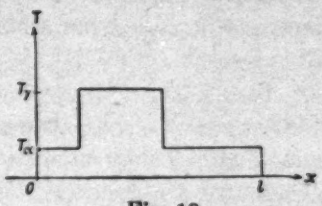


Fig. 18.

Wir gehen dazu aus von der bereits oben aufgestellten Differentialgleichung der Temperaturverteilung

$$\lambda q \frac{d^2 T}{dx^2} = A(T) - i^2 R(T), \tag{6}$$

wobei wir von jetzt ab unter $A(T)$ und $R(T)$ nicht mehr die auf die ganze Drahtlänge, sondern die auf die Längeneinheit bezogenen Größen verstehen wollen. Wir schreiben Gleichung (6) in der Form:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{R(T)}{\lambda q}\left(\frac{A(T)}{R(T)} - i^2\right) = f(T). \tag{6a}$$

Einmalige Integration ergibt

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = 2\int f(T)\,dT + \text{const.}$$

x wollen wir von der Drahtmitte aus rechnen; dort muß aus Symmetriegründen die Temperatur ein Maximum T_m haben, also $dT/dx = 0$ sein. Damit ist die Integrationskonstante bestimmt und wir erhalten:

1) Die im Temperaturgefälle infolge des Thomsoneffektes entwickelte Wärme lassen wir außer Betracht, da sie, wie eine Überschlagrechnung zeigt, gegenüber der Jouleschen Wärme stets klein ist.

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = 2\int_{T_m}^{T} f(T)\,dT = -2\int_{T}^{T_m} f(T)\,dT, \tag{22}$$

wobei die als Integrationskonstante auftretende Maximaltemperatur T_m so zu wählen ist, daß für

$$x = \pm\frac{l}{2}, \qquad T = T_0$$

wird. Die formale Integration der Gleichung (22), die, wie man sieht, leicht möglich ist, führen wir nicht aus, sondern gehen auf graphischem Wege weiter. Die Funktion $f(T)$ enthält nach Gleichung (6a) den Ausdruck $A(T)/R(T)$; dieser ist aber nach Gleichung (1) nichts anderes, als das Quadrat derjenigen Stromstärke, welche in einem unendlich langen Drahte fließen müßte, um ihn auf die gleichmäßige Temperatur T zu erwärmen; d. h. $A(T)/R(T)$ ist identisch mit der Funktion $i^2(T)$, die inverse Funktion also identisch mit $T(i^2)$, welche aus dem Diagramm Fig. 10 entnommen werden kann. Sie verläuft in großen Zügen ebenso wie die Funktion $R(i^2)$, und deren Verlauf ist in dem Gebiete rückfallender Charakteristik, in welchem der Strom i sich nicht viel ändert, ähnlich wie derjenige von $R(i)$ und der isothermen Charakteristik $e(i)$. Trägt man also, wie in Fig. 19, rechte Seite, ge-

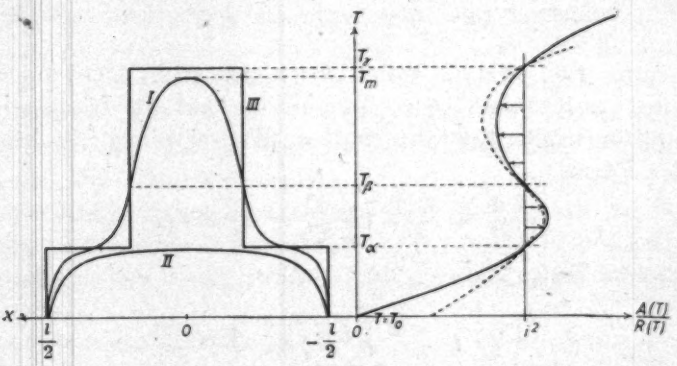


Fig. 19.

schehen, die Größe $A(T)/R(T)$ als Abszisse, T als Ordinate auf, so erhält man eine der Charakteristik $e(i)$ ähnliche rückfallende Kurve (ausgezogene Kurve). Wir ziehen ferner die dem — jetzt natürlich als konstant zu betrachtenden — Strome i entsprechende Parallele zur Ordinatenachse $A(T)/R(T) = i^2$. Die zu einer bestimmten Temperatur gehörige Größe

$A(T)/R(T) - i^2$ ist dann gleich der von dieser Geraden an gerechneten Abszisse der Kurve $T(A/R)$ (in Fig. 19 durch die Pfeile bezeichnet). Um $f(T)$ zu erhalten, ist diese Strecke noch mit dem Faktor $R(T)/\lambda q$ zu multiplizieren, d. h. mit einer Größe, welche mit zunehmender Ordinate T zunimmt. So ergibt sich die gestrichelte Kurve Fig. 19, bei welcher der Abszissenmaßstab willkürlich so gewählt ist, daß sie bei der Temperatur T_β mit der ausgezogenen Kurve zusammenfällt. Die Multiplikation hat zur Folge, daß das der höheren Temperatur entsprechende negative Maximum von $f(T)$ relativ vergrößert, das positive Maximum bei der tieferen Temperatur relativ verkleinert wird; der charakteristische Verlauf der Kurve wird jedoch nicht geändert.

Für verschiedene Stromstärken, d. h. für verschiedene Lagen der Senkrechten $A/R = i^2$ hat die gestrichelte Kurve einen verschiedenen Verlauf: sie muß also, wenn man die Aufgabe streng lösen will, für jedes i neu gezeichnet werden. Für die folgende qualitative Diskussion genügt es jedoch, statt der gestrichelten die ausgezogene $T(A/R)$-Kurve zu nehmen, und die Multiplikation mit $R(T)/\lambda q$ nur durch Wahl eines passenden Maßstabes auszuführen, d. h. diesen Faktor als konstant zu behandeln.

Im allgemeinen schneidet die Gerade $A/R = i^2$ die Charakteristik $T(A/R)$ in drei Punkten, deren Ordinaten wir, entsprechend unseren früheren Bezeichnungen, T_α, T_β, T_γ nennen wollen. Dann folgt zunächst bereits aus der Differentialgleichung (6a):

1. Da beim Maximum von T $d^2T/dx^2 < 0$, also auch $f(T)$ negativ sein muß, kann die Maximaltemperatur T_m nur zwischen T_β und T_γ oder unterhalb T_α, nicht aber zwischen T_α und T_β liegen; insbesondere muß T_m stets kleiner als T_γ sein.

2. Je näher T_m an T_γ bzw. an T_α liegt, um so flacher ist das Maximum von T, um so weiter sind demnach die Punkte voneinander entfernt, in denen die $T(x)$-Kurve die Abszissenachse schneidet, um so größer ist also die Drahtlänge l. Bei genügender Drahtlänge muß also T_m sehr nahe an T_γ oder T_α liegen.

3. Es sind zwei verschiedene Temperaturverteilungen möglich: eine, bei der das Temperaturmaximum T_m nahe an T_γ, und eine andere, bei der es nahe an T_α liegt.

4. Da bei den Temperaturen T_a und T_β $f(T)$ und damit d^2T/dx^2 Null ist, so muß die $T(x)$-Kurve bei diesen Temperaturen Wendepunkte haben; sie muß in dem Temperaturbereich zwischen T_a und T_β ($d^2T/dx^2 > 0$) gegen die x-Achse konvex, im übrigen konkav sein.

Hiernach kann bereits in großen Zügen die Temperaturverteilung angegeben werden. Sie ist in der linken Seite von Fig. 19 durch die Kurven I und II dargestellt; der abgesetzte Linienzug III zeigt die Temperaturverteilung, welche sich ohne Berücksichtigung der Wärmeleitung ergeben würde.

Zur genaueren Feststellung der Temperaturverteilung ziehen wir Gleichung (22) heran; sie sagt aus, daß das Quadrat des Temperaturgefälles proportional ist dem Flächeninhalt der Fläche, welche eingeschlossen wird von der Ordinate $A/R = i^2$, der Kurve $T(A/R)$ und den den Temperaturen T_m und T entsprechenden Abszissen.

Wir betrachten nun einen ausgezeichneten Sonderfall: Der Strom habe gerade einen solchen Betrag i^*, daß in Fig. 19 die beiden von der Kurve $T(A/R)$ und der Ordinate $A/R = i^2$ begrenzten, zwischen T_γ und T_β einerseits und T_β und T_a andererseits liegenden Flächenstücke inhaltsgleich, oder, mathematisch gesprochen, daß

$$\int_{T_a}^{T_\gamma} f(T)\, dT = 0 \tag{23}$$

ist; genau genommen soll der Strom ein ganz klein wenig größer sein, als der durch diese Bedingung definierte „Normalstrom" i^*. Wir wählen T_m sehr nahe an T_γ; dann wird das Temperaturmaximum in der Mitte des Drahtes sehr flach, die Temperatur also auf einer längeren Strecke des Drahtes praktisch konstant. Andererseits wird in den Wendepunkten bei der Temperatur T_a wegen Gl. (22) und (23) $(dT/dx)^2$ sehr nahe gleich Null, also an dieser Stelle die Temperatur ebenfalls auf einer längeren Drahtstrecke praktisch konstant sein. Wir erhalten so eine Temperaturverteilung, wie sie durch Fig. 20 dargestellt ist: In der Mitte des Drahtes ein Gebiet hoher, nahezu konstanter Temperatur, deren Betrag nahe gleich T_γ ist, und an den beiden Enden je ein Gebiet tieferer, ebenfalls nahezu konstanter Temperatur, wo T nahe gleich T_a ist; dazwischen je ein Übergangsgebiet, in welchem die Temperatur ziemlich

steil von dem höheren auf den tieferen Wert abnimmt; außerdem noch je ein Übergangsgebiet an den Enden, in welchem die Temperatur von dem Wert T_α auf die noch tiefere Endtemperatur T_0 abnimmt. In der Nähe der Temperaturen T_γ und T_α

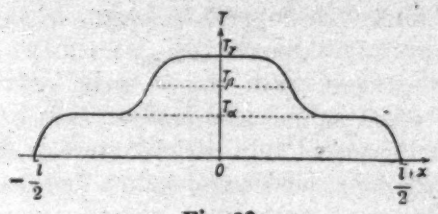


Fig. 20.

können wir auch das Gesetz des Temperaturverlaufs angeben: dort läßt sich die $f(T)$-Kurve durch ein geradliniges Stück ersetzen, d. h. $f(T)$ ist annähernd proportional zu $(T - T_\gamma)$ bzw. $(T - T_\alpha)$; der Proportionalitätsfaktor ist gleich dem Anstieg der $f(T)$-Kurve, d. h. gleich dem reziproken Werte des Anstieges der $T(A/R)$-Kurve in Fig. 19. Dann wird die Differentialgleichung (6a) linear und führt auf ein Exponentialgesetz, dessen Konstante gleich der Wurzel aus diesem Proportionalitätsfaktor ist. In der Nähe der Temperaturen T_α und T_γ nähert sich also die $T(x)$-Kurve (Fig. 20) den horizontalen Geraden $T = T_\alpha$ bzw. $T = T_\gamma$ nach einem Exponentialgesetz $e^{-\beta x}$, dessen Konstante β gleich der Quadratwurzel aus dem reziproken Anstiege der $T(A/R)$-Kurve bei den betreffenden Temperaturen ist. Die Länge der Übergangsgebiete (gerechnet etwa zwischen der Stelle steilsten Anstieges der $T(x)$-Kurve und dem Punkte, in welchem T bis auf einen gewissen kleinen Betrag den Wert T_α bzw. T_γ erreicht hat) wird der Größenordnung nach gemessen durch den reziproken Wert der Konstanten β, ist also direkt proportional der Wurzel aus dem Anstiege der $T(A/R)$-Kurve und damit auch dem Anstiege der isothermen Charakteristik $e(i)$. Da der Anstieg der $T(A/R)$-Kurve (Fig. 19) bei den Temperaturen T_α und T_γ nicht wesentlich verschieden und, wenn der rückfallende Teil der Charakteristik nicht sehr steil ist, von gleicher Größenordnung wie der Anstieg einer normalen ansteigenden Charakteristik ist, so folgt, daß die Längen der Übergangsstrecken $\overline{T_0 T_\alpha}$, $\overline{T_\alpha T_\beta}$ und $\overline{T_\beta T_\gamma}$ nicht sehr voneinander verschieden und bei nicht zu steil rückfallender Charakteristik von gleicher Größen-

ordnung sind, wie die Länge der Übergangsstrecken an den Enden eines Drahtes mit normaler, ansteigender Charakteristik; die sich aus den beiden Strecken $\overline{T_\alpha T_\beta}$ und $\overline{T_\beta T_\gamma}$ zusammensetzende Übergangsstrecke von dem T_α-Gebiet zum T_γ-Gebiet ist also etwa doppelt so lang. Je steiler der rückfallende Teil der Charakteristik $e(i)$ ist, um so größer ist die Länge der Übergangsstrecken, um so mehr verwischt sich also die Grenze zwischen kaltem und heißem Teil; bei senkrechtem Anstieg der isothermen Charakteristik werden die Übergangsgebiete unendlich lang, heißer und kalter Teil des Drahtes sind überhaupt nicht mehr geschieden.

Die Temperaturverteilung Fig. 20 gilt streng genommen nur für einen unendlich langen Draht; sie gilt aber mit genügender Annäherung auch dann noch, wenn die Drahtlänge groß gegen die Länge der Übergangsgebiete ist. In diesem Falle bleibt die Differentialgleichung, da die Drahtkoordinate x in ihr nicht vorkommt, auch bei einer Parallelverschiebung der Übergangskurven in Richtung der x-Achse erfüllt; die Länge des heißen Teiles ist also unbestimmt, bei dem Normalstrom i^* — aber auch nur bei diesem — kann also die mittlere Drahttemperatur jeden beliebigen Wert zwischen T_α und T_γ, die Spannung jeden Wert zwischen e_α und e_γ haben. Daraus ergibt sich sofort die Charakteristik des Drahtes (Fig. 21): Unterhalb des Stromes i^* fällt sie mit dem unteren Aste der isothermen Charakteristik zusammen, steigt beim Normalstrom i^* senkrecht bis zum oberen Aste derselben und fällt von da ab mit diesem zusammen. Außerdem gehört zu ihr noch der untere Ast der isothermen Charakteristik zwischen dem Stromwert i^* und dem Strommaximum i_m, weil, wie wir oben sahen, eine Temperaturverteilung, bei welcher der ganze Draht, abgesehen von den Enden, die Temperatur T_α hat, stets möglich ist.[1]) So ergibt sich als

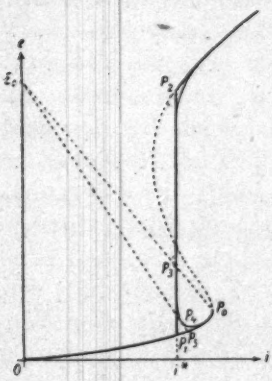


Fig. 21.

1) Dagegen gehört der obere Ast der isothermen Charakteristik für Ströme $< i^*$ nicht zu ihr, weil bei diesen Stromwerten, wie Fig. 19 zeigt, $d\,T/d\,x$ oberhalb T_β imaginär werden würde.

Charakteristik die starkausgezogene Kurve in Fig. 21, in welcher außerdem noch die isotherme Charakteristik gestrichelt eingezeichnet ist.

Die wirkliche Charakteristik ergibt sich also aus der isothermen Kurve in ähnlicher Weise wie in der Thermodynamik die p, v-Kurve aus der „rückfallenden" theoretischen Van der Waalsschen Kurve dadurch, daß man den rückfallenden Zweig durch eine zur Ordinatenachse parallele Gerade ersetzt, deren Abszisse so gewählt ist, daß sie aus der rückfallenden Kurve Stücke annähernd gleichen Flächeninhaltes ausschneidet.

Wir wollen nun noch den Einfluß der endlichen Drahtlänge untersuchen. Er kann sich nur bemerkbar machen, wenn die Länge entweder des heißen oder des kalten Drahtteiles der Länge der Übergangsgebiete vergleichbar wird. Im ersteren Falle wird die Maximaltemperatur T_m merklich kleiner als T_γ; damit dann $(d\,T/d\,x)^2$ für $T = T_a$ nach Gleichung (22) positiv bleibt, muß in Fig. 19 die i^2-Ordinate nach rechts verschoben, der Strom also größer als i^* werden. Ist umgekehrt die Länge des kalten Drahtteiles klein, so muß $d\,T/d\,x$ für $T = T_a$ eine merkliche Größe haben, die linke Seite von Gleichung (23) also größer als Null sein; auch dafür ist nach Fig. 19 eine Rechtsverschiebung der i^2-Ordinate, also ein Strom größer als i^* erforderlich. Die Ecken der Charakteristik in den Punkten P_1 und P_2 (Fig. 21) werden also abgerundet, wie in Fig. 21 durch die dünnausgezogenen Kurven angedeutet. Bezeichnet man in diesem Gebiete die Abweichung der Spannung von dem zum gleichen Strom gehörigen Werte e_a bzw. e_γ mit δe, so erkennt man leicht, daß die Funktion $\delta e\,(i)$ unabhängig von der Drahtlänge ist; da der Absolutwert der Gesamtspannung proportional der Drahtlänge ist, so wird die relative Abweichung $\delta e/e$ der Drahtlänge umgekehrt proportional. Je größer also die Drahtlänge ist, um so genauer schließt sich die Charakteristik den Ecken der in Fig. 21 stark ausgezogenen Charakteristik des unendlich langen Drahtes an.

Bei der experimentellen Aufnahme wird die Charakteristik in folgender Weise durchlaufen: mit zunehmender Spannung steigt der Strom zunächst längs des unteren Astes an bis zum Strommaximum P_0, springt dann längs der in Fig. 21 punktiert gezeichneten „Widerstandslinie" P_0P_3 auf den Normalwert i^* und ändert sich von nun an der Charakteristik entsprechend;

bei abnehmender Spannung folgt der Strom der Charakteristik noch über den Punkt P_3 hinaus, bis die Widerstandslinie im Punkte P_4 die Charakteristik berührt; dann springt der Strom längs der Widerstandslinie auf den etwas höheren Wert P_5 und verläuft von nun ab wieder längs des unteren Astes der Charakteristik.

Damit ist das Ziel dieses Abschnitts, die Feststellung des zu erwartenden Verlaufs der Stromspannungskurve, erreicht. Im folgenden Abschnitt werden wir das Ergebnis der Theorie an Hand von Versuchen prüfen.

III. Versuche.

§ 12. Bei den Versuchen wurde die gleiche Anordnung verwendet, wie sie im ersten Teil zur Aufnahme der $A(T)$-Kurven benutzt wurde (Apparat Fig. 2). Zunächst wurden die Stromspannungskurven von Eisendrähten von 0,0513 mm Durchmesser aufgenommen. Die Ergebnisse bei verschiedenen Drucken sind durch die Kurven Fig. 22 dargestellt. Man erkennt, daß die Kurven in weitgehendem Maße mit dem von der Theorie vorausgesagtem Verlauf übereinstimmen, wie er oben durch Fig. 21 gekennzeichnet wurde; insbesondere erkennt man die Konstanz des Stromes über einen weiten Spannungsbereich, sowie auf dem ansteigenden Aste der Charakteristik das scharfe Strommaximum, von dem aus der Strom sprungweise auf den konstanten Normalwert übergeht. Auch das Wiederansteigen des Stromes auf dem absteigenden Ast der Charakteristik kurz vor Wiedererreichen des ansteigenden Astes ist deutlich ausgeprägt. Auch die zahlenmäßige Übereinstimmung ist befriedigend; um sie zu prüfen, ist in Fig. 22

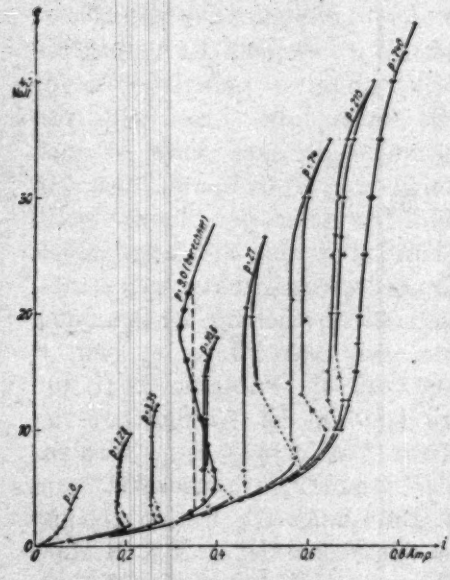


Fig. 22.

außer den gemessenen Kurven noch die theoretische isotherme Charakteristik für $p = 9$ mm aus Fig. 10 und die aus ihr nach der Theorie sich ergebende wirkliche Charakteristik eingezeichnet. In der Tat stimmt der berechnete Normalstrom mit dem beobachteten, wenn man die etwas verschiedenen Gasdrucke berücksichtigt, sehr genau überein. Daß die Charakteristiken in der Ordinatenrichtung nicht unbeträchtlich voneinander abweichen, namentlich bei höheren Spannungen, ist nicht weiter befremdend, wenn man berücksichtigt, daß einerseits der Temperatursprung und damit der Verlauf der $A(T)$-Kurven von der Oberflächenbeschaffenheit des Drahtes abhängt und daher beim Eisen ein etwas anderer sein kann, als beim Platin, und daß andererseits bei dem hier untersuchten Eisen die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes infolge anderen Reinheitsgrades sehr wohl eine etwas andere sein kann, als bei dem von Somerville verwendeten Material, dessen Werte wir zur Berechnung benutzt haben.

Besonders günstig für die Beobachtung ist der Umstand, daß, wie ein Blick auf Fig. 11 lehrt, beim Eisen der rückfallende Teil der isothermen Charakteristik gerade in dem Temperaturgebiet beginnender Glut liegt, so daß auf dem senkrechten Teil der Charakteristik der heiße Teil des Drahtes glüht, der kalte nicht, und so die Temperaturverteilung direkt mit dem Auge zu beobachten ist. In der Tat beobachtet man bei der Aufnahme der Charakteristik, daß in dem Augenblicke, in welchem der Strom von seinem Maximalwert längs der Widerstandslinie auf den Normalwert übergeht, plötzlich ein kurzes Stück des Drahtes hell aufglüht und sich dann — ohne daß der Vorschaltwiderstand geändert wird — unter Abnahme der Helligkeit ausdehnt, genau wie es nach der Theorie zu erwarten ist; steigert man jetzt die Spannung, so dehnt das glühende Stück sich weiter aus, ohne daß seine Helligkeit sich ändert, ein Zeichen, daß seine Temperatur, wie es die Theorie verlangt, konstant bleibt.[1]) Bei demjenigen

1) Dies gilt nur, wenn man die Beobachtungen immer erst nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes anstellt. In Wirklichkeit spielt sich der Vorgang folgendermaßen ab: In dem Augenblicke, in dem man den Vorschaltwiderstand verkleinert, wird der Strom größer und ebenso die Helligkeit des glühenden Stückes; dann erst beginnt das helle Stück des Drahtes sich langsam auszudehnen, während gleich-

Punkte der Charakteristik, bei welchem der Strom wieder anzusteigen beginnt, hat sich die Glut über den ganzen Draht ausgedehnt. Besonders sinnfällig ist, namentlich bei dem günstigsten Druck ($p = 10$ mm), die scharfe Grenze zwischen kaltem und heißem Teil und die Gleichmäßigkeit der Helligkeit des letzteren; fast unmittelbar an der Grenze gegen den kalten Teil ist die Helligkeit bereits genau so groß wie in der Mitte, und die Lage der Grenze ließ sich bequem auf 0,5 mm genau messen. Auf diese Weise wurde mittels eines spiegelnden Maßstabes die Länge l_1 des heißen Teiles auf der senkrechten Strecke der Charakteristik bei verschiedenen Spannungen ge-

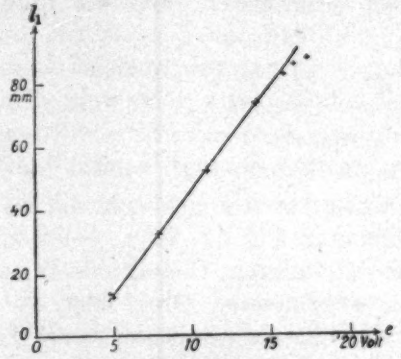


Fig. 23.

messen und in Fig. 23 als Funktion der Spannung aufgetragen; man erkennt die genaue lineare Abhängigkeit, wie sie nach der Theorie zu erwarten ist.

Bei den höchsten der verwendeten Spannungen erlitt der Draht infolge der hohen Temperatur, hauptsächlich wohl durch Zerstäubung, bereits merkliche dauernde Änderungen; bei der Aufnahme der Charakteristiken wurde deshalb der absteigende Ast immer vor dem ansteigenden aufgenommen. Trotz dieser Vorsichtsmaßregel zeigen einige der aufgenommenen Kurven in Fig. 22 auf dem ansteigenden Ast einen merklich höheren Normalstrom als auf dem absteigenden; auf die Ursache dieser Hysteresis werden wir später zurückkommen.

zeitig Strom und Helligkeit abnehmen und sich asymptotisch ihren Normalwerten nähern. Letzterer Vorgang spielt sich sehr langsam ab; es dauerte oft 10 Minuten und länger, bis wieder Konstanz erreicht war.

Fig. 24 zeigt die Charakteristik von zwei in Serie geschalteten Eisendrähten; hierzu wurde ein technischer Eisenwiderstand benutzt, wie sie als Vorschaltwiderstände für Nernstsche Glühlampen verwendet werden und welche zwei in Serie geschaltete Paare von Eisendrähten von etwa 0,07 mm Durchmesser enthalten. Ein solcher Widerstand wurde an die Pumpe angeschmolzen, mit Wasserstoff von 5,7 mm Druck gefüllt und die Außenwand des Glasgefäßes durch fließendes Wasser auf konstanter Temperatur erhalten. Bemerkenswert an der erhaltenen Charakteristik ist, daß zwei Maxima des Stromes auftreten; dies ist auch nach der Theorie zu erwarten, denn

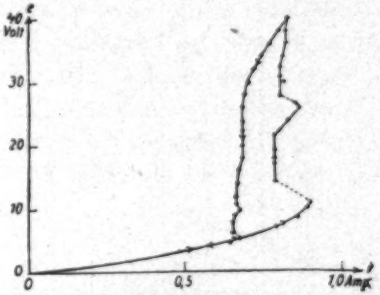


Fig. 24.

da bei Überschreitung des ersten Maximums nur der eine Teilwiderstand zu glühen beginnt, muß, nachdem sich die Glut über dessen ganze Länge ausgedehnt hat, der Strom erst wieder bis nahe auf seinen Maximalwert steigen, um das Erglühen des anderen Teilwiderstandes einzuleiten. In der Tat glühte bei dem Versuch unterhalb des oberen Strommaximums nur ein Drahtpaar, oberhalb desselben beide, während längs des absteigenden Astes der Charakteristik auf beiden Drahtpaaren je eine Strecke glühte. Bei der Charakteristik Fig. 24 ist die bereits oben beobachtete Hysteresis besonders stark.[1])

Ferner wurden Beobachtungen an Nickeldrähten angestellt. Die Ergebnisse zeigt Fig. 25, in welche auch die für

1) Die Eisenwiderstände, so wie sie von der Technik geliefert werden, haben eine Charakteristik ähnlich der in Fig. 22 für $p = 210$ mm wiedergegebenen; Druck und wohl auch Art des Füllgases sind offenbar so gewählt, daß das Strommaximum nicht zum Ausdruck kommt.

$p = 9$ mm theoretisch konstruierte isotherme Charakteristik eingetragen ist. Den Kurven fehlt das ausgeprägte Strommaximum; da bei der berechneten isothermen Charakteristik Maximal- und Minimalstrom kaum merklich voneinander verschieden sind, ist dies nicht anders zu erwarten. Die zahlenmäßige Übereinstimmung der berechneten mit der bei $p=10$ mm beobachteten Kurve ist bei Berücksichtigung der oben aufgeführten Umstände als befriedigend zu bezeichnen.

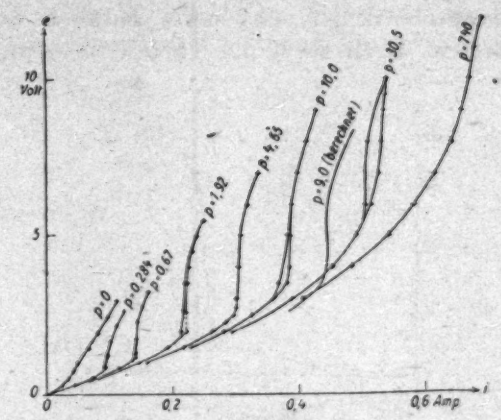


Fig. 25.

Ferner wurden Versuche mit Kupfer, Silber und Wolfram angestellt; auch hier zeigten sich manchmal ähnliche Erscheinungen. Bei Cu und Ag trat bei günstigem Gasdruck das charakteristische Erglühen auf einer kurzen, scharf abgegrenzten Strecke des Drahtes auf; die Temperatur stieg aber dabei so hoch, daß der Draht immer sehr bald durchbrannte, so daß die Aufnahme einer Charakteristik nicht möglich war. Auch bei Wolfram zeigte sich das Glühen auf begrenzter Strecke, und zwar so ausgesprochen, daß bisweilen der Draht auf einer Strecke kleiner als 1 mm in hellster Weißglut erstrahlte, während der übrige Teil des Drahtes nur schwach glühte; an dieser Stelle brannte der Draht dann sehr bald durch. Die Theorie, welche, wie aus dem Sichschneiden der α- und ϱ-Kurven in Fig. 11 folgt, bei diesen Metallen rückfallende Charakteristiken bei höheren Temperaturen erwarten läßt, wird also auch hier qualitativ bestätigt.

Es bleibt nun noch die bei den Charakteristiken des Eisendrahtes beobachtete Hysteresis zu erklären. Betrachtet man nach dem Versuch den Draht unter dem Mikroskop, so beobachtet man die bekannte Erscheinung, daß sich größere Kristallite gebildet haben, die dort, wo sie aneinander stoßen, häufig gegeneinander versetzt sind, so daß an diesen Stellen der Drahtquerschnitt vermindert erscheint und der Draht dort beim Glühen eine höhere Temperatur annehmen muß. Die Temperatur dieser die Gesamtspannung des Drahtes vorzugsweise bestimmenden Stellen ist infolge der dazwischen liegenden kühleren Stellen nicht mehr in so hohem Grade von der Temperatur der benachbarten heißen Stellen abhängig, wie bei einem Drahte von gleichmäßigem Querschnitt; die Anordnung nähert sich also in gewissem Grade dem Falle, daß der Draht aus einer endlichen Anzahl sehr kurzer Teilwiderstände zusammengesetzt ist, deren Temperatur unabhängig voneinander ist. Diesen Fall haben wir in § 10 behandelt; die Theorie läßt hier in der Tat das Auftreten einer Hysteresis erwarten.

Zusammenfassung.

1. Es wurde die Temperaturabhängigkeit der Wärmeabgabe dünner Drähte in Wasserstoff von verschiedenem Druck experimentell ermittelt; es ergaben sich zwei, in den Kurven durch einen deutlichen Knick voneinander getrennte Temperaturgebiete, innerhalb deren diese Abhängigkeit verschiedene Gesetze befolgte.

2. Mit Hilfe der gewonnenen Temperaturfunktion wurden die Stromspannungskurven von Widerstandsdrähten konstruiert und gezeigt, daß bei Widerständen mit hohem positivem Temperaturkoeffizienten sich „rückfallende" Charakteristiken ergeben, bei welchen streckenweise der Strom mit zunehmender Spannung abnimmt.

3. Eine Stabilitätsbetrachtung zeigte, daß bei einem Drahte mit rückfallender Charakteristik der Zustand gleichmäßiger Temperaturverteilung instabil ist; es wurde bewiesen, daß sich ein solcher Draht in zwei scharfbegrenzte Teile von verschiedener Temperatur teilen und dabei eine Strom-

spannungskurve auftreten muß, bei welcher der Strom über einen weiten Spannungsbereich praktisch konstant ist.

4. Die Theorie wurde durch Versuche an Eisen- und Nickeldrähten bestätigt und die dabei auftretenden Hysteresiserscheinungen aufgeklärt.

Die vorliegende Arbeit wurde begonnen in der Radioelektrischen Versuchsanstalt für Marine und Heer zu Göttingen und nach deren Auflösung im Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen weitergeführt. Dem Leiter beider Anstalten, Herrn Professor Dr. M. Reich, bin ich für die bereitwillige Überlassung von Mitteln zu großem Dank verpflichtet, den ich auch an dieser Stelle zum Ausdruck bringen möchte.

Göttingen, im August 1920.

(Eingegangen September 1920.)

2. *Über das Verhalten von Molekülen gegenüber freien langsamen Elektronen;* von *H. F. Mayer.*[1])

(Aus dem Heidelberger Radiologischen Institut.)

Die Untersuchungen über den Durchgang von freien Elektronen durch Materie sind bekanntlich von fundamentaler Bedeutung für die Erkenntnis der Konstitution der Materie gewesen, insofern als sie den Ursprung und eine der wesentlichsten Stützen unserer heutigen Vorstellung vom Aufbau der Atome aus positiven und negativen Elektrizitätsquanten bilden.[2]) Diese Untersuchungen beziehen sich größtenteils auf schnelle oder mittelschnelle Kathodenstrahlen. Auch über langsame Strahlen liegen mehrere Arbeiten vor. Immerhin blieb noch der Wunsch übrig, der Geschwindigkeit Null noch mehr sich zu nähern, als es bisher möglich gewesen war. Es sei gleich erwähnt, daß die aufgewandte Mühe insofern sich lohnte, als bei der Absorption ganz langsamer Kathodenstrahlen in Argon eine bisher noch unbekannte Erscheinung zutage trat.

Bezeichnungen.

N Anzahl Gasmoleküle in Grammolekül bei 0^0 und Atmosphärendruck; Loschmidtsche Zahl $= 6{,}09 \cdot 10^{23}$.
e Elementarquant der Elektrizität $= 4{,}76 \cdot 10^{-10}$ el. stat. C.G.S.
m Masse eines Elektrons $= 8{,}98 \cdot 10^{-28}$ g.
R Allgemeine Gaskonstante $= 8{,}315 \cdot 10^7$ C.G.S.
T Absolute Temperatur.
h Plancksches Wirkungsquant $= 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ Erg. sec.

I. *Die Geschwindigkeitsverteilung der von der Glühkathode emittierten Elektronen.* Zur Erzeugung langsamer Kathoden-

1) Gekürzte Heidelberger Dissertation vom 5. Jan. 1920, bzw. Heidelberger Akad. Preisschrift vom 21. Nov. 1919, mit neuen Hinzufügungen.

2) Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, S. 104ff. Winter, Heidelberg 1918.

strahlen kam neben der lichtelektrischen Methode vor allem die glühelektrische Methode in Betracht. Die auf glühelektrischem Wege erzeugten Elektronen besitzen bekanntlich keine einheitliche Austrittsgeschwindigkeit. Es entstand daher als erstes die Aufgabe, die Geschwindigkeitsverteilung der von der Glühkathode emittierten Elektronen zu untersuchen, was um so mehr von Interesse war, als direkte Messungen an engen Bündeln im homogenen Gegenfeld bis jetzt nicht vorliegen.

Theorie der Methode. Der zentrale, als klein vorausgesetzte Teil einer Metallplatte A (Fig. 1) besitze die Temperatur T und emittiere Elektronen über die vordere Halbkugel. Aus der Gesamtheit der emittierten Strahlen werden diejenigen, die die Platte innerhalb eines Kegels vom Öffnungswinkel φ verlassen, abgeblendet und treffen dann auf die Platte C, die die ankommende Menge zu messen gestattet. A und B besitzen dasselbe Potential, so daß die Elektronen auf dem Wege von A nach B keinerlei Kräften unterworfen sind. Zwischen B und C kann ein homogenes elektrisches Gegenfeld in Strahlrichtung erzeugt werden, mit dessen Hilfe die Geschwindigkeitsverteilung des Strahlenbündels untersucht werden soll.

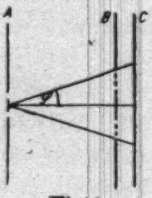


Fig. 1.

Über den Mechanismus der Elektronenbefreiung in heißen festen Körpern haben sich verschiedene Anschauungen entwickelt. So schreibt Hr. Lenard die Elektronenauslösung der sog. Nähewirkung der Atome an der Körperoberfläche infolge ihrer Wärmebewegung zu[1]), während Hr. Wilson[2]) den Vorgang als ein Abdampfen von freien Elektronen aus dem Metall auffaßt.

Die ursprüngliche Vorstellung, die von Hrn. Richardson[3]) stammt, schließt sich an die kinetische Theorie der Elektrizitätsleitung in Metallen an. Hiernach befinden sich innerhalb der Metalle freie Elektronen von bestimmter Konzentration, die mit großer Geschwindigkeit zwischen den Molekülen des Metalls hin- und herfahren und auch sonst in jeder Beziehung wie Teilchen eines idealen Gases sich verhalten. Ferner wird

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. S. 139. Note 390.
2) H. A. Wilson, Phil. Trans. 208. S. 247. 1908.
3) O. W. Richardson, Phil. Mag. (6) 16. S. 740. 1908.

angenommen, daß an der Oberfläche des Metalls ein sogenanntes Oberflächenfeld sich befinde, das die Elektronen bei gewöhnlicher Temperatur am Austreten aus dem Metall hindert.

Nimmt man an, daß die Geschwindigkeitsverteilung der freien Elektronen im Metall durch die Maxwellsche Verteilungsfunktion gegeben sei, so läßt sich der auf die Meßplatte C treffende Elektronenstrom als Funktion der Potentialdifferenz V des Gegenfeldes zwischen B und C berechnen. Man muß hierzu noch über das Oberflächenfeld bestimmtere Annahmen machen.[1])

a) Die allgemein übliche Auffassung geht dahin, daß die Kraftlinien des Oberflächenfeldes *normal* zur emittierenden Fläche stehen. Dies hat zur Folge, daß beim Austritt des Elektrons aus dem Metall nur die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Platte vermindert wird, wodurch gleichzeitig eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit resultiert.

b) Die andere Annahme ist die, daß das Oberflächenfeld *radial* gerichtet sei, d. h. in jedem Falle mit der Austrittsrichtung des Elektrons zusammenfällt, wodurch das Elektron beim Austritt nur eine Verringerung seiner Voltgeschwindigkeit, nicht aber eine Richtungsänderung seiner Bahn erleidet.

Sind nun u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten des Elektrons im Metall, wobei die u-Richtung mit der Flächennormalen zusammenfalle, so ist die Relativzahl der im Geschwindigkeitsbereiche u, v, w bis $u+du$, $v+dv$, $w+dw$ liegenden Elektronen im Falle Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung gegeben durch

$$W(u,v,w)\,du\,dv\,dw = \left(\frac{km}{\pi}\right)^{3/2} e^{-km(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw,$$

worin m die Masse eines Elektrons bezeichnet und k mit der allgemeinen Gaskonstanten R, der Loschmidtschen Zahl N und der absoluten Temperatur T durch die Beziehung $k=N/2RT$ verbunden ist.

Ist dann n die räumliche Konzentration der freien Elektronen im Metall, e die Ladung eines Elektrons, f die Größe

1) Vgl. die Diskussion der hierher gehörigen Gesamtfragen bei A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 400, 450. 1919; über den Glüheffekt im besonderen vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 60. S. 30. 1919.

der emittierenden Fläche, so ist der die Platte A verlassende Elektronenstrom

$$J = n \cdot e \cdot f \cdot \iiint u W(u, v, w)\, du\, dv\, dw .$$

Bedenkt man noch, daß nur diejenigen Elektronen die Meßplatte erreichen, deren Richtung nach dem Austritt aus dem Metall innerhalb des räumlichen Winkels φ liegt, und für die bei *normalem* Oberflächenfeld $\frac{m}{2} u^2 \geqq e(V + II)$ ist, wobei II die vom Oberflächenfeld herrührende Potentialdifferenz bedeutet, so findet man den auf C ankommenden Elektronenstrom zu

$$J = nef \sqrt{\frac{RT}{2\pi m N}}\, e^{-\frac{Ne}{RT}(V+II)} \cdot \left(1 - \cos^2\varphi\, e^{-\frac{Ne}{RT} V \operatorname{tg}^2\varphi}\right).$$

Hierin ist offenbar

$$J_0 = nef \sqrt{\frac{RT}{2\pi m N}}\, e^{-\frac{Ne}{RT} II}$$

der die Platte A verlassende gesamte Elektronenstrom, so daß man auch schreiben kann

$$J = J_0 \left(1 - \cos^2\varphi\, e^{-\frac{Ne}{RT} V \operatorname{tg}^2\varphi}\right) e^{-\frac{Ne}{RT} V} . \tag{1}$$

Für $\varphi = \pi/2$ geht diese Formel in die bekannte Richardsonsche Gleichung $J = J_0\, e^{-\frac{Ne}{RT} V}$ über.

Man erhält aus (1) die Raumdichte[1]) derjenigen Elektronen, welche die Platte A unter einem Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ gegen die Plattennormale verlassen und noch die Platte C treffen zu

$$i = \frac{dJ}{2\pi \sin\varphi\, d\varphi} = \frac{J_0}{\pi} \cos\varphi \left(1 + \frac{Ne}{RT} \frac{V}{\cos^2\varphi}\right) e^{-\frac{Ne}{RT} \frac{V}{\cos^2\varphi}} .$$

Setzt man noch

$$\frac{Ne}{RT} V = \bar{V}, \qquad \frac{Ne}{RT} II = \bar{II},$$

so wird

$$i = \frac{J_0}{\pi} \cos\varphi \left(1 + \frac{\bar{V}}{\cos^2\alpha}\right) e^{-\frac{\bar{V}}{\cos^2\alpha}} \tag{2}$$

1) D. i. die in der Zeiteinheit die Raumeinheit des räumlichen Winkels erfüllende Elektronenmenge.

wenn man allgemeiner den Winkel zwischen Strahlrichtung und Richtung des Gegenfeldes mit α bezeichnet. Bei *radial* gerichtetem Oberflächenfeld dagegen ist

$$i = \frac{J_0}{\pi} \cos\varphi \left(1 + \bar{\Pi} + \frac{\bar{V}}{\cos^2\alpha}\right) e^{-\frac{\bar{V}}{\cos^2\alpha}}. \tag{3}$$

Für enge Strahlenbündel, deren Achse mit der Richtung des Gegenfeldes zusammenfällt, folgen bei beliebigem Emissionswinkel φ aus (2) und (3) die Beziehungen

$$i = i_0 (1 + \bar{V}) e^{-\bar{V}} \tag{4}$$

bei *normalem* Oberflächenfeld und

$$i = i_0 \left(1 + \frac{\bar{V}}{1 + \bar{\Pi}}\right) e^{-\bar{V}} \tag{5}$$

bei *radialem* Oberflächenfeld, wenn i_0 den zum Potentiale $V = 0$ gehörigen Strom bezeichnet.

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt, daß die Geschwindigkeitsverteilung in engen Bündeln überhaupt nicht vom Emissionswinkel φ abhängt. Da ferner eine Strahlung nach dem *Kosinusgesetz* vorliegt — ersichtlich aus Gleichungen (2) und (3) — so sieht man leicht ein, daß Gleichungen (4) und (5) auch im Falle ganz *beliebig gestalteter* emittierender Körper gelten, falls nur die Emissionsrichtung, in der die Geschwindigkeitsverteilung untersucht werden soll, mit der Richtung des Gegenfelds zusammenfällt.

Zugleich erkennt man die prinzipielle Verschiedenheit der Formeln (4) und (5). Während bei normal gerichtetem Oberflächenfeld keinerlei Kenntnis über Π gewonnen werden kann, kann man bei radial gerichtetem Oberflächenfeld aus dem experimentell festgelegten Kurvenverlauf direkt die Größe des Oberflächenpotentials Π ermitteln.

Die Versuchsanordnung. Die Versuchsanordnung schloß sich im wesentlichen an die von Hrn. Lenard eingeführte Gegenspannungsmethode an. Fig. 2 zeigt die Einrichtung des Versuchsrohrs in schematischer Darstellung.

Die durch Glühen eines dünnen Wolframdrahts erzeugten Elektronen der Glühkathode G treten durch zwei enge Blenden B_1 und B_2 (Durchmesser je 2 mm, Abstand 10 mm) zweier

gegeneinander isolierter Hüllen H_1 und H_2 in den eigentlichen Versuchsraum ein. Zwischen den beiden Blenden konnte ein homogenes elektrisches Feld erzeugt werden, das die Strahlen auf die gewünschte Geschwindigkeit brachte. Von der zweiten Blende ab sind die Strahlen unbeeinflußt von elektrischen Kräften, bis sie bei E in ein zweites elektrisches Feld treten, das dem ersten Felde entgegen gerichtet ist. Durch dieses Feld gelangen nur diejenigen Elektronen, die eine größere Geschwindigkeit besitzen, als der Gegenspannung des Feldes entspricht. Diese kommen dann in den Käfig K, dessen

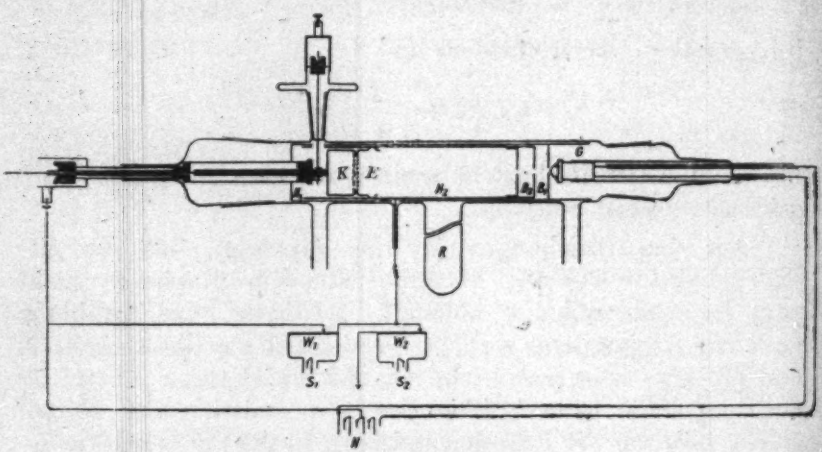


Fig. 2. (1 : 5)

Öffnung durch ein feinmaschiges Platinnetz verschlossen ist und mit einem Quadrantelektrometer in Verbindung steht. E war ein Doppelnetz aus feinem Platindraht. Es stand mit der Hülle H_2 in metallischer Verbindung und war am Käfig mit Hilfe kleiner Bernsteinsäulchen (Höhe 2 mm) befestigt, so daß Doppelnetz und Käfig zusammen mit Hilfe eines Triebs in der Hülle H_2 mit Leichtigkeit verschoben werden konnten. Zur weiteren Begrenzung des Bündels war in der Hülle H_2 eine dritte Blende eingeschaltet.

Die Glühkathode bestand im wesentlichen aus einem Messingkopf, an dem der Wolframdraht mittels kleiner Schräubchen befestigt wurde. Der Draht war nicht geradlinig eingespannt, sondern nach der Blende B_1 hin stark ausgebogen. Hierdurch und durch die Wirkung der Blenden

wurde erreicht, daß nur die vom mittleren Teil des Glühdrahts emittierten Elektronen in den Versuchsraum gelangen konnten.

Der Glühstrom wurde von einer Akkumulatorenbatterie geliefert, deren Mitte mit der Hülle H_1 verbunden war. Durch geeignete Widerstände in den Zuführungsdrähten zur Glühkathode konnte erreicht werden, daß die Mitte des Glühdrahts und die gegenüberliegende Blende der Hülle H_1 gleiches Potential besaßen. H_1 und H_2 konnten durch zwei Spannungsbatterien S_1 und S_2 auf beliebiges Potential gebracht werden, so daß einerseits zwischen B_1 B_2, andererseits zwischen E und K beschleunigende oder verzögernde Felder von beliebiger Größe hergestellt werden konnten, während die Emission selbst in einem von äußeren Feldern freien Raume stattfand. W_1 und W_2 sind zwei Widerstände von je 12000 Ohm, von denen die Spannung abgezweigt wurde.

Die Evakuation des Röhrensystems wurde von einer Gaedeschen Diffusionsluftpumpe[1]) besorgt. Als Vorpumpe diente eine rotierende Quecksilberpumpe nach Gaede, die mit einer Ölpumpe kombiniert war. Der jeweilige Druck konnte dann mittels eines Vakuummeters nach Gaede[2]) festgestellt werden, dessen Angaben in geeigneter Weise nachgeprüft wurden, und das Drucke bis zu 10^{-5} mm Hg genau zu messen erlaubte.

Der Ansatz R diente zur Kühlung der Röhre, was durch eine Kältemischung von absolutem Alkohol und fester Kohlensäure erfolgte.

Als Meßinstrument wurde ein Quadrantelektrometer benutzt, dessen Nadelspannung gewöhnlich 100 Volt betrug. Die Empfindlichkeit war dann bei dem benutzten Skalenabstand (2 m) etwa 1000 Skalenteile für 1 Volt, die Kapazität des gesamten Systems betrug 153 cm. Die Kapazität änderte sich beim Verschieben des Käfigs, jedoch nur in geringem Maße, was bei den Versuchen jedoch leicht berücksichtigt werden konnte.

Um gegen Störungen durch erdmagnetische Kräfte geschützt zu sein, wurde die Versuchsröhre in der Mitte eines großen Stromkreises aufgestellt, dessen Ebene senkrecht zur

1) W. Gaede, Ann. d. Phys. **46**. S. 357. 1915.
2) W. Gaede, Ann. d. Phys. **41**. S. 297. 1913.

Richtung der erdmagnetischen Kraft stand. Eisen in unmittelbarer Nähe der Röhre wurde tunlichst vermieden, als Halter und Stative wurden dort nur solche aus Aluminium benutzt.

Versuche. Die Ausführung der Versuche erfolgte in der Weise, daß die Hüllen H_1 und H_2 zusammen mit dem Glühdraht auf beliebiges negatives Potential gebracht wurden. Hierdurch entstand zwischen dem Käfig und dem davor liegenden Doppelnetz ein elektrisches Feld, und nur diejenigen Elektronen konnten in den Käfig gelangen, deren Geschwindigkeit größer war, als der Gegenspannung des Feldes entsprach. Es wurden dann die in den Käfig gelangenden Intensitäten als Funktion der verzögernden Spannung des Gegenfeldes gemessen.

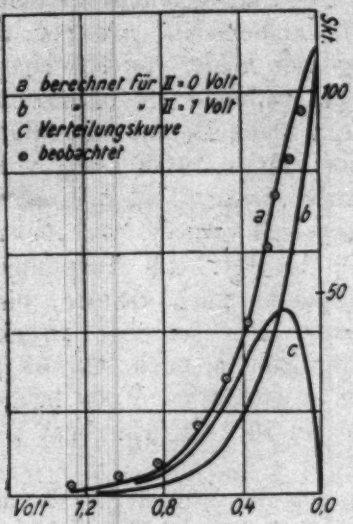


Fig. 3.

Fig. 3 zeigt eine solche Versuchsreihe, die mit einem Wolframdraht von 0,15 mm Durchmesser im äußersten Vakuum erhalten wurde. Als Abszissen sind die zwischen E und K angelegten Potentiale in Volt und als Ordinaten die Elektrometerausschläge während 15 Sekunden Glühdauer in Skalenteilen aufgetragen.[1]) Bei der gegebenen Voltempfindlichkeit (1000 Skalenteile/Volt) des Elektrometers und der Kapazität (153 cm) des Systems entspricht einem Gang des Elektrometers von 1 Skt./sec eine Stromstärke von $1{,}7 \cdot 10^{-13}$ Weber. Die Temperatur des glühenden Drahtes wurde mit Hilfe eines optischen Pyrometers zu 2030° abs. bestimmt. Versuche mit Wolframdrähten von 0,1 mm und 0,2 mm Durchmesser ergaben dieselben Verteilungskurven.

Will man die experimentell erhaltene Geschwindigkeitsverteilungskurve mit der theoretisch zu erwartenden Kurve

1) Bemerkenswert ist, daß schon bei verzögernden Feldern von 0,2—0,3 Volt kein Anstieg der Kurven mehr erfolgte, was durch Kontaktpotentialdifferenzen oder elektrische Doppelschichten bedingt sein mochte. In Fig. 3 ist das Gegenfeld schon um den Betrag dieser Kontaktpotentialdifferenz verkleinert.

vergleichen, so hat man gemäß den Voraussetzungen über die Wirkungsweise des Oberflächenfeldes zwei Fälle zu unterscheiden, wie schon auf S. 458 des Vorliegenden dargelegt worden ist.

Nimmt man an, daß die Richtung der Kraftlinien des Oberflächenfeldes *normal* zur emittierenden Fläche stehen, so gilt Gleichung (4)

$$i = i_0(1 + \bar{V}) \cdot e^{-\bar{V}}.$$

Bei *radial* gerichtetem Oberflächenfeld dagegen wird nach Gleichung (5)

$$i = i_0\left(1 + \frac{\bar{V}}{1 + \bar{II}}\right) \cdot e^{-\bar{V}}.$$

Mißt man V in Volt, so ist für die beobachtete Temperatur $T = 2030^0$

$$\bar{V} = \frac{eN}{RT} V = 5{,}72\ V.$$

In Fig. 3 finden sich aus Gleichung (5) zwei Kurven berechnet, die einer Austrittsarbeit von $II = 0$, bzw. $II = 1$ Volt entsprechen. Die Kurve für $II = 0$ stellt zugleich die Gleichung (4) dar.

Wie man sieht, tragen die beobachteten Punkte dem allgemeinen Charakter der Kurve (*a*) gut Rechnung, doch zeigen sich hier wie bei allen anderen erhaltenen Verteilungskurven Abweichungen zugunsten höherer Geschwindigkeiten.

Aus dem verhältnismäßig guten Anschluß der beobachteten Punkte an die Kurve $II = 0$ kann man schließen, daß entweder das Oberflächenfeld nicht radial, sondern normal gerichtet sei und daß man deshalb durch Messungen dieser Art keine Kenntnis von II erhalten kann, oder aber daß — bei radial gerichtetem Oberflächenfeld — die Austrittsarbeit nur sehr kleine Bruchteile von einem Volt betrug. Nimmt man II bei radial gerichtetem Oberflächenfeld nicht verschwindend klein an, so gerät man insofern in Widerspruch mit der Erfahrung, als dann kleinste Austrittsgeschwindigkeiten in nachweisbarem Betrage vorhanden sein müßten (ersichtlich durch Differentiation von Gleichung 5), was aber aus den beobachteten Kurven nicht hervorgeht.

Sieht man Gleichung (4) als zutreffend an, so erhält man

durch Differentiation die Wahrscheinlichkeit einer zwischen V und $V + dV$ liegenden Voltgeschwindigkeit zu

$$P(V)\,dV = \frac{eN}{RT}\,\bar{V}e^{-\bar{V}}\,dV. \tag{6}$$

Kurve c in Fig. 3 gibt den Verlauf dieser Wahrscheinlichkeitskurve für die beobachtete Temperatur $T = 2030^0$ wieder. Man erhält dann aus Gleichung (6) den mittleren Wert der Voltgeschwindigkeit zu

$$\int V P(V)\,dV = 2\frac{RT}{Ne}.$$

Hieraus würde sich für Glühtemperaturen zwischen 1500^0 und 2000^0 eine mittlere Strahlgeschwindigkeit zwischen 0,26 Volt und 0,34 Volt ergeben.

Bei diesen Messungen war es wichtig, daß die vom Glühdraht emittierten Elektronen vor ihrem Eintritt in das Gegenfeld nicht durch ungewollte elektrische Kräfte in ihrem Laufe beeinflußt wurden. Hier war vor allem darauf zu achten, daß Glühdraht und die gegenüberliegende Blende B_1 gleiches Potential besassen. Um dies zu erreichen, war, wie schon erwähnt, die Mitte der Batterie, die den Heizstrom lieferte, mit der Hülle H_1 metallisch verbunden. Die Widerstände in den beiden Zuführungsdrähten zum Glühdraht wurden dann vor dem Zusammensetzen der Röhre so gewählt, daß ein Nullgalvanometer, das zwischen die Mitte des Glühdrahts und die Mitte der Heizbatterie geschaltet war, keinen Strom mehr anzeigte. Um auch während der Messungen eine Kontrolle zu haben, konnte der Strom gewendet werden. Die richtige Einstellung zeigte sich dann dadurch an, daß ein Wenden des Glühstroms ohne Einfluß auf die Größe der Elektrometerausschläge war.

Für die Erklärung der Abweichungen der beobachteten Kurve von der theoretischen könnte der Umstand in Betracht kommen, daß längs des Glühdrahts ein Potentialgefälle vorhanden war. Die Spannungsdifferenz zwischen den Enden des Glühdrahts wurde in dem vorliegenden Falle zu 0,36 Volt ermittelt. Da aber infolge der Wirkung der Blenden und der besonderen geometrischen Form des Glühdrahts nur dessen mittlerer Teil als Elektronenquelle in Betracht kam, so dürfte der in Betracht kommende Potentialabfall am Glühdraht höchstens $\pm$ 0,05 Volt betragen haben.

II. *Absorption.* Die Beobachtungen Hrn. Lenards[1]) über den Durchgang von freien Elektronen durch Materie haben gezeigt, daß der für die Absorption von Kathodenstrahlen wirksame Molekülquerschnitt von einem außerordentlich geringen Werte bei den größten Strahlgeschwindigkeiten zuerst allmählich und dann in immer steigendem Maße mit sinkender Strahlgeschwindigkeit zunimmt. Die Zunahme geht jedoch nicht über alle Grenzen, wenn die Geschwindigkeit der Null sich nähert; vielmehr tritt in der Nähe von etwa 10 Volt ein Wendepunkt ein, worauf der absorbierende Querschnitt einem Grenzwert zustrebt, der angenähert gleich dem gaskinetischen Querschnitt des Moleküls ist.

Die Erscheinung, daß der absorbierende Querschnitt von einer gewissen Geschwindigkeit ab nahe konstant bleibt, wurde an einer Reihe von Gasen (Argon, Luft, Kohlensäure und Wasserstoff) festgestellt und konnte bis zu Strahlen von 4 Volt Geschwindigkeit verfolgt werden.

Hrn. Franz Mayer[2]) gelang es dann, durch Hinzufügen mehrerer Verfeinerungen in der Meßmethode die Konstanz des absorbierenden Querschnitts in Luft bis zu Strahlgeschwindigkeiten von 0,5 Volt sicher zu stellen.

Eine Untersuchung Hrn. Akessons[3]) schien dagegen die Konstanz der absorbierenden Querschnitte bei kleinsten Strahlgeschwindigkeiten in Frage zu stellen. Hr. Akesson fand nämlich, daß langsame Kathodenstrahlen in manchen Gasen bei einer bestimmten Geschwindigkeit scheinbar weniger durchdringungsfähig sind als in den benachbarten Geschwindigkeitsbereichen, was dann als selektive Absorption gedeutet wurde.

---

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **12.** S. 730. 1903.

2) Fr. Mayer, Ann. d. Phys. **45.** S. 23. 1914.

3) Von Hrn. Akesson sind zwei Veröffentlichungen erschienen, von denen die eine (Heidelberger Akad. 1914, A 21) sich mit den stufenhaften Geschwindigkeitsverlusten an langsamen Kathodenstrahlen befaßt, während die andere (Lunds Univ. Ars. **12.** Nr. 11) außer diesem Gegenstand noch die selektive Absorption behandelt. Die Ergebnisse der ersteren Arbeit, die aus dem Heidelberger radiologischen Institut stammt, konnten bei Kohlensäure, Wasserstoff und Stickstoff bestätigt werden (vgl. Dissertation S. 23); neu untersucht (bis 20 Volt) wurden Helium und Argon, die jedoch in diesem Gebiet keine merkliche Stufe zeigten.

Ganz neuerdings hat Hr. Ramsauer[1]) die Einwirkung von Molekülen auf den Lauf langsam bewegter Elektronen mit einer von den bisher in Anwendung gebrachten Untersuchungsweisen abweichenden Methode untersucht. Der durch diese Methode festgelegte Molekülquerschnitt stimmt in dem untersuchten Geschwindigkeitsbereich (1—3 Volt) mit den schon von Hrn. Lenard gefundenen Grenzwerten des absorbierenden Querschnitts bei Wasserstoff und Stickstoff gut überein, was nicht ohne weiteres zu erwarten war, da durch Hrn. Ramsauers Methode nicht nur der absorbierende, sondern auch der Diffusion bewirkende Molekülquerschnitt zur Messung kommt. Anderseits zeigte sich, daß der elektronenbeeinflussende Querschnitt bei Annäherung zur Geschwindigkeit Null auch beträchtlich abnehmen kann, wie dies beispielsweise bei Argon der Fall ist.

Versuchsanordnung und Methode. Die Versuchsanordnung war die auf S. 455 des Vorliegenden beschriebene. Ihr großer Vorteil bestand darin, daß der Käfig während der Messung mit großer Leichtigkeit hin und her geschoben werden konnte, wodurch verschiedene Strahllängen resultierten. Die Verschiebung des Käfigs wurde durch die Stellung des Triebs gemessen, einer ganzen Umdrehung des Triebs entsprach eine Verrückung des Käfigs um 1,86 cm. Außerdem konnte die Intensität des Kathodenstrahls durch Ändern des Glühstroms in fast beliebigem Verhältnis geändert werden.

Die Absorptionsmessung geschah in folgender Weise. Zwischen den Blenden B_1 und B_2 wurden die Strahlen auf die gewünschte Geschwindigkeit gebracht und die in den Käfig gelangende Intensität als Funktion der Strahllänge gemessen. Eine solche Meßreihe wurde zuerst bei Gasfüllung und dann im Vakuum aufgenommen. Aus der Kombination der beiden Versuchsreihen konnte dann der Absorptionskoeffizient ermittelt werden.

Es sei J_0 die Anfangsintensität des Elektronenstroms. Hieraus wird auf dem Wege x bis zum Käfig durch Absorption und seitliche Ausbreitung nach Hrn. Lenard[2])

$$J = f(x)\, J_0\, e^{-(\alpha+\sigma p)x}, \tag{7}$$

1) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 64. S. 513. 1921.
2) P. Lenard, Wied. Ann. 56. S. 255. 1895.

worin $f(x)$ der geometrischen Ausbreitung des Strahls und der Abhängigkeit der Kapazität des Systems von der Strahllänge x Rechnung trägt, a das Absorptionsvermögen des Dampfresiduums, α das spezifische Absorptionsvermögen des reinen Gases und p den Gasdruck bezeichnet. Man hat daher für zwei Abstände x_1 und x_2 beim Drucke p_1 mit der Anfangsintensität J_{10}

$$J_{11} = f(x_1)\, J_{10}\, e^{-(a+\alpha p_1)x_1},$$

$$J_{12} = f(x_2)\, J_{10}\, e^{-(a+\alpha p_1)x_2}.$$

Für einen Druck p_2 und die Anfangsintensität J_{20} ist bei denselben Abständen x_1 und x_2

$$J_{21} = f(x_1)\, J_{20}\, e^{-(a+\alpha p_2)x_1},$$

$$J_{22} = f(x_2)\, J_{20}\, e^{-(a+\alpha p_2)x_2},$$

Setzt man noch

$$\Delta_1 = \ln \frac{J_{11}}{J_{12}}, \quad \Delta_2 = \ln \frac{J_{21}}{J_{22}},$$

so folgt für das spezifische Absorptionsvermögen des reinen Gases

$$\alpha = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{(p_2 - p_1)(x_2 - x_1)}. \tag{8}$$

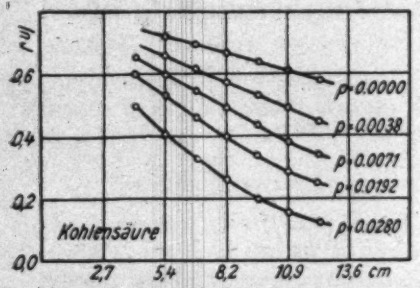
Diese Methode hat den großen Vorteil, daß einerseits nicht die Strahllängen selbst, sondern nur die Differenz $x_2 - x_1$ zweier Strahllängen bekannt sein braucht, die mit Hilfe des Triebs sehr genau bestimmt werden konnte, und daß anderseits die Anfangsintensitäten bei den Drucken p_1 und p_2 nicht gleich sein mußten. Dieser Umstand war deshalb von Bedeutung, da man nicht voraussehen konnte, in welcher Weise die Anfangsintensität selbst bei gleichem Glühstrom vom Gasdruck in der Röhre abging.

Resultate. Um den Einfluß des Dampfresiduums zu ermitteln, wurde zuerst die Ausbreitungsweise des Kathodenstrahls im Vakuum untersucht.

Fig. 4 (Kurve $p = 0$ mm Hg) zeigt das Resultat der Messung. Als Abszissen sind die Strahllängen x, als Ordinaten die natürlichen Logarithmen der Elektrometerausschläge aufgetragen. Trotz anhaltender Kühlung und bestmöglicher Evakuation konnte kein horizontaler Verlauf der Kurve erhalten werden. Dies mochte weniger an der absorbierenden

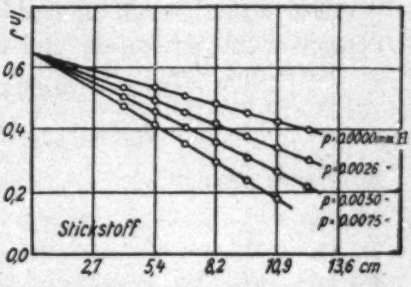
Wirkung des Dampfresiduums als an der Divergenz des Strahlenbündels liegen; denn die Abhängigkeit der Neigung der Kurven von der Geschwindigkeit des Kathodenstrahls war derart, daß der höheren Strahlgeschwindigkeit die kleinere Neigung entsprach. In allen Fällen aber wurde der Verlauf der Kurve innerhalb der Fehlergrenzen durch eine Gerade wiedergegeben.

Hiernach wäre zu erwarten gewesen, daß auch bei Gasfüllungen die ln J-Kurve eine Gerade sei. Dies war aber ohne besondere Vermeidung von Fehlerquellen nicht der Fall.



Beschl. Feld 0 Volt, Gegenfeld 0 Volt

Fig. 4.



Beschl. Feld 0 Volt, Gegenfeld 0,3 Volt

Fig. 5.

Fig. 4 zeigt eine Schar solcher Kurven in Kohlensäure bei verschiedenen Gasdrucken. Man erkennt deutlich eine Abweichung der Kurven von der Geraden, die mit wachsendem Druck und größeren Abständen zunimmt. Versucht man, aus den Kurven den Wert des spezifischen Absorptionsvermögens zu ermitteln, so erhält man keine konstanten Werte, sondern findet eine beträchtliche Abnahme des Absorptionsvermögens bei zunehmenden Drucken und Strahllängen, wie aus Tab. I ersichtlich ist.

Tabelle I.

Strahllänge	4,1	6,7	9,5	12,2 cm
p = 0,0038 mm Hg	—	30,4	30,3	30,2
p = 0,0071 „ „	30,2	30,0	29,4	28,1
p = 0,0192 „ „	25,0	23,8	22,2	21,0
p = 0,0280 „ „	21,8	19,4	17,0	14,0

Ein solcher Gang des spezifischen Absorptionsvermögens mit Druck und Strahllänge trägt natürlich dem reinen Ab-

sorptionsvorgang selbst nicht Rechnung. Es war deshalb anzunehmen, daß irgendwelche Fehlerquellen das Resultat in der angegebenen Richtung gefälscht hatten. Hier kam vor allem nach den Erfahrungen Hrn. Lenards der Einfluß negativer Träger in Betracht[1]), denn infolge der Absorption mußte längs des Strahlenwegs ein Konzentrationsgefälle negativer Träger entstehen. Die Folge davon war, daß diese Träger zum Käfig wanderten, wodurch die ankommende Intensität zu groß, das Absorptionsvermögen daher zu klein gemessen wurde.

Der Einfluß der negativen Träger mußte am größten erscheinen, wenn die Absorption selbst am größten ist, d. h. bei großen Gasdrucken und langem Strahlenweg, wie auch Tab. I zeigt.

Um den Einfluß der negativen Träger zu beseitigen, wurde nach dem Vorgange Hrn. Lenards zwischen Käfig und dem davor liegenden Doppelnetz (vgl. Fig. 2) ein elektrisches Gegenfeld eingeschaltet, das die negativen Träger vom Käfig zurückhalten sollte. Dies war einerseits ermöglicht durch den Umstand, daß diese langsamen Strahlen nur negative und keine positiven Träger erzeugen, anderseits durch den Unterschied der Strahlgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der negativen Träger, die nur von gastheoretischer Größenordnung ist. Hierzu mußten schon Bruchteile eines Volts genügen, denn man hat, wenn L die mittlere molekulare Energie eines Trägers bedeutet, $eV = L$, oder da $L = 3RT/2N$, so wird $V = 3RT/2eN$ die für alle Gase gültige Gegenspannung, die nötig ist, um die negativen Träger vom Käfig zurück zu halten. Man erhält hieraus für Zimmertemperatur V etwa 0,04 Volt.

Es zeigte sich aber, daß diese Gegenspannung in den meisten Fällen nicht genügte, um alle negativen Träger vom Käfig fern zu halten. Besonders bei großen Gasdrucken mußten Felder bis zu 1 Volt in Anwendung kommen; diese Gegenspannung war dann genügend groß und eine Vergrößerung derselben zeigte keinen Einfluß mehr auf den Verlauf der Kurve.

Wie gut durch Anwendung geeigneter Gegenfelder die Beseitigung der negativen Träger gelang, zeigt Fig. 5. Die Kurven verlaufen jetzt alle gerade; das aus den Kurven be-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **12**. S. 724. 1903.

rechnete spezifische Absorptionsvermögen ist vollkommen konstant und zeigt innerhalb der Versuchsfehler keine Abhängigkeit mehr vom Druck des Gases und der Länge des Strahls.

Man bemerkt, daß die Verlängerungen der Kurven in einem Punkte auf der Ordinatenachse sich schneiden, was anzeigt, daß bei allen verwendeten Gasdrucken gleiche Anfangsintensität vorhanden war. Da bei den Versuchen der Glühstrom konstant gehalten wurde, kann hieraus geschlossen werden, daß die vom Glühdraht emittierte Elektronenmenge innerhalb des beobachteten Gebiets vom Gasdruck unabhängig ist.

Die Tabb. II—VI enthalten die nach Gleichung (8) berechneten Werte des spezifischen Absorptionsvermögens für die untersuchten fünf Gase Wasserstoff, Stickstoff, Kohlensäure, Helium und Argon.[1])

Tabelle II.

Wasserstoff.

Strahlgeschwindigkeit	Druck	Gegenfeld	Spez. Absorptionsvermögen	
	p		a	Mittelwerte
Volt	mm Hg	Volt	cm^{-1}	cm^{-1}
0,2	0,0032	0,3	43,7	
	0,00145	0,3	49,3	46,7
	0,0025	0,2	47,2	
1,0	0,0032	1,0	47,9	47,9
2,0	0,0013	1,0	45,7	46,4
	0,0013	2,0	47,1	
3,0	0,00185	1,0	45,8	46,7
	0,00185	2,0	47,6	
4,0	0,00145	1,0	45,1	
	0,0016	2,0	46,1	45,6
	0,0058	3,0	45,7	
6,0	0,00115	2,0	43,7	43,7
8,0	0,0037	2,0	42,6	43,6
	0,0012	2,0	44,6	

Bei der Angabe der Strahlgeschwindigkeit ist schon berücksichtigt, daß der Strahl auch ohne beschleunigende Felder eine mittlere Geschwindigkeit von etwa 0,5 Volt besaß (vgl. Fig. 3).

1) Das Argon wurde von Hrn. Ramsauer zur Verfügung gestellt, wofür ihm an dieser Stelle gedankt sei.

Tabelle III.

Stickstoff.

Strahlgeschwindigkeit	Druck p	Gegenfeld	Spez. Absorptionsvermögen a	Mittelwerte
Volt	mm Hg	Volt	cm^{-1}	cm^{-1}
0,2	0,0018	0,2	31,8	32,2
	0,0035	0,3	32,6	
0,5	0,0075	0,3	32,6	32,6
1,0	0,0075	1,0	31,3	31,8
	0,0029	1,0	32,3	
1,5	0,0075	1,0	32,6	32,6
2,0	0,0048	1,0	32,0	31,9
	0,0027	2,0	31,8	
3,0	0,0037	1,0	31,4	31,4
4,0	0,0037	1,0	33,0	32,1
	0,0060	2,0	31,2	
6,0	0,0073	2,0	30,8	30,8
8,0	0,0073	2,0	29,9	29,9

Tabelle IV.

Kohlensäure.

Strahlgeschwindigkeit	Druck p	Gegenfeld	Spez. Absorptionsvermögen a	Mittelwerte
Volt	mm Hg	Volt	cm^{-1}	cm^{-1}
0,2	0,0025	0,05	35,6	35,1
	0,0031	0,20	34,4	
	0,0028	0,20	35,3	
2,0	0,0029	1,0	34,4	35,05
	0,0053	1,0	35,6	
3,0	0,0034	0,5	34,6	34,6
4,0	0,0028	2,0	36,4	35,3
	0,0061	2,0	34,2	
6,0	0,0024	2,0	33,5	34,0
	0,0061	2,0	34,5	
8,0	0,0032	2,0	32,3	31,95
	0,0061	4,0	31,6	

Der am Manometer abgelesene Druck wurde jeweils auf 0° C. reduziert.

Die Werte von a stellen dann das auf den Druck $p = 1$ mm Hg und die absolute Temperatur $T = 273°$ reduzierte spezifische Absorptionsvermögen dar.

Tabelle V.

Helium.

Strahlgeschwindigkeit	Druck p	Gegenfeld	Spez. Absorptionsvermögen α	Mittelwerte
Volt	mm Hg	Volt	cm^{-1}	cm^{-1}
0,2	0,0076	0,1	18,3	18,75
	0,0028	0,1	19,2	
2,0	0,0089	0,5	20,3	20,25
	0,0032	0,5	20,2	
2,5	0,0071	2,0	19,4	19,4
3,0	0,0071	2,0	20,3	20,3
4,0	0,0081	1,0	19,1	20,1
	0,0037	1,0	20,5	
	0,0071	2,0	20,7	
6,0	0,0071	2,0	18,9	18,9
8,0	0,0071	2,0	18,6	18,6

Tabelle VI.

Argon.

Strahlgeschwindigkeit	Druck p	Gegenfeld	Spez. Absorptionsvermögen α	Mittelwerte
Volt	mm Hg	Volt	cm^{-1}	cm^{-1}
0,2	0,0113	0,1	2,5	2,5
0,7	0,0113	0,1	6,3	6,3
1,2	0,0113	0,1	9,7	9,75
	0,0157	0,5	9,8	
1,7	0,0126	0,5	13,5	13,5
2,0	0,0113	1,0	14,1	14,1
3,0	0,0113	1,0	18,5	18,5
4,0	0,0113	2,0	24,0	24,6
	0,0157	0,5	25,2	
5,0	0,0157	2,0	28,3	28,3
6,0	0,0157	2,0	37,0	37,0
8,0	0,0157	2,0	53,1	52,9
	0,0108	0,5	52,3	
	0,0080	1,0	53,4	
10,0	0,0080	1,0	66,3	66,6
	0,0110	3,0	66,9	
12,0	0,0060	2,0	72,9	72,9
15,0	0,0060	2,0	71,4	71,4
20,0	0,0060	3,0	58,1	58,1
25,0	0,0142	2,0	47,6	47,6
30,0	0,0142	3,0	43,6	43,6
40,0	0,0142	3,0	36,4	36,4

Fehlerquellen.[1]) Maßgebend für die Beurteilung der Fehlerquellen ist die Definition der Kathodenstrahlabsorption als Reduktion der Strahlgeschwindigkeit nach Richtung und Größe zu Geschwindigkeit von nur molekularer Größenordnung. Diese Reduktion kann in verschiedener Weise eintreten; entweder bleibt das Elektron am Atom haften (echte Absorption), oder es wird reflektiert (unechte Absorption). Dagegen sind als nicht absorbiert die Elektronen zu betrachten, die zwar Teile des Molekülquerschnitts treffen, ohne aber ihre Geschwindigkeit weder nach Größe noch nach Richtung wesentlich zu ändern, was man im Gegensatz zu Absorption als Diffusion bezeichnet.

Anlaß zu Fehlern liegt also dann vor, wenn die Intensität des durchgelassenen Teils nicht richtig gemessen wird, sei es durch Mitmessung schon absorbierter Elektronen oder auch durch Ausschaltung des durch Diffusion abgelenkten Teiles.

Als Fehlerquellen kamen hiernach folgende Umstände in Betracht.

a) Die zur Messung gelangende Intensität erscheint dadurch vergrößert, daß negative Träger oder auch durch Nähewirkung wieder befreite Elektronen zum Käfig wandern, wodurch das Absorptionsvermögen zu *klein* ausfällt. Diese Fehlerquelle konnte — wie schon erwähnt — durch geeignete Gegenfelder beseitigt werden.

b) In derselben Richtung mußten die Elektronen wirken, die durch Reflexion an den Gasmolekülen in den Käfig gelangten. Da reflektierte Elektronen im wesentlichen wie Gasmoleküle von Elektronenmasse sich verhalten, ihre Geschwindigkeit nach wiederholten Reflexionen also von nur gastheoretischer Größenordnung ist, wurden diese wie die negativen Träger durch das Gegenfeld beseitigt.

c) Eine weitere Fehlerquelle konnte dadurch bedingt sein, daß die geometrische Ausbreitungsweise des engbegrenzten Kathodenstrahls bei Gasfüllung eine andere war als im Vakuum, was Gleichung (7) nicht berücksichtigt. Diese Fehlerquelle mußte wirksam werden, sobald Diffusion der Strahlen im

1) Vgl. über die Fehlerquellen P. Lenard, Quant. über Kathodenstr. S. 74, 75, 87.

Gas auftrat; das Absorptionsvermögen würde dann zu *groß* erscheinen.

Um den Einfluß der Diffusion zu beurteilen, wurde der Durchmesser der Käfigöffnung von 2,0 cm auf 0,5 cm verkleinert. Da diffuse Ausbreitung der Strahlen im Gase zu Fehlern nur dann Anlaß gibt, wenn das Strahlbündel schmal ist im Vergleich zur auffangenden Öffnung des Käfigs, hätte man jetzt einen geringeren Einfluß der Diffusion, also kleinere Absorptionswerte erwarten dürfen. Dies war aber keineswegs der Fall, sondern es ergaben sich innerhalb der Versuchsfehler dieselben Werte des spezifischen Absorptionsvermögens wie bei weiter Käfigöffnung. Man kann wohl hieraus schließen, daß bei den untersuchten geringen Geschwindigkeiten überhaupt keine Diffusion auftritt, sondern daß der ganze wirksame Molekülquerschnitt absorbierend wirkt.

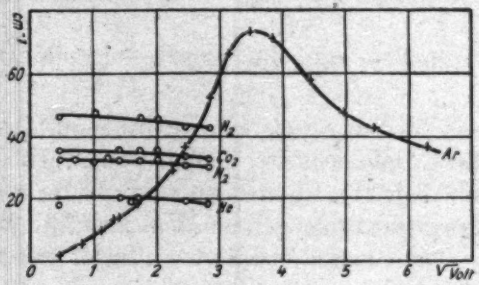


Fig. 6.

d) Eine nicht zu vermeidende Fehlerquelle war durch die Inhomogenität der Strahlen infolge ihrer natürlichen Geschwindigkeitsverteilung bedingt. Diese ist ohne Einfluß, solange das spezifische Absorptionsvermögen von der Strahlgeschwindigkeit gar nicht oder nur wenig abhängt, wie es auch bei allen untersuchten Gasen der Fall war mit Ausnahme des Argon, und mußte hier den Gang der Absorption mit der Geschwindigkeit nur verwaschen erscheinen lassen. Es ist immerhin möglich, daß auch bei den andern untersuchten Gasen feinere Besonderheiten der Absorptionskurve durch die Inhomogenität der Strahlung ganz überdeckt wurden.

In Fig. 6 finden sich die Mittelwerte der Tabb. II—VI graphisch als Funktion der Strahlgeschwindigkeit dargestellt, wobei — um Raum zu sparen — die Quadratwurzeln aus den

Voltzahlen als Abszissen, die spezifischen Absorptionsvermögen als Ordinaten aufgetragen sind. Wie man sieht, ist die Abhängigkeit des spezifischen Absorptionsvermögens bei den Gasen Wasserstoff, Kohlensäure, Stickstoff und Helium nur gering. Die vier Absorptionskurven sind einander ganz ähnlich und bestätigen die von Hrn. Lenard gefundene Konstanz des absorbierenden Querschnitts bei Strahlen unter 8 Volt.

Vollkommen verschieden von diesen Gasen verhält sich Argon.[1]) Das spezifische Absorptionsvermögen steigt von einem sehr kleinen Wert bei kleinsten Strahlgeschwindigkeiten mit wachsender Geschwindigkeit rasch zu einem hohen Maximum zwischen 12 und 13 Volt an und nimmt dann wieder langsam ab. Bemerkenswert ist, daß das Maximum der Absorption mit dem Beginn der Sekundärstrahlung zusammenfällt.[2]) Verwunderlich und nach dem heutigen Stand der Atommodelle ganz unerklärlich ist, daß die Absorption des Argon weit unter diejenige des Helium sinken kann, obwohl das Argon nach unserer Vorstellung das ganze Heliumatom in sich enthält.

Die Frage nach den Diskontinuitäten der Absorptionskurve eines Gases hängt aufs engste mit dem Mechanismus der Energieaufnahme des durchquerten Atoms zusammen. Trifft ein Elektron auf ein Atom, so kann dieses die Energie des Elektrons in zweierlei Weise aufnehmen, und zwar das eine Mal kontinuierlich durch Beschleunigung des Schwerpunkts, das andere Mal quantenhaft, sofern die Energie des Kathodenstrahlelektrons in intramolekulare (dynamidale) Energie verwandelt wird, was aber nur dann eintritt, falls das Elektron eine Energie von ganz bestimmtem Betrage mit sich führt. Die erste Art der Energieaufnahme würde eine kontinuierliche Absorptionskurve bedingen, die zweite Art müßte sich hingegen in Sprüngen der Absorptionskurve bemerklich machen.

Vergleicht man die Absorptionskurve eines Gases in ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Kathodenstrahls mit dem Absorptionsspektrum desselben Gases für gewöhnliche

---

1) Die große Durchlässigkeit des Argon für ganz langsame Strahlen (0,75—1,1 Volt) wurde zuerst von Hrn. Ramsauer beobachtet.

2) Die Trägerbildungsspannung des Argon beträgt nach J. Frank u. G. Hertz etwa 12 Volt.

Ätherstrahlung, wobei man jeder Schwingungszahl ν der Ätherstrahlung eine Voltgeschwindigkeit V des Kathodenstrahls durch den Einsteinschen Ansatz $eV = h \cdot \nu$ zuordnet, so wäre zu erwarten, daß beide Absorptionsspektren weitgehenden Parallelismus zeigten. Denn in beiden Fällen handelt es sich um denselben Vorgang, nämlich um Absorption von außen zugeführten Energiebeträgen durch das Atom. Ebenso wie im gewöhnlichen Spektrum bei genügend großer Dispersion Absorptionslinien und Absorptionsbanden auftreten, müßte die Kathodenstrahlabsorptionskurve bei feinerer Untersuchung in einzelnen Banden sich auflösen, und zwar müßte die Auflösung um so vollständiger in Erscheinung treten, je einheitlicher die Geschwindigkeit des Kathodenstrahls ist.

Eine solche Auflösung kann natürlich nur dann zum Vorschein kommen, wenn das Geschwindigkeitsspektrum des Kathodenstrahls nicht wesentlich breiter als die zu erwartenden Absorptionsbanden sind. Die im Vorliegenden verwendeten Kathodenstrahlen sind viel zu inhomogen, um eine solche Erscheinung anzuzeigen. Dies ist wohl am besten daraus ersichtlich, daß das ganze sichtbare Spektrum von Rot bis Violett dem kleinen Geschwindigkeitsbereich zwischen 1,6 Volt und 3,1 Volt entspricht, während die Geschwindigkeit der einzelnen Elektronen des Kathodenstrahls um etwa 0,5 Volt differierte, also sich über ein Drittel des ganzen sichtbaren Spektrums erstreckt. Man hat daher die angegebenen spezifischen Absorptionsvermögen nur als Mittelwerte über den durch die Inhomogenität der Strahlung bedingten Geschwindigkeitsbereich anzusehen.

Was die Übereinstimmung der spezifischen Absorptionsvermögen mit schon bekannten Daten anbetrifft, darf diese eine recht gute genannt werden. So gibt Hr. Lenard[1]) das spezifische Absorptionsvermögen von Kohlensäure zu 84 cm^{-1}, von Wasserstoff zu 44 cm^{-1} und von atmosphärischer Luft zu 30 cm^{-1} an, entsprechend einer Strahlgeschwindigkeit von 6 Volt. Hr. Ramsauer[2]) findet bei einer Strahlgeschwindigkeit von 1 Volt das spezifische Absorptionsvermögen von Wasserstoff zu 43,8 cm^{-1}, von Stickstoff zu 31,9 cm^{-1}, von Helium zu 19,1 cm^{-1} und von Argon zu rund 5 cm^{-1}.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **12**. S. 732. 1903.
2) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **64**. S. 513. 1921.

Das Absorptionsgesetz $J = J_0 e^{-apx}$, wonach das spezifische Absorptionsvermögen a gleich ist der auf die Raumeinheit bezogenen Summe der absorbierenden Querschnitte beim Drucke $p = 1$ mm Hg, hat zur Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit des Kathodenstrahls groß sei gegen die molekulare Geschwindigkeit des absorbierenden Gases. Denn ap hat offenbar die Bedeutung der reziproken mittleren freien Weglänge eines Elektrons in dem betreffenden Gase, so daß auch die Beziehung gilt

$$ap = nq\sqrt{1 + \frac{W^2}{w^2}},$$

wenn n die Anzahl Moleküle in der Raumeinheit des Gases, q den absorbierenden Querschnitt eines Moleküls, W seine mittlere Geschwindigkeit und w die lineare Geschwindigkeit des Kathodenstrahls bedeutet.[1]) Hiernach wäre bei Annäherung zur Strahlgeschwindigkeit $w = 0$ eine scheinbare, durch die molekulare Bewegung des Gases bedingte Vergrößerung des spezifischen Absorptionsvermögens zu erwarten. Daß eine solche nicht beobachtet wurde, erklärt sich dadurch, daß die scheinbare Vergrößerung des spezifischen Absorptionsvermögens bei einer Geschwindigkeit von etwa $^1/_{1000}$ Volt nur 1 Proz. beträgt und erst bei noch kleineren Strahlgeschwindigkeiten merkliche Werte annimmt. Selbst wenn der Kathodenstrahl infolge der Inhomogenität der Strahlung Elektronen in diesem Geschwindigkeitsbereich besitzt, werden diese infolge der starken Zunahme des spezifischen Absorptionsvermögens aus dem Strahle durch Absorption beseitigt und entziehen sich daher in jedem Falle der Beobachtung.

Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, daß das Absorptionsgesetz Hrn. Lenards, wie es Gleichung (7) zum Ausdruck bringt, dem Absorptionsvorgange vollkommen Rechnung trägt, obwohl man vielfach geglaubt hat, an der Richtigkeit dieses Gesetzes zweifeln zu müssen.[2]) Denn wie die Versuche gezeigt haben, entspricht nur ein exponentielles Absorptionsgesetz der Wirklichkeit, wie durch weitgehende Variation der Strahllängen und Gasdrucke gezeigt worden ist. Nirgends zeigten sich bei Vermeidung der Fehlerquellen Abweichungen,

1) O. E. Meyer, Die kin. Theorie der Gase, Math. Zusätze S. 75.
2) P. Lenard, Quant. über Kathodenstr. S. 33.

die das Gesetz in Frage gestellt hätten und die weitgehende Unabhängigkeit des spezifischen Absorptionsvermögens von Strahllänge und Gasdruck kann als ein besonderer Beweis für die Richtigkeit der Lenardschen Auffassung des Absorptionsvorganges angesehen werden.

III. *Reflexion.* Nach der Schlußweise Hrn. Akessons[1]) besitzt von den hier untersuchten Gasen namentlich Stickstoff eine ausgesprochene selektive Absorption zwischen 2 und 8 Volt, was aber in Tab. III nicht zum Ausdruck kommt. Es sei hier gleich erwähnt, daß die Beobachtungen Hrn. Akessons keine Absorptionsmessungen im eigentlichen Sinne sind; seine Methode der Beobachtung war von der hier verwendeten völlig verschieden. Es sollte daher nicht unversucht bleiben, die Messungen Hrn. Akessons in der von ihm angegebenen Weise zu wiederholen.

Dies geschah dann so, daß ein Kathodenstrahl bei konstantem Gasdruck durch Anlegen beschleunigender Felder zwischen den Blenden B_1 und B_2 (vgl. Fig. 2) auf verschiedene Geschwindigkeit gebracht wird. Die in den Käfig gelangende Strahlenmenge wird dann graphisch als Funktion der Strahlgeschwindigkeit aufgetragen.

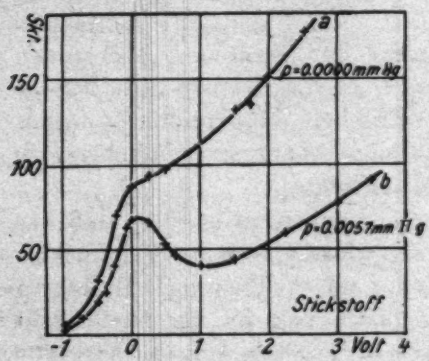


Fig. 7.

Resultate. Die Messungen Hrn. Akessons waren in erster Linie dahin zu erweitern, den Verlauf der Kurven bei verschiedenen Gasdrucken festzustellen.

Kurve a in Fig. 7 zeigt das Ergebnis einer solchen Messung, aufgenommen in Vakuum ohne Gegenfeld bei einer Strahllänge von 6,32 cm. Man erkennt, wie die Kurve der Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten entsprechend, bei verzögernden Feldern rasch gegen Null abfällt, daß aber bei beschleunigenden Feldern kein horizontaler Verlauf eintritt, wie man theoretisch

1) N. Akesson, Lunds Univ. Ars. 12. Nr. 11.

hätte erwarten können. Dies hängt offenbar mit dem Auftreten seitlicher Geschwindigkeitskomponenten im Strahle zusammen, deren Einfluß bei größeren Strahlgeschwindigkeiten durch die richtende Wirkung der beschleunigenden Felder vermindert wird.

Kurve b in Fig. 7 stellt die unter denselben Umständen erhaltenen Resultate in Stickstoff dar. Die Kurve zeigt auf den ersten Anblick große Ähnlichkeit mit der entsprechenden Kurve Hrn. Akessons[1]), nur daß dort die Lage des Minimums um etwa 2 Volt nach der Seite der größeren Geschwindigkeiten verschoben erscheint. Trotz sorgfältiger Nachprüfung der beschleunigenden Felder (Strahlgeschwindigkeit), die elektrometrisch gemessen wurden, blieb die Verschiebung der Minima bestehen.

Nimmt man mit Hrn. Akesson an, daß das Minimum der Kurve einer selektiven Absorption entspricht, so mußte dort das spezifische Absorptionsvermögen bedeutend größer erscheinen als in den benachbarten Geschwindigkeitsbereichen. Berechnet man aber aus den beiden Kurven a und b das spezifische Absorptionsvermögen[2]), so zeigt sich, daß die Werte von etwa 1 Volt aufwärts konstant sind, während bei Geschwindigkeiten unterhalb 1 Volt ein starkes Sinken des spezifischen Absorptionsvermögens eintritt, wie Tab. VII zeigt.

Tabelle VII.

Stickstoff.

Strahlgeschwindigkeit	0	0,5	1,0	2,0	3,0	Volt
Scheinbares spez. Absorptionsvermögen	8,3	19,9	29,8	30,4	30,1	cm^{-1}

Hieraus geht hervor, daß das Minimum der Kurve keiner selektiven Absorption entspricht. Man hat vielmehr die Besonderheit der Kurve nicht in dem Minimum, sondern in dem

1) N. Akesson, a. a. O. Fig. XIV; merkwürdig ist, daß Luft (vgl. Hrn. Akessons Fig. XV) kein solches Minimum zeigt.

2) Die Berechnung erfolgte nach der bekannten Formel

$$a = \frac{\ln J_1 - \ln J_2}{x\,(p_1 - p_2)}$$

wenn x die Strahllänge, J_1 die zum Drucke p_1, J_2 die zum Drucke p_2 gehörigen Intensitäten bezeichnet.

Maximum bei Geschwindigkeiten unter 1 Volt zu suchen, das einer scheinbaren Verkleinerung des absorbierenden Querschnitts bei diesen Geschwindigkeiten entspricht.

Daß die aufgefangene Strahlenmenge bei Annäherung an kleinste Strahlgeschwindigkeiten plötzlich rasch zu einem Maximum ansteigt, kann durch zweierlei Umstände bedingt sein; erstens durch ein rasches Anwachsen der in den Käfig diffundierenden Trägermenge oder aber durch eine bei diesen Geschwindigkeiten einsetzende selektive Reflexion an den Stickstoffmolekülen.

Man hat leicht zwischen den beiden Möglichkeiten zu unterscheiden. Die in den Käfig diffundierende Menge negativer Träger hängt ab vom Konzentrationsgefälle, daß infolge der Absorption des Kathodenstrahls längs des Strahlenweges entsteht, ist daher am größten, wenn die Absorption selbst am stärksten ist. Ein Anwachsen der Trägermenge könnte daher nur bedingt sein durch eine Zunahme des absorbierenden Querschnitts, wofür aber nach der im II. Teile gewonnenen Kenntnis keinerlei Anzeichen vorliegen. Jedenfalls müßte die Abnahme der Intensität infolge erhöhter Absorption die Zunahme infolge vermehrter Trägerdiffusion überwiegen, so daß in keinem Falle eine Zunahme der ankommenden Intensität zu erwarten wäre.

Es bleibt daher nur die andere Möglichkeit übrig. Die Intensität erscheint deshalb vergrößert, weil bei Geschwindigkeiten unterhalb 1 Volt in steigendem Maße eine Reflexion der Elektronen an den Stickstoffmolekülen erfolgt. Da sich die reflektierten Elektronen im wesentlichen wie Gasmoleküle von Elektronenmasse verhalten, muß längs des Strahlenwegs ein Konzentrationsgefälle reflektierter Elektronen entstehen, das sich dem Konzentrationsgefälle negativer Träger überlagert, und dessen Wirkung erhöht. Abgesehen davon, daß auch Elektronen direkt in den Käfig reflektiert werden können, muß sich jetzt durch die Diffusion reflektierter Elektronen, die infolge der geringen Elektronenmasse mit großer Geschwindigkeit erfolgt, eine erhöhte Zunahme der Intensität bemerkbar machen.

Eine hiervon kaum zu unterscheidende Möglichkeit wäre die, daß es sich um eine Wiederabtrennung echt absorbierter Elektronen von ihren Trägern handelte.[1]) Dies wäre so zu

1) Vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. **40**. S. 411. 1913.

verstehen, daß diese langsamen Elektronen zwar echt absorbiert werden, aber infolge ihrer geringen Geschwindigkeit an der Oberfläche der Stickstoffmoleküle stecken bleiben worauf dann beim folgenden Zusammenstoß des Trägers mit einem anderen Molekül Wiederausstrahlung des absorbierten Elektrons durch Nähewirkung[1]) erfolgt.

Da auch hier die Geschwindigkeit der wieder ausgestrahlten Elektronen von nur molekularer Größenordnung ist[2]), so findet in beiden Fällen — Reflexion oder Wiederausstrahlung — eine Reduktion der Strahlgeschwindigkeit nach Richtung und Größe zu ungeordneter Geschwindigkeit von molekularer Größenordnung statt. Man hat daher diese Elektronen als absorbiert zu betrachten.

Im Gegensatz zu Stickstoff zeigte Kohlensäure kein Maximum oder Minimum der aufgefangenen Strahlenmenge in dem untersuchten Geschwindigkeitsbereich. (0—6 Volt.) Wasserstoff zeigte dagegen wieder ein deutliches Maximum unterhalb 1,5 Volt, wenn auch nicht in so starkem Maße wie Stickstoff.

Die entsprechende Kurve für Helium ließ hingegen keine selektive Reflexion erkennen. Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, daß Helium überhaupt nicht reflektiert, da die Methode nur Selektiveffekte anzeigt.

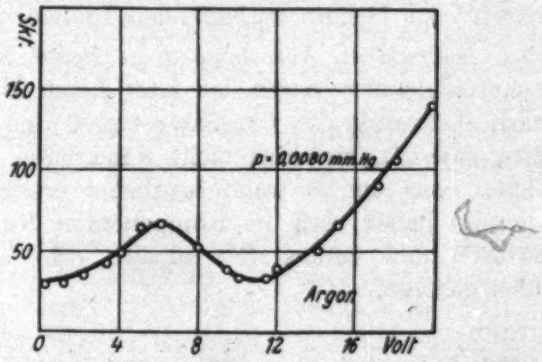


Fig. 8.

Eine gute Bestätigung des in Fig. 6 verzeichneten Ganges der Absorption in Argon mit der Geschwindigkeit zeigt Fig. 8.

1) Vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 17. S. 344. 1905.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 41. S. 78. 1913.

Die Kurve zeigt ein Maximum bei 6 Volt und ein Minimum bei 12 Volt. Dies würde anzeigen, daß bei 6 Volt eine vermehrte Absorption einsetzt, die bei 12 Volt ihr Maximum erreicht und dann wieder abnimmt, ganz so wie es auch Fig. 6 zeigt. Daß es sich hier wirklich um selektive Absorption, nicht um selektive Reflexion handelt, kann daraus geschlossen werden, daß Maximum und Minimum auch bei Anwendung von Gegenfeldern vor dem Käfig bestehen blieben, die reflektierte Strahlen beseitigt hätten.

Die im Vorstehenden gewonnene Kenntnis über die Reflexion langsamer Elektronen stimmt auf das Beste mit dem überein, was man aus anderen Beobachtungen über diesen Gegenstand weiß.[1])

So konnte Hr. Lenard aus der großen Wanderungsgeschwindigkeit negativer Elektrizitätsträger in Flammen schließen, daß diese negativen Elektrizitätsträger freie Elektronen sind, die mindestens zwei Reflexionen an Flammenmolekülen erleiden, ehe sie von einem solchen absorbiert werden, wobei als Flammenmoleküle hauptsächlich Stickstoffmoleküle oder Atome in Betracht kommen.[2])

Reflexionen von freien Elektronen an Wasserstoff- und Heliummolekülen wurde von den Herren Frank und Hertz nachgewiesen, indem sie zurückkehrende Elektronen aus einem Wasserstoff oder Helium enthaltenden Raume untersuchten.[3])

Über Reflexionen von langsamen freien Elektronen an Kohlensäuremolekülen liegen bis jetzt keine Messungen vor. Der stark elektronegative Charakter von C und O_2 läßt aber schließen, daß CO_2-Moleküle nicht reflektieren, sondern echt absorbieren, was um so wahrscheinlicher erscheint, als Versuche gezeigt haben, daß die Komponenten der Kohlensäure, Kohlenstoff[4]) und Sauerstoff[5]) zu den echt absorbierenden Molekülen gehören.

---

1) Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschw. S. 198—202.

2) P. Lenard, Heidelberger Akad. 1914. A. 17. S. 21.

3) J. Frank u. G. Hertz, Ber. d. D. Phys. Ges. 15. S. 379ff. 1913.

4) P. Lenard, Wied. Ann. 51. S. 253. 1894.

5) J. Frank, Ber. d. D. Phys. Ges. 12. S. 291, 613. 1900.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Die Geschwindigkeitsverteilung glühelektrisch ausgelöster Elektronen in engen Bündeln wird rechnerisch bestimmt, wobei die Verteilung der inneren Elektronengeschwindigkeiten als die Maxwellsche angenommen wird. Die Annahme wird durch die Versuchsergebnisse nur angenähert bestätigt; es bleiben kleine aber systematische Abweichungen zugunsten höherer Geschwindigkeiten übrig, wie es auch schon von andern Beobachtern gefunden worden ist. Es wurden dabei im Gegensatz zu diesen Beobachtern das theoretisch einfachere enge Strahlenbündel benutzt. Die Austrittsarbeit II bleibt nach dieser, sowie nach allen früheren Untersuchungen noch immer unbestimmt.

2. Das Resultat Hrn. Lenards, daß der absorbierende Querschnitt eines Moleküls unterhalb 8 Volt nahe konstant ist, wurde bis zu den allerkleinsten Geschwindigkeiten bei Wasserstoff, Stickstoff, Kohlensäure und Helium als zutreffend nachgewiesen. Dagegen zeigte Argon keine Konstanz des absorbierenden Querschnitts in diesem Bereiche. Sein spezifisches Absorptionsvermögen steigt vielmehr mit sinkender Strahlgeschwindigkeit bis zu einem Maximum bei etwa 12 Volt an; bleibt aber dann nicht konstant, sondern nimmt bei weiterer Abnahme der Strahlgeschwindigkeit bis zu einem ganz geringen Werte ab. Es zeigte sich, daß nur ein exponentielles Absorptionsgesetz den Versuchsergebnissen Rechnung trägt, wie durch weitgehende Variationen der Strahllängen und Gasdrucke dargelegt wurde, so daß die Absorptionstheorie Herrn Lenards in diesem Punkte eine gute quantitative Bestätigung erfährt.

3. Es wird nachgewiesen, daß Stickstoff, Kohlensäure, Wasserstoff und Helium keine selektive Absorption besitzen Die schon von Hrn. Akesson beobachtete Erscheinung, daß langsamere Strahlen in Stickstoff scheinbar durchdringungsfähiger als schnellere sind, entspricht keiner selektiven Absorption, wie Hr. Akesson annimmt. Vielmehr wird die Vergrößerung der Intensität bei diesen langsamen Strahlen durch Mitmessung reflektierter oder auch echt absorbierter, aber infolge Nähewirkung wieder befreiter Elektronen verursacht. Hingegen besitzt Argon eine ausgesprochene selektive Ab-

sorption in guter Übereinstimmung mit dem durch direkte Absorptionsmessungen festgestellten Gange des spezifischen Absorptionsvermögens mit der Geschwindigkeit des Kathodenstrahls.

Vorstehende Arbeit wurde in der Zeit vom S.-S. 1918 bis W.-S. 1919/20 im Radiologischen Institut der Universität Heidelberg auf Anregung und unter ständiger Leitung von Hrn. Geh. Rat Prof. Dr. Lenard ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Geh. Rat Lenard auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

(Eingegangen August 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

A[illegible]

Werkstätten für Prä[illegible]

Spezialfabrik von Luftpumpen zu [illegible]

und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-[illegible]

System Pfeiffer, D.R.P.

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neu-konstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter u. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.

Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle [illegible]

Inhalt.

Seite

1. Richard Gans. Dielektrizitätskonstante und elektrische Doppelbrechung 481
2. Carl Ramsauer. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen 513
3. R. Glocker und M. Kaupp †. Atomstruktur und Streustrahlung 541
4. Max Kirn. Die Dispersion des Wasserstoffs im Ultraviolett . 566

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 9 I.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 200 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Außerweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1921. № 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Dielektrizitätskonstante und elektrische Doppelbrechung;*

von Richard Gans.

Da es heutzutage keinem Zweifel mehr unterliegt, daß die intramolekularen Kräfte und die Wechselwirkungen zwischen den Molekeln elektrischer Natur sind, so dürfte es nützlich sein, eine eingehendere Theorie der elektrostatischen Polarisation und der elektrischen Doppelbrechung zu entwickeln, um näheren Aufschluß über den Molekularbau zu erhalten, der uns noch viel unbekannter ist als die Struktur des Atoms.

Besonders geeignet scheint für diesen Zweck die Orientierungshypothese zu sein, d. h. die Annahme, daß die Molekeln sich unter dem Einflusse der elektrischen Felder richten.

Zuerst hat Langevin[1]) diese Hypothese auf die Doppelbrechung angewandt unter der Voraussetzung, daß die Molekel ein Oszillator mit anisotroper Bindung ist. In die Theorie der Dielektrizitätskonstanten führte Debye[2]) die Richtungshypothese unter der Annahme ein, daß die Molekel bereits ein fertiges elektrisches Moment besitzt, das nicht erst durch das äußere Feld induziert wird. Hierdurch gelang es ihm, zu erklären, daß die Dielektrizitätskonstante, abgesehen vom Einflusse der Dilatation des Körpers, von der Temperatur abhängt. Er berücksichtigte dabei auch den Fall, daß das fertige elektrische Moment durch die äußere elektrische Feldstärke verändert werden kann. Denselben Mechanismus wandte Born[3]) auf die Theorie der elektrischen Doppelbrechung an.

Die verhältnismäßig spärlichen Beobachtungen der Kerr-Konstante stimmen mehr oder weniger mit der Langevinschen Theorie überein, so z. B. ihre Temperaturabhängigkeit, die Bergholm[4]) beobachtet hat, doch zeigen neuere Messungen

1) P. Langevin, Le Radium 7. S. 249. 1910.
2) P. Debye, Physik. Zeitschr. 13. S. 97. 1912.
3) M. Born, Ann. d. Phys. 55. S. 177. 1918.
4) C. Bergholm, Ann. d. Phys. 51. S. 414. 1916.

von ihm[1]) einen ausgesprochenen Gang, der sich auch nicht durch die Bornsche Verallgemeinerung erklären läßt. Deshalb schien es mir der Mühe wert, den Gründen dieser Diskrepanzen nachzugehen.

Meiner Meinung nach liegen dieselben in der Vernachlässigung der Molekularfelder, deren Berücksichtigung in der Theorie des Paramagnetismus mir gestattet hat[2]), den Temperatur- und Dichteeinfluß auf die magnetische Suszeptibilität zu erklären, wo die Langevinsche Theorie längst versagte. Daß solche Molekularfelder — als Folge des wechselseitigen Einflusses der Teilchen — vorhanden sein müssen, zeigt die Theorie und ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung auf magnetischem Gebiete, auf elektrischem scheinen dieselben auch für die Kohäsionskräfte verantwortlich zu sein.[3])

Die bisherigen Theorien bilden einen Grenzfall für hohe Temperaturen und geringe Dichte, ähnlich wie die für ideale Gase geltenden Gesetze einen richtigen Grenzfall für die Zustandsgleichung der Flüssigkeiten bilden, doch wäre es falsch, diesen Grenzfall allgemein auf Körper tiefer Temperatur und großer Dichte anwenden zu wollen.

§ 1. Die Voraussetzungen der statistischen Mechanik.

Bedeutet f die Verteilungsfunktion derjenigen Parameter, die den augenblicklichen Zustand der Molekel im Sinne der statistischen Mechanik charakterisieren, so gelten bekanntlich für den Fall des statistischen Gleichgewichts die folgenden Beziehungen

(1) $\int (\log f + 1)\, \delta f\, d\Omega = 0$ (die Entropie ein Maximum),

(2) $\int \delta f\, d\Omega = 0$ (Konstanz der Teilchenzahl),

(3) $\delta U = 0$ (Konstanz der Energie).

Bringen wir die letzte Gleichung auf die Form

(3′) $$\int w\, \delta f\, d\Omega = 0,$$

1) Vgl. R. Lundblad, Untersuchungen über die Optik der dispergierenden Medien. Upsala 1920. S. 56.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. 50. S. 163. 1916.

3) P. Debye, Physik. Zeitschr. 21. S. 178. 1920.

in der nicht etwa w gleich der Energie eines Teilchens zu sein braucht, da die Gesamtenergie ja von der Teilchenzahl und ihrer Verteilung in der verwickeltsten Weise abhängen kann (wechselseitige Energie), so folgt aus Gleichung (1), (2) und (3′)

$$\mathfrak{f} = Ce^{-\frac{w}{kT}}. \tag{4}$$

Unsere wichtigste Aufgabe wird also sein, w zu berechnen. Zu dem Zweck nehmen wir ein System von n-elektrischen Teilchen an, zu denen die respektiven Felder $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, ... $\mathfrak{e}_n$ gehören. Einige dieser Teilchen sind unsere Moleküle, andere dienen zur Erregung des äußeren elektrischen Feldes.

Das Gesamtfeld ist

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + ... + \mathfrak{e}_n \tag{5}$$

und die Energie

$$\left.\begin{aligned} U = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{e}^2\, dS = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{e}_\nu^2\, dS + \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{e}_1(\mathfrak{e}_2+\mathfrak{e}_3+\ldots+\mathfrak{e}_n)\, dS \\ + \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{e}_2(\mathfrak{e}_1+\mathfrak{e}_3+\ldots+\mathfrak{e}_n)\, dS + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Setzen wir

$$\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1' \text{ usw.}, \tag{7}$$

so schreibt sich Gleichung (6)

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{e}_\nu^2\, dS + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{e}_\nu, \mathfrak{e}_\nu')\, dS. \tag{8}$$

Die erste Summe stellt die Eigenenergien der Teilchen dar, die zweite ihre wechselseitige Energie. Diese wollen wir dadurch umformen, daß wir das Potential φ_ν' des Feldes $\mathfrak{e}_\nu'$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{e}_\nu' = -\operatorname{grad} \varphi_\nu' \tag{9}$$

einführen und partiell integrieren. Berücksichtigen wir die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{e} = 4\pi \varrho_\nu, \tag{10}$$

so folgt

$$\frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{e}_\nu, \mathfrak{e}_\nu')\, dS = \frac{1}{2}\int \varphi_\nu' \varrho_\nu'\, dS. \tag{11}$$

φ' verändert sich nur wenig im Bereiche des ν-ten Teilchens, da es das Potential des fremden Feldes $\mathfrak{e}_\nu'$ ist, also dürfen

wir φ_ν' von einem festen Punkte der Molekel aus entwickeln und erhalten

$$\varphi_\nu' = \varphi_{\nu 0}' + \left(\frac{\partial \varphi_\nu'}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \varphi_\nu'}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \varphi_\nu'}{\partial z}\right)_0 z$$

und durch Einführung des Moments $\mathfrak{p}$ mittels der Gleichungen

$$\mathfrak{p}_x = \int \varrho\, x\, dS \text{ usw.},$$

sowie Berücksichtigung der Beziehung

$$(12) \qquad \begin{cases} \int \varrho\, dS = 0, \\ \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{e}_\nu, \mathfrak{e}_\nu')\, dS = -\frac{1}{2} (\mathfrak{e}_\nu', \mathfrak{p}_\nu). \end{cases}$$

Somit ergibt Gleichung (8)

$$(13) \qquad U = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu - \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{e}_\nu', \mathfrak{p}_\nu),$$

unter u_ν die Eigenenergie des ν-ten Teilchens verstanden.

Analog berechnen wir δU, da wir diese Größe ja für die Gleichung (3) brauchen. Es ist

$$(14) \qquad \begin{cases} \delta U = \frac{1}{4\pi} \int (\mathfrak{e}, \delta \mathfrak{e})\, dS = -\frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{grad} \varphi,\ \delta \mathfrak{e})\, dS \\ \quad = \int \varphi\, \delta \varrho\, dS = \sum_{\nu=1}^{n} \int \varphi_\nu\, \delta \varrho_\nu\, dS + \sum_{\nu=1}^{n} \int \varphi_\nu'\, \delta \varrho_\nu\, dS. \end{cases}$$

Die Integrale der ersten Summe ergeben durch partielle Integration

$$(15) \qquad \int \varphi_\nu\, \delta \varrho_\nu\, dS = \frac{1}{4\pi} \int (\mathfrak{e}_\nu,\ \delta \mathfrak{e}_\nu)\, dS = \delta u_\nu,$$

während die der zweiten Summe durch analoge Umformungen wie oben $-(\mathfrak{e}_\nu',\ \delta \mathfrak{p}_\nu)$ ergeben, so daß

$$(16) \qquad \delta \quad = \sum_{\nu=1}^{n} \delta u_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{e}_\nu',\ \delta \mathfrak{p}_\nu)$$

folgt.

Die Eigenenergie eines Teilchens ändert sich nur insofern, als sein elektrisches Moment variiert, und ist eine quadratische Funktion der Komponenten des induzierten Moments, dagegen ist sie unabhängig von dem fertigen Momente.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Molekel in elektrischer Beziehung eine Figurenachse habe; in diese fällt dann das permanente Moment M. Sie sei die

ξ-Achse eines mit der Molekel fest verbundenen Koordinatensystems ξ, η, ζ. Die Komponenten des induzierten Moments seien $\mathfrak{m}_\xi$, $\mathfrak{m}_\eta$, $\mathfrak{m}_\zeta$, so daß für das Gesamtmoment $\mathfrak{p}$ gilt

$$\mathfrak{p}_\xi = M + \mathfrak{m}_\xi; \quad \mathfrak{p}_\eta = \mathfrak{m}\,; \quad \mathfrak{p}_\zeta = \mathfrak{m}_\zeta. \tag{17}$$

Dann ist

$$u = \frac{\mathfrak{m}_\xi^2}{2g} + \frac{\mathfrak{m}_\eta^2 + \mathfrak{m}_\zeta^2}{2g'} \tag{18}$$

die Eigenenergie des Teilchens.

Wir bestimmen nun den Phasenraum durch $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$, sowie durch die Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ, welche die Orientierung eines Teilchens angeben. Anstatt die Variation der Eigenenergie eines Teilchens zu berechnen und dann über alle Molekeln zu summieren, können wir die Eigenenergie, welche einem bestimmten Elemente des Phasenraums entspricht, mit der Variation der Verteilungsfunktion multiplizieren.

So erhalten wir für die erste Summe in Gleichung (16)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \delta u_\nu = \int u_\nu \, \delta f \, d\Omega,$$

wo u_ν den Wert der Gleichung (18) bedeutet.

Das zweite Glied in Gleichung (16) vereinfacht sich, indem wir zunächst annehmen, daß $\mathfrak{e}_\nu'$ am Orte aller betrachteten Molekeln denselben Wert $\mathfrak{H}$ habe, dessen Richtung in die im Raume feste z-Achse fallen möge. Wir betrachten also nur eine ausgezeichnete Gruppe von Molekeln, die dadurch gekennzeichnet ist, daß alle zu ihr gehörenden Teilchen dieselbe erregende Kraft nach Größe und Richtung besitzen. Später setzen wir uns leicht über diese Beschränkung hinweg. So wird

$$\sum (\mathfrak{e}_\nu', \delta \mathfrak{p}_\nu) = \delta (\mathfrak{H}, \sum \mathfrak{p}_\nu),$$

wenn bei der Variation $\mathfrak{H}$ als konstant gilt.

Mittels Überlegungen, die ganz analog den oben angestellten sind, ergibt sich dann, wenn wir den absoluten Wert von $\mathfrak{H}$ mit H bezeichnen,

$$\sum (\mathfrak{e}_\nu', \delta \mathfrak{p}_\nu) = H \int \mathfrak{p}_z \cdot \delta f \, d\Omega,$$

so daß

$$\delta U = \int (u - H \mathfrak{p}_z) \, \delta f \, d\Omega$$

wird, somit das w der Gleichungen (3′) und (4) die Form annimmt

$$w = \frac{\mathfrak{m}_\xi^2}{2g} + \frac{\mathfrak{m}_\eta^2 + \mathfrak{m}_\zeta^2}{2g'} - H\mathfrak{p}_z. \tag{19}$$

Die Richtungskosinus der ξ, η, ζ bezüglich der x, y, z seien durch das folgende Schema gegeben

(20)

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Dann ist nach Gleichung (17) und (20)

$$\mathfrak{p}_z = \mathfrak{m}_\xi \gamma_1 + \mathfrak{m}_\eta \gamma_2 + \mathfrak{m}_\zeta \gamma_3 + M\gamma_1. \tag{21}$$

Alle uns interessierenden Größen lassen sich aus dem Zustandsintegral

$$Z = \int \ldots \int e^{-\frac{w}{kT}} d\mathfrak{m}_x\, d\mathfrak{m}_y\, d\mathfrak{m}_z \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi$$

ableiten. Hier dürfen wir $d\mathfrak{m}_x\, d\mathfrak{m}_y\, d\mathfrak{m}_z = d\mathfrak{m}_\xi\, d\mathfrak{m}_\eta\, d\mathfrak{m}_\zeta$ setzen, da die Determinante der Koeffizienten Gleichung (20) gleich Eins ist. Die Quadraturen bezüglich $\mathfrak{m}_\xi$, $\mathfrak{m}_\eta$, $\mathfrak{m}_\zeta$, die sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, lassen sich leicht ausführen, und es folgt

$$\begin{cases} Z = (2\pi kT)^{3/2} g^{1/2} g' \\ \qquad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{H^2}{2kT}[g\gamma_1^2 + g'(\gamma_2^2+\gamma_3^2)] + \frac{HM}{kT}\gamma_1} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi \\ = (2\pi kT)^{3/2} g^{1/2} g'\, e^{\frac{H^2}{2kT}} \\ \qquad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{H^2}{2kT}(g-g')\gamma_1^2 + \frac{HM}{kT}\gamma_1} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi. \end{cases} \tag{22}$$

Setzen wir $\gamma_1 = \cos\vartheta = u$ und berücksichtigen, daß der Integrand von φ und ψ unabhängig ist, so erhalten wir schließlich

$$Z = 4\pi^2 (2\pi kT)^{3/2} g^{1/2} g'\, e^{\frac{H^2 g'}{2kT}} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{H^2}{2kT}(g-g')u^2 + \frac{HM}{kT}u}\, du. \tag{23}$$

Aus Gleichung (4) und (19) ergibt sich, daß der Mittelwert von $\mathfrak{p}_z$

$$\overline{\mathfrak{p}_z} = \frac{\int \mathfrak{p}_z\, e^{-\frac{w}{kT}}\, d\Omega}{\int e^{-\frac{w}{kT}}\, d\Omega} = \frac{\partial}{\partial B} \log Z \tag{24}$$

ist, wenn zur Abkürzung

$$B = \frac{H}{kT} \tag{25}$$

gesetzt ist. In Gleichung (23) ist natürlich überall H gemäß Gleichung (25) zu ersetzen. Wohl aber kann man nach Gleichung (24) einen von B unabhängigen multiplikativen Faktor in Z unterdrücken, so daß zur Berechnung von $\overline{\mathfrak{p}_z}$ die Gleichungen gelten

$$\overline{\mathfrak{p}_z} = \frac{\partial \log X}{\partial B}; \quad X = e^{g'\frac{kT}{2}B^2} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{(g-g')kT}{2}B^2u^2 + BMu}\, du. \tag{26}$$

Der des weiteren wichtige Mittelwert über $\gamma_1^2 = u^2$ ist nach Gleichung (23)

$$\overline{u^2} = \frac{\partial \log Y}{\partial C}; \quad Y = \int_{-1}^{+1} e^{Cu^2 + \frac{HM}{kT}u}\, du; \quad C = \frac{H^2(g-g')}{2kT}. \tag{27}$$

Dieser Ausdruck wird für den Fall isotroper Bindungen unbrauchbar ($g = g'$; $C = 0$). Dann ersetzen wir ihn (vgl. Gleichung (23)) durch

$$\overline{u^2} = \frac{1}{M^2 Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial B^2}; \quad Y = \int_{-1}^{+1} e^{BMu}\, du. \tag{27'}$$

Der Spezialfall, daß kein fertiges Moment in der Molekel existiert, ergibt sich leicht, in dem man in Gleichung (26) und (27) $M = 0$ setzt. Der andere Grenzfall, daß das induzierte Moment neben dem permanenten zu vernachlässigen ist, entspricht $g = g' = 0$ in Gleichung (26) und läßt u^2 nach Gleichung (27') berechnen.

§ 2. Die Doppelbrechung.

Die Polarisation $\mathfrak{P}$ der Volumeinheit, die zur Ermittlung der Dielektrizitätskonstanten dient, folgt aus Gleichung (26)

$$P = N \frac{\partial \log X}{\partial B}, \tag{28}$$

unter N die Anzahl Teilchen in der Volumeinheit verstanden.

Um die elektrische Doppelbrechung zu berechnen, nehmen wir an, daß $\mathfrak{E}'$ die erregende Kraft der optischen Welle sei und $\mathfrak{q}$ das durch dieselbe in einer Molekel erzeugte Moment. Dann gilt

$$\mathfrak{q}_\xi = h\,\mathfrak{E}_\xi'; \quad \mathfrak{q}_\eta = h'\,\mathfrak{E}_\eta'; \quad \mathfrak{q}_\zeta = h'\,\mathfrak{E}_\zeta'. \tag{29}$$

Hier sind h und h' von der Schwingungszahl n abhängige Konstanten, die für $n = 0$ in g bzw. g' übergehen.

Hat die erregende Kraft $\mathfrak{E}'$ die Richtung der z-Achse, so gilt gemäß dem Schema (20) und den Gleichungen (29)

$$\mathfrak{q}_\xi = h\,\mathfrak{E}_z'\,\gamma_1; \quad \mathfrak{q}_\eta = h'\,\mathfrak{E}_z'\,\gamma_2; \quad \mathfrak{q}_\zeta = h'\,\mathfrak{E}_z'\,\gamma_3.$$

Multipliziert man diese Gleichungen bzw. mit γ_1, γ_2, γ_3 und addiert, so ergibt sich

$$\mathfrak{q}_z = \mathfrak{E}_z'[h' + (h - h')\,\gamma_1^2]$$

oder

$$\mathfrak{Q}_z = \mathfrak{E}_z'\,N[h' + (h - h')\,\overline{\gamma_1^2}]. \tag{30}$$

Da aber

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{Q} \tag{31}$$

und

$$4\pi\,\mathfrak{Q}_z = (m_2^2 - 1)\,\mathfrak{E}_z \tag{32}$$

ist (m_2 Brechungsexponent für elektrische Schwingungen $\parallel z$), so ergibt sich mit der Abkürzung

$$k_2 = N[h' + (h - h')\,\overline{\gamma_1^2}], \tag{33}$$

$$\mathfrak{Q}_z = k_2\left(\mathfrak{E}_z + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{Q}_z\right),$$

d. h.

$$m_2^2 - 1 = \frac{4\pi k_2}{1 - \frac{4\pi}{3}k_2}$$

oder

$$\frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 + 2} = \frac{4\pi k_2}{3}. \tag{34}$$

Ist dagegen die erregende Kraft der optischen Schwingung parallel der x-Achse, so gilt

$$\mathfrak{q}_\xi = h\,\mathfrak{E}_x'\,\alpha_1; \quad \mathfrak{q}_\eta = h'\,\mathfrak{E}_x'\,\alpha_2; \quad \mathfrak{q}_\zeta = h'\,\mathfrak{E}_x'\,\alpha_3.$$

Multipliziert man diese Gleichungen bzw. mit α_1, α_2, α_3 und addiert, so erhält man analog wie oben

$$\mathfrak{q}_x = \mathfrak{E}_x'[h' + (h - h')\,\overline{\alpha_1^2}]$$

und schließlich (m_1 Brechungsexponent für elektrische Schwingungen $\| x$)

$$\frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} k_1, \tag{34'}$$

wo k_1 eine Abkürzung für

$$k_1 = N[h' + (h - h')\,\overline{a_1^2}] \tag{33'}$$

ist. Führen wir schließlich die Größe φ durch die Beziehung

$$\overline{\gamma_1}^2 = \frac{1}{3} + \varphi; \quad \overline{\alpha_1^2} = \overline{\beta_1^2} = \frac{1 - \overline{\gamma_1^2}}{2} = \frac{1}{3} - \varphi \tag{35}$$

ein, so wird

$$\begin{cases} k_1 = N\left[\dfrac{h + 2h'}{3} - \dfrac{h - h'}{2}\varphi\right], \\ k_2 = N\left[\dfrac{h + 2h'}{3} + (h - h')\varphi\right]. \end{cases} \tag{36}$$

Existiert kein elektrostatisches Feld, so ist $\overline{\gamma_1^2} = 1/3$, also $\varphi = 0$ und

$$\frac{m_0^2 - 1}{m_0^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} k_0; \quad k_0 = N\frac{h + 2h'}{3}, \tag{37}$$

unter m_0 den Brechungsexponenten außerhalb des Felde verstanden.

Da $m_1 - m_0$ und $m_2 - m_0$ nur kleine Größen sind, so ergibt sich mit hinreichender Näherung für die relative Doppelbrechung

$$m_2^2 - m_1^2 = \frac{4\pi}{3} \frac{(m_0^2 + 2)(k_2 - k_1)}{1 - \frac{4\pi}{3} k_0} = \frac{2\pi}{3} N(m_0^2 + 2)^2 (h - h')\varphi$$

oder

$$m_2 - m_1 = \frac{\pi N (m_0^2 + 2)^2}{3 m_0} (h - h')\varphi, \tag{38}$$

während das Verhältnis der absoluten Doppelbrechungen den Wert hat

$$\frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0} = \frac{k_2 - k_0}{k_1 - k_0} = -2. \tag{39}$$

Nun findet zwar Aeckerlein[1]) bei Nitrobenzol diesen theoretischen Wert, dem stehen aber neuere Messungen von Himstedt[2]) gegenüber, der bei verschiedenen Stoffen stets den Wert -4 fand, ohne die Abweichung durch Berück-

1) G. Aeckerlein, Physik. Zeitschr. 7. S. 594. 1906.
2) F. Himstedt, Ann. d. Phys. 48. S. 1061. 1915.

sichtigung der Elektrostriktion erklären zu können. Dagegen scheinen besondere Beobachtungen darauf hinzuweisen, daß Aeckerlein infolge der Leitfähigkeit der Substanz, mit welcher er arbeitete, einen kleineren Wert erhalten hat, und daß der richtige Wert für vollkommen isolierende Stoffe -4 ist.

Daß sich dieser experimentell beobachtete Wert -4 durch die Orientierungshypothese nicht erklären läßt, scheint einstweilen ihre schwächste Seite zu sein.

§ 8. Das molekulare Feld.

Die erregende Kraft der Molekel setzt sich vektoriell zusammen aus der geordneten erregenden Kraft

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}, \tag{40}$$

welche die durch das elektrostatische Feld definierte Vorzugsrichtung hat (z-Achse), und dem molekularen Felde $\mathfrak{A}$, so daß

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{K} + \mathfrak{A} \tag{41}$$

ist. Für das molekulare Feld $\mathfrak{A}$ gelten folgende früher[1]) abgeleiteten Sätze.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Komponenten von $\mathfrak{A}$ zwischen den Werten A_x und $A_x + dA_x$; A_y und $A_y + dA_y$; A_z und $A_z + dA_z$ liegen, ist

$$W\, dA_x\, dA_y\, dA_z = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 a_{11} a_{22} a_{33}}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{A_x^2}{a_{11}} + \frac{A_y^2}{a_{22}} + \frac{A_z^2}{a_{33}}\right)} dA_x\, dA_y\, dA_z. \tag{42}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Mittelwerte

$$\overline{A_x} = \overline{A_y} = \overline{A_z} = \overline{A_y A_z} = \overline{A_z A_x} = \overline{A_x A_y} = 0, \tag{43}$$

$$\overline{A_x^2} = a_{11};\quad \overline{A_y^2} = a_{22};\quad \overline{A_z^2} = a_{33}. \tag{44}$$

Ferner ist[2])

$$a_{11} = C\left(\overline{p^2} + \frac{\overline{p_x^2}}{3}\right);\quad a_{22} = C\left(\overline{p^2} + \frac{\overline{p_y^2}}{3}\right);\quad a_{33} = C\left(\overline{p^2} + \frac{\overline{p_z^2}}{3}\right), \tag{45}$$

wo

$$C = \frac{4\pi}{5}\,\frac{N}{s^3} \tag{46}$$

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **50**. S. 163. 1916.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 331. 1920. Gleichung (21).

ist, unter N die Anzahl Teilchen pro Volumeinheit, unter s den kleinsten Abstand verstanden, auf den sich die Mittelpunkte zweier Teilchen nähern können.

Haben wir bisher H als konstant nach Größe und Richtung aufgefaßt, so bedeutet das, daß wir nur die Molekeln betrachtet haben, in denen $\mathfrak{A}$ eine bestimmte Größe und Richtung hat. Wir haben auf diese Weise $\overline{p_H}$, d. h. den Mittelwert der Momentenkomponente in Richtung von H, genommen über diese ausgezeichnete Gruppe, berechnet.

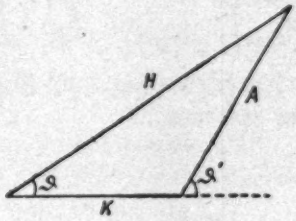


Fig. 1.

Wir müssen diesen Wert also mit $\cos\vartheta$ (Fig. 1) multiplizieren, und zwar ergibt sich aus der Figur

$$A^2 = H^2 + K^2 - 2HK\cos\vartheta,$$

d. h.

$$\cos\vartheta = \frac{H^2 + K^2 - A^2}{2HK}. \tag{47}$$

Multiplizieren wir dann noch mit $NW\,dA_x\,dA_y\,dA_z$, so erhalten wir die Polarisation P. Es ist also

$$P = N\int\int\int W\,\mathfrak{p}_H\,\frac{H^2 + K^2 - A^2}{2HK}\,dA_x\,dA_y\,dA_z. \tag{48}$$

Analog liegt der Fall bei Ermittlung des Wertes $\overline{\gamma_1^2}$, der für die elektrische Doppelbrechung in Frage kommt.

Nachdem wir $\overline{u^2}$, d. h. den Mittelwert der Quadrate der Richtungskosinus der Figurenachsen der Molekeln und H berechnet haben, müssen wir zu dem entsprechenden Werte $\overline{\gamma^2}$ bezüglich der Richtung K übergehen.

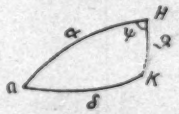


Fig. 2.

Die Ecken des sphärischen Dreiecks Fig. 2 stellen die Durchstoßpunkte der Molekelachse a sowie der Vektoren H und K dar. Es gilt also

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\vartheta - \sin\alpha\sin\vartheta\cos\psi. \tag{49}$$

Durch Quadrieren und Mittelwertbilden bezüglich aller Molekeln der ausgezeichneten Gruppe erhalten wir

$$\cos^2\delta = \overline{\cos^2\alpha}\cos^2\vartheta + \overline{\sin^2\alpha\cos^2\psi}\sin^2\vartheta. \tag{50}$$

Nun ist aber $\overline{\cos^2\alpha} = \overline{u^2}$; $\overline{\sin^2\alpha\cos^2\psi} = \frac{1}{2}(1 - \overline{u^2})$, also

$$\cos^2\delta = \overline{u^2}\cos^2\vartheta + \frac{1 - \overline{u^2}}{2}\sin^2\vartheta, \tag{51}$$

so daß

$$(52)\quad \begin{cases} \overline{\gamma_1^2} = \int\int\int \cos^2\delta\, W\, dA_x\, dA_y\, dA_z \\ \quad = \int\int\int W\left[\left(\overline{u^2} - \frac{1}{3}\right)\frac{3}{2}\cos^2\vartheta + \frac{1-\overline{u^2}}{2}\right] dA_x\, dA_y\, dA_z \end{cases}$$

und

$$(53)\quad \begin{cases} \varphi = \overline{\gamma_1^2} - \frac{1}{3} \\ \quad = \int\int\int \frac{3}{2} W\left(\overline{u^2} - \frac{1}{3}\right)\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) dA_x\, dA_y\, dA_z \end{cases}$$

wird (vgl. Gleichung (35)). Hier ist $\cos\vartheta$ durch Gleichung (47) zu ersetzen.

Bei diesen Berechnungen genügt es, in P die erste, in φ die zweite Potenz von K noch zu berücksichtigen.

Anstatt sofort den allgemeinsten Fall von Molekeln mit festen Momenten, die zu gleicher Zeit induzierbar sind, d. h. durch äußere Kräfte ihr Moment verändern, zu behandeln, ziehen wir es vor, in dieser Arbeit die wichtigsten Spezialfälle zu erledigen.

§ 4. Molekeln anisotroper Bindung ohne feste Momente.

Zunächst wollen wir uns mit dem Falle beschäftigen, daß die Molekeln kein fertiges Moment haben, d. h. daß $M = 0$ ist. Dann wird nach Gleichung (26)

$$(54)\qquad X = e^{g'\frac{kT}{2}B^2} \int_{-1}^{+1} e^{(g-g')\frac{kT}{2}B^2 u^2}\, du.$$

Da aber K unendlich klein ist und für $K = 0$ überhaupt keine Momente vorhanden sind, da andrerseits in dem in diesem Paragraphen behandelten Falle die Komponenten von A der Größe K proportional, d. h. auch unendlich klein sind (vgl. Gleichung (44) und (45)), so wird nach Gleichung (41) H und somit auch nach Gleichung (25) B unendlich klein. Wir dürfen also die Exponentialfunktionen in Gleichung (54) auf die ersten beiden Glieder ihrer Reihenentwicklung beschränken und erhalten

$$(55)\quad \begin{cases} X = 2\left(1 + \frac{g'kT}{2}B^2\right)\left(1 + \frac{(g-g')kT}{6}B^2\right) \\ \qquad = 2\left(1 + \frac{kT}{2}B^2\frac{g+2g'}{3}\right), \end{cases}$$

also nach Gleichung (28) mit Benutzung von Gleichung (25)

$$p_H = \frac{g + 2g'}{3} H. \tag{56}$$

Da $K \parallel z$ ist, gilt

$$H_x = A_x; \quad H_y = A_y; \quad H_z = K + A_z,$$

somit

$$H^2 = A^2 + K^2 + 2 K A_z, \tag{57}$$

und da nach Gleichung (43) $\overline{A_z} = 0$ ist, ergibt Gleichung (48)

$$P = N \frac{g + 2g'}{3} K, \tag{58}$$

woraus mittels Gleichung (40) und der Beziehung $P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E$ die Lorentz-Lorenzsche Gleichung

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{g + 2g'}{3} N \tag{59}$$

folgt. Dieser Ausdruck ist also der Dichte proportional und von der Temperatur nur insofern abhängig, als es die Dichte ist.

Zur Berechnung der elektrischen Doppelbrechung gehen wir vom Integral

$$Y = \int_{-1}^{+1} e^{Cu^2} du \tag{60}$$

aus (vgl. Gleichung (27)), in dem C als sehr klein anzusehen ist, so daß

$$Y = \int_{-1}^{+1} \left(1 + Cu^2 + \frac{C^2}{2} u^4\right) du = 2\left(1 + \frac{C}{3} + \frac{C^2}{10}\right) \tag{61}$$

und

$$\log Y = \log 2 + \frac{C}{3} + \frac{2}{45} C^2 \tag{61'}$$

wird. Somit ergibt sich aus Gleichung (27)

$$\overline{u^2} = \frac{\partial \log Y}{\partial C} = \frac{1}{3} + \frac{2}{45} \frac{H^2}{kT} (g - g') \tag{62}$$

und nach Gleichung (53)

$$\varphi = \frac{g - g'}{15 kT} \int\int\int H^2 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right) W \, dA_x \, dA_y \, dA_z. \tag{63}$$

Mittels Gleichungen (47) und (57) ergibt sich hieraus

$$\varphi = \frac{g-g'}{15kT}\iiint\left[(K+A_z)^2 - \frac{1}{3}(A^2+K^2+2KA_z)\right] W\,dA_x\,dA_y\,dA_z$$

und unter Berücksichtigung von Gleichungen (43) und (44)

$$\varphi = \frac{2(g-g')}{45kT}(K^2 + a_{33} - a_{11}). \tag{64}$$

Es ist also diese Differenz $a_{33} - a_{11}$ zu bestimmen. Nun ist

$$p_\xi = g' H_\xi = g'(K_\xi + A_\xi),$$
$$p_\eta = g' H_\eta = g'(K_\eta + A_\eta),$$
$$p_\zeta = g' H_\zeta = g'(K_\zeta + A_\zeta).$$

Daraus folgt mit Benutzung des Schemas (20) und unter Beachtung, daß K die Richtung der z-Achse hat,

$$\begin{cases} p_x = g'A_x + (g-g')K\alpha_1\gamma_1 + (g-g')(A_x\alpha_1 + A_y\beta_1 + A_z\gamma_1)\alpha_1, \\ p_y = g'A_y + (g-g')K\beta_1\gamma_1 + (g-g')(A_x\alpha_1 + A_y\beta_1 + A_z\gamma_1)\beta_1, \\ p_z = g'A_z + (g-g')K\gamma_1^2 + (g-g')(A_x\alpha_1 + A_y\beta_1 + A_z\gamma_1)\gamma_1 \\ \qquad\qquad + g'K. \end{cases} \tag{65}$$

Berechnen wir p_x^2 und p_z^2, bilden die Mittelwerte, benutzen die Gleichungen (43) und (44), und berücksichtigen, daß K^2 schon unendlich klein ist, die Richtungskosinus α_1, β_1, γ_1 also für $K=0$, d. h. für den Fall der gleichförmigen Achsenverteilung, genommen werden dürfen, so daß

$$\overline{\gamma_1} = 0; \quad \overline{\alpha_1\gamma_1} = \overline{\beta_1\gamma_1} = 0; \quad \overline{\alpha_1^2} = \overline{\beta_1^2} = \overline{\gamma_1^2} = \frac{1}{3};$$
$$\overline{\alpha_1^2\gamma_1^2} = \overline{\beta_1^2\gamma_1^2} = \frac{1}{15}; \quad \overline{\gamma_1^4} = \frac{1}{5},$$

so erhalten wir unter Einführung einer schon in einer anderen Arbeit[1]) benutzten Abkürzung

$$B = g'^2 + \frac{2}{3}g'(g-g') + \frac{2}{15}(g-g')^2, \tag{66}$$

$$\begin{cases} \overline{p_x^2} = B\,a_{11} + \dfrac{(g-g')^2}{15}(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \\ \overline{p_z^2} = B(K^2 + a_{33}) + \dfrac{(g-g')^2}{15}(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}), \end{cases} \tag{67}$$

so daß

$$\overline{p_z^2} - \overline{p_x^2} = B(K^2 + a_{33} - a_{11}). \tag{68}$$

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 331. 1920. Gleichung (33).

Da nun nach Gleichung (45)

$$a_{33} - a_{11} = \frac{C}{3}\left(\overline{p_z^2} - \overline{p_x^2}\right), \tag{69}$$

so ergibt die Elimination von $\overline{p_z^2} - \overline{p_x^2}$

$$a_{33} - a_{11} = \frac{\frac{BC}{3} K^2}{1 - \frac{BC}{3}}; \quad K^2 + a_{33} - a_{11} = \frac{K^2}{1 - \frac{BC}{3}}. \tag{70}$$

Es folgt also aus Gleichung (64)

$$\varphi = \frac{2(g - g')K^2}{45kT\left(1 - \frac{BC}{3}\right)}. \tag{71}$$

Nun ist

$$K = E + \frac{4\pi}{3} P = \frac{\varepsilon + 2}{3} E,$$

also ergibt sich aus Gleichung (38) für die Kerr-Konstante (λ_0 Wellenlänge im Vakuum)

$$Q = \frac{m_2 - m_1}{\lambda_0 E^2} = \frac{2\pi N}{1215\lambda_0}(g - g')(h - h') \frac{(\varepsilon + 2)^2 (m_0^2 + 2)^2}{m_0 kT\left(1 - \frac{BC}{3}\right)}. \tag{72}$$

Für Gase, die merklich der Maxwellschen Beziehung $m_0^2 = \varepsilon$ genügen, ist $g = h$; $g' = h'$, und da genähert $\varepsilon = 1$; $m_0 = 1$ ist, folgt für die Kerr-Konstante

$$\begin{cases} Q = \frac{2\pi N_0^2}{15\lambda_0} (g - g')^2 \frac{D}{RT\mu} = \frac{2\pi N_0^2 d_0}{15\mu R 273} \cdot \frac{p}{p_0(1 + \alpha t)} \frac{(g - g')^2}{\lambda_0} \\ \qquad = 3{,}137 \cdot 10^{33} \frac{p}{p_0(1 + \alpha t)} \frac{(g - g')^2}{\lambda_0}, \end{cases} \tag{72'}$$

wo $\frac{Nu}{D} = N_0$ die Loschmidtsche Zahl (Molekelzahl pro Mol) bedeutet, unter μ das Molekulargewicht verstanden. Diese Formel erlaubte uns[1]), $|g - g'|$ für CO_2 zu berechnen in sehr guter Übereinstimmung mit dem Wert, welchen die Depolarisation des Tyndall-Lichtes ergab.

Die allgemeiner gültige Gleichung (72) unterscheidet sich von der von Langevin (a. a. O.) abgeleiteten (nach Verbesserung eines Irrtums im Zahlenfaktor) nur durch den Faktor $1 - \frac{BC}{3}$ im Nenner, und geht für sehr kleine Dichten ($\lim C = 0$) in die Langevinsche über.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. (im Druck).

Um der Beziehung (72) die Form zu geben, die der in der Literatur häufiger gebrauchten am nächsten kommt, berücksichtigen wir, daß nach Gleichung (59) bzw. (37)

$$\varepsilon + 2 \sim \frac{\varepsilon - 1}{N}; \quad m_0^2 + 2 \sim \frac{m_0^2 - 1}{N}$$

ist. Somit muß

$$(73) \qquad R = \frac{Q m_0 N T}{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)(m_0^2 - 1)(m_0^2 + 2)} = \frac{R_0}{1 - \frac{BC}{3}}$$

werden, wo R_0 eine Konstante ist. Da C der Dichte D proportional ist (vgl. Gleichung (46)), so läßt sich Gleichung (73) in der Form

$$(74) \qquad R = \frac{R_0}{1 - a D}$$

schreiben, unter a eine Konstante verstanden. R_0 bedeutet den Wert von R für verschwindende Dichte.

Es gilt also bei dem in diesem Paragraphen angenommenen Mechanismus, daß R von der Temperatur nur insofern abhängt, als die Dichte dies tut, die in Gleichung (74) eingeht. Nicht aber gilt $R = R_0$, wie man bisher geglaubt und an den Messungen geprüft hat[1]), und wie es auch aus der Langevinschen Theorie folgen würde, die nur für unendlich kleine Dichten gilt.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Orientierungshypothese bei Molekeln ohne feste Momente

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{1}{D} = \text{Const}; \quad R = \frac{R_0}{1 - a D}$$

und im Grenzfalle unendlich kleiner Dichte (nicht konzentrierte Gase)

$$\frac{\varepsilon - 1}{D} = \text{Const}; \quad R = R_0$$

geben müßte.

Bei den Flüssigkeiten, die Bergholm neuerdings untersucht hat[2]), nimmt R mit wachsender Temperatur zu. Dies Verhalten erklärt sich nicht durch Gleichung (74), d. h. bei diesen Flüssigkeiten muß der Mechanismus ein anderer sein.

---

1) C. Bergholm, Ann. d. Phys. 51. S. 414. 1916.

2) Vgl. R. Lundblad, Untersuchungen über die Optik der dispergierenden Medien. Upsala 1920. S. 56.

§ 5. Molekeln mit festen, nicht induzierbaren Momenten.

Wir gehen deshalb zu der Annahme über, daß die Molekel ein festes Moment M besitzt, welches auch durch die äußeren Feldstärken nicht merklich verändert werden kann. Natürlich kann die Konstanz des Moments nicht mit absoluter Genauigkeit gelten, denn sonst würden ja auch die Lichtschwingungen keine Wirkung auf die Molekel haben, d. h. Brechung und Kerr-Effekt wären Null. Wohl aber kann das fertige Moment bezüglich der elektrostatischen Orientierung so überwiegen, daß wir in diesem Sinne die Molekel nicht induzierbar nennen dürfen.

Die Ermittlung der Dielektrizitätskonstanten macht gar keine Mühe, denn das analoge Problem der Berechnung der paramagnetischen Suszeptibilität haben wir bereits durchgeführt[1]) und brauchen deshalb jene Ergebnisse nur elektrisch zu deuten.

Wir fanden damals, daß die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{4NM}{3\sqrt{\pi}A_0}\psi\left(\frac{kT}{MA_0}\right)$$

ist. Daraus schließen wir, daß jetzt

$$P = \frac{4NM}{3\sqrt{\pi}A_0}\psi\left(\frac{kT}{MA_0}\right)K \tag{75}$$

gesetzt werden muß, woraus

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{16\sqrt{\pi}NM}{9A_0}\psi\left(\frac{kT}{MA_0}\right) \tag{76}$$

folgt. Hier bedeutet N die Anzahl Teilchen in der Volumeinheit, M das Moment der Molekel, T die absolute Temperatur

$$A_0 = \frac{4M}{3}\sqrt{\frac{\pi N}{s^3}} \tag{77}$$

das wahrscheinlichste Molekularfeld, s den kleinstmöglichen Abstand der Mittelpunkte zweier Teilchen und $\psi(\tau)$ eine Funktion von

$$\tau = \frac{kT}{MA_0}, \tag{78}$$

die wir berechnet und tabellarisch niedergelegt haben (a. a. O. S. 177). Es ergab sich

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **50**. S. 163. 1916. Formeln (31) und (36).

Tabelle 1.

τ	ψ	$\tau\psi$	τ	ψ	$\tau\psi$
0,0	1,0000	0,0000	3,3333	0,1310	0,4367
0,1	0,9115	0,09115	4,0	0,1097	0,4388
0,2	0,8249	0 1650	5,0	0,08806	0,4403
0,25	0,7825	0,1956	8,0	0,05526	0,4421
0,5	0,6013	0,3006	10	0,04425	0,4425
1,0	0,3867	0,3867	15	0,02953	0,4429
1,25	0,3231	0,4039	20	0,02215	0,4430
1,4286	0,2883	0,4119	25	0,01773	0,4431
1,6667	0,2516	0,4193	30	0,01477	0,4431
2,0	0,2131	0,4262	∞	0,00000	0,4431
2,5	0,1727	0,4317			
3,0	0,1451	0,4353			

Für kleine Werte von τ gilt die Reihe (a. a. O. Gleichung (46))

$$\psi = 1 - \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{60}(\pi\tau)^4 - \frac{1}{126}(\pi\tau)^6 + \frac{1}{240}(\pi\tau)^8 - \ldots, \tag{79}$$

während wir für große Argumente haben (a. a. O. Gleichung (50))

$$\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{4\tau}\left(1 - \frac{1}{6\tau^2} + \frac{1}{18\tau^4} - \frac{1}{40\tau^6} + \ldots\right). \tag{80}$$

Multiplizieren wir beide Seiten von Gleichung (76) mit T/N, so erhalten wir unter Berücksichtigung von Gleichung (78)

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{T}{N} = \frac{16\sqrt{\pi}}{9k} M^2 \tau\,\psi(\tau). \tag{81}$$

τ ist nach Gleichung (77) und (78) der absoluten Temperatur direkt und der Wurzel aus der Dichte umgekehrt proportional. Im allgemeinen ist also $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{T}{D}$ eine Funktion von $\frac{T}{\sqrt{D}}$, die aber für große τ, d. h. hohe Temperaturen und geringe Dichten in eine Konstante übergeht. Fig. 3 stellt $\tau\psi(\tau)$ als Funktion von τ, d. h. den Verlauf von $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{T}{D}$ in seiner Abhängigkeit von $\frac{T}{\sqrt{D}}$ dar.

Hat ein nicht komprimiertes Gas den in diesem Paragraphen behandelten Mechanismus, so muß für dasselbe $\varepsilon - 1$ proportional D/T sein.

Auf dem Gebiete des Paramagnetismus, in dem es sich ausschließlich um reine Orientierung fester Momente handelt,

hat sich unsere Formel durchaus bewährt. Bei den Dielektrizitätskonstanten liegt nur ein verhältnismäßig spärliches Material vor. Zum Teil liegen hier die Verhältnisse verwickelter, weil bei manchen Stoffen die festen Momente durch die äußeren Felder verändert werden[1]) (vgl. den nächsten Paragraphen) und häufiger auch Assoziationen der Molekeln vorkommen.[2])

Falls sich für bestimmte Stoffe die Richtigkeit der Formel (81) herausstellen sollte, ließen sich die molekularen Konstanten M und A_0 aus dem Temperaturverlauf ermitteln.

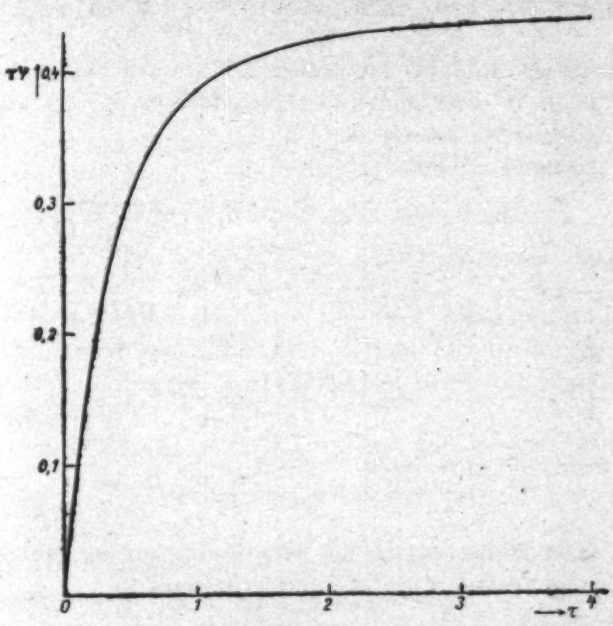


Fig. 8.

Um die Kerrkonstante unter den Voraussetzungen dieses Paragraphen zu berechnen, gehen wir von den Gleichungen (27′) aus und erhalten

$$Y = \int_{-1}^{+1} e^{h u}\, d u = \frac{2 \operatorname{Sin} h}{h}, \tag{82}$$

wenn

$$h = B M = \frac{H M}{k T} \tag{83}$$

1) P. Debye, Physik. Zeitschr. **13**. S. 97. 1912.
2) M. Jona, Physik. Zeitschr. **20**. S. 14. 1919.

gesetzt ist, und

$$\overline{u^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dh^2} = 1 - \frac{2}{h} L(h), \tag{84}$$

wo $L(h)$ die in der Theorie des Paramagnetismus viel benutzte Funktion

$$L(h) = \mathfrak{Ctg}\, h - \frac{1}{h} \tag{85}$$

bedeutet; also ergibt sich aus Gleichung (53)

$$\varphi = \iiint \left[1 - \frac{3}{h} L(h)\right] \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right) W\, dA_x\, dA_y\, dA_z. \tag{86}$$

Um dieses Integral auswerten zu können, haben wir zunächst die in W vorkommenden Konstanten a_{11}, a_{22}, a_{33} (vgl. Gleichung (42)) zu berechnen.

Es ist nach Schema (20)

$$p_x = M\alpha_1; \quad p_y = M\beta_1; \quad p_z = M\gamma_1,$$

somit nach Gleichung (45)

$$\begin{cases} a_{11} = CM^2\left(1 + \frac{\overline{\alpha_1^2}}{3}\right); \quad a_{22} = CM^2\left(1 + \frac{\overline{\beta_1^2}}{3}\right); \\ a_{33} = CM^2\left(1 + \frac{\overline{\gamma_1^2}}{3}\right), \end{cases} \tag{87}$$

also

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = \frac{10}{3} CM^2. \tag{88}$$

In erster Näherung dürfen wir die Achsen der Molekeln als gleichförmig verteilt ansehen und erhalten

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{10}{9} CM^2. \tag{89}$$

Indem wir diesen Wert

$$\frac{10}{9} CM^2 = \frac{A_0^2}{2} \tag{90}$$

setzen, also ein mittleres Molekularfeld A_0 einführen, ergibt sich nach Gleichung (42) und (86)

$$\begin{cases} \varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \left[1 - \frac{3}{h} L(h)\right] \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right) \\ \qquad \sin \vartheta'\, d\vartheta' \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} \frac{A^2}{A_0^2} d\left(\frac{A}{A_0}\right). \end{cases} \tag{91}$$

Hier ist (vgl. Fig. 1) ϑ' der Winkel, den der Vektor A mit der z-Achse ($= K$-Richtung) bildet. Aus Fig. 1 folgt ferner

$$H^2 = K^2 + A^2 + 2\,A\,K\cos\vartheta';$$

also

$$-\frac{H\,dH}{A\,K} = \sin\vartheta'\,d\vartheta',$$

und den Grenzen $\vartheta' = 0$ und $\vartheta' = \pi$ entsprechen die Grenzen $H = A + K$ bzw. $H = A - K$. Ferner können wir $\cos\vartheta$ durch Gleichung (47) ersetzen, so daß

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 e^{-\left(\frac{A}{A_0}\right)^2} d\left(\frac{A}{A_0}\right) \int_{A-K}^{A+K}\left[1 - \frac{3}{h}L(h)\right] \\ \left\{\left(\frac{H^2+K^2-A^2}{2HK}\right)^2 - \frac{1}{3}\right\}\frac{H\,dH}{A\,K}.\end{aligned}\right.$$

Das innere Integral

$$(93)\quad \Phi = \int_{A-K}^{A+K}\left[1 - \frac{3}{h}L(h)\right]\left\{\left(\frac{H^2+K^2-A^2}{2HK}\right)^2 - \frac{1}{3}\right\}\frac{H\,dH}{A\,K}$$

vereinfacht sich wesentlich, da wir das Resultat nur bis auf die zweiten Potenzen von K haben wollen. Eine einfache Rechnung ergibt

$$(94)\quad \Phi = \frac{4}{15}\frac{K^2}{A^2}\left[1 - 3L'(a) - a\,L''(a)\right] = \frac{4}{15}\frac{K^2}{A^2}\,\Omega(a),$$

unter a den Wert

$$(95)\quad a = \frac{M\,A}{k\,T}$$

verstanden. Aus Gleichung (85) folgt, daß

$$(96)\quad \Omega(a) = 1 - 3L' - a\,L'' = 1 - L' - \frac{2a}{\mathfrak{Sin}^2 a}L$$

ist, so daß, wenn wir in Gleichung (92) $\frac{A}{A_0} = z$ setzen,

$$(97)\quad \varphi = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\frac{K^2}{A_0^2}\int_0^\infty e^{-z^2} dz\,\Omega\left(\frac{z}{\tau}\right)$$

sich ergibt, unter τ den Wert der Formel (78) verstanden.

Die Funktion Ω läßt sich mittels der Tabellen, die ich früher[1]) berechnet habe, leicht auswerten. Es ergibt sich auf diese Weise Tabelle 2.

1) R. Gans, Göttinger Nachrichten S. 45. 1911.

Tabelle 2.

x	$\Omega(x)$	x	$\Omega(x)$
0,0	0,00000	2,5	0,7838
0,1	0,00332	2,6	0,8017
0,2	0,01322	2,8	0,8333
0,3	0,02941	3,0	0,8587
0,4	0,0516	3,2	0,8796
0,5	0,07891	3,4	0,8963
0,6	0,1110	3,6	0,9103
0,7	0,1470	3,8	0,9218
0,8	0,1864	4,0	0,9308
0,9	0,2277	4,2	0,9384
1,0	0,2708	4,4	0,9450
1,1	0,3215	4,6	0,9506
1,2	0,3587	4,8	0,9547
1,4	0,4449	5,0	0,9588
1,5	0,4862		
1,6	0,5257		
1,8	0,5987		
2,0	0,6626		
2,2	0,7175		
2,4	0,7633		

Für kleine x gilt

$$\Omega = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}x^4 + \frac{1}{75}x^6 - \frac{2}{945}x^8, \tag{97'}$$

während wir für große x haben (und zwar mit Vernachlässigung von e^{-x} gegen 1)

$$\Omega = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Setzen wir

$$\varphi = \frac{2}{15}\frac{K^2}{A_0^2}U'(\tau), \tag{98}$$

so daß also nach Gleichung (97)

$$U'(\tau) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2}\,\Omega\left(\frac{z}{\tau}\right)dz, \tag{99}$$

so läßt sich U' mittels der Simpsonschen Regel für einen bestimmten Wert von τ leicht auswerten. Erleichtert wird dies noch, weil $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$ die erste Ableitung des Fehlerintegrals ist, die sich z. B. in den Funktionentafeln von Jahnke und Emde findet.

Für große Werte von τ können wir für Ω die Reihe (97') substituieren und die Integration gliedweise ausführen. Auf die Weise erhalten wir

$$U'(\tau) = \frac{1}{\tau^2}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{9\tau^2} + \frac{1}{20\tau^4} - \frac{1}{36\tau^6} + \cdots\right\}. \tag{100}$$

Die Resultate der numerischen Rechnung finden sich in der zweiten Kolonne der Tabelle 3.

Tabelle 3.

τ	U'	v	U	$P(\tau) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\tau\frac{U}{\psi}$
0,0	2,000	0,7500	2,128	0,0000
0,1	1,590	0,5957	1,670	0,2435
0,2	1,250	0,4708	1,299	0,4186
0,25	1,116	0,4186	1,154	0,4900
0,5	0,6875	0,2393	0,6497	0,7181
1,0	0,2551	0,0960	0,2571	0,8837
1,5	0,1298	0,0486	0,1303	0,9406
2,0	0,07706	0,0289	0,07723	0,9642
3,0	0,03573	0,0134	0,03577	0,9883
5,0	0,01316	0,0049	0,01316	0,9938
∞	0,00000	0,0000	0,00000	1,0000

Somit wäre nach Gleichung (98) φ und also auch nach Gleichung (53) $\gamma_1^2 = \frac{1}{3} + \varphi$ in erster Näherung gefunden. Um den Wert zu verbessern, setzen wir

$$\overline{\alpha_1^2} = \overline{\beta_1^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}\frac{K^2}{A_0^2}U,$$

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\frac{K^2}{A_0^2}U$$

in Gleichung (87) ein und erhalten unter Benutzung von Gleichung (90)

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = \frac{A_0^2}{2}\left(1 - \frac{1}{50}\frac{K^2}{A_0^2}U\right); \\ a_{33} = \frac{A_0^2}{2}\left(1 + \frac{2}{50}\frac{K^2}{A_0^2}U\right) \end{cases} \tag{101}$$

und somit nach Gleichung (86)

$$
(102)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi \left[1 - \frac{3}{h} L(h)\right] \\
&\quad \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) e^{-\frac{A^2}{A_0^2}\left[\sin^2\vartheta'\left(1 + \frac{1}{50}\frac{K^2}{A_0^2} U\right) + \cos^2\vartheta'\left(1 - \frac{2}{50}\frac{K^2}{A_0^2} U\right)\right]} \\
&\qquad \frac{A^2}{A_0^2}\, d\left(\frac{A}{A_0}\right) \sin\vartheta'\, d\vartheta' \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi \left(1 - \frac{3}{h} L\right)\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} \frac{A^2}{A_0^2}\, d\left(\frac{A}{A_0}\right) \\
&\qquad \sin\vartheta'\, d\vartheta' \\
&+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left[1 - \frac{3}{a} L(a)\right]\left(\cos^2\vartheta' - \frac{1}{3}\right)^2 \frac{3}{50} \frac{K^2}{A_0^2} \\
&\qquad U e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} \left(\frac{A}{A_0}\right)^4 d\left(\frac{A}{A_0}\right) \sin\vartheta'\, d\vartheta' .
\end{aligned}\right.
$$

Der erste Term rechts, den wir φ_1 nennen wollen, ist das φ in erster Näherung, wie wir es oben (Gleichung (98)) berechnet haben; beim zweiten Term φ_2 haben wir benutzt, daß K^2 als unendlich klein anzusehen ist, und daß für $\lim K = 0$ $h = \frac{MH}{kT}$ in $a = \frac{MA}{kT}$, sowie ϑ in ϑ' übergeht (vgl. Fig. 1). Setzen wir

$$\frac{A}{A_0} = z; \quad a = \frac{MA_0}{kT} \cdot \frac{A}{A_0} = \frac{x}{\tau},$$

so wird, wenn wir die Integration nach ϑ' ausführen,

$$(103)\qquad \varphi_2 = \frac{4}{375} \frac{K^2}{A_0^2} U(\tau) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathfrak{G}\left(\frac{x}{\tau}\right) x^4 e^{-x^2} dx,$$

unter $G(x)$ die Funktion

$$(104)\qquad \mathfrak{G}(x) = 1 - \frac{3}{x} L(x)$$

verstanden. Somit erhalten wir unter Benutzung von Gleichung (98)

$$
(105)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 &= \frac{2}{15} \frac{K^2}{A_0^2} U(\tau) = \frac{2}{15} \frac{K^2}{A_0^2} U'(\tau) \\
&\quad + \frac{4}{375} \frac{K^2}{A_0^2} U(\tau) \cdot v(\tau),
\end{aligned}\right.
$$

wo

$$v(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathfrak{G}\left(\frac{z}{\tau}\right) z^4 e^{-z^2} dz . \tag{106}$$

Aus Gleichung (105) folgt

$$U = \frac{U'}{1 - \frac{2}{25} v},$$

d. h.

$$\varphi = \frac{2}{15} \frac{K^2}{A_0^2} U(\tau) = \frac{2}{15} \frac{K^2}{A_0^2} \frac{U'}{1 - \frac{2}{25} v(\tau)} . \tag{107}$$

Es muß also $v(\tau)$ bestimmt werden. Da wir früher bereits[1]) $L(x)/x$ numerisch ausgewertet haben, können wir $G(x)$ leicht berechnen. Wir geben diese Funktion in der folgenden Tabelle.

Tabelle 4.

x	$\mathfrak{G}(x)$	x	$\mathfrak{G}(x)$	x	$\mathfrak{G}(x)$
0,0	0,0000	1,5	0,1237	4,4	0,4729
0,1	0,0007	1,6	0,1375	4,6	0,4894
0,2	0,0027	1,8	0,1657	4,8	0,5050
0,3	0,0060	2,0	0,1939	5,0	0,5197
0,4	0,0105	2,2	0,2224	6,0	0,5833
0,5	0,0163	2,4	0,2503	9,0	0,7037
0,6	0,0232	2,6	0,2773	20	0,8575
0,7	0,0313	2,8	0,3034	50	0,9412
0,8	0,0403	3,0	0,3283	100	0,9703
0,9	0,0502	3,2	0,3523	∞	1,0000
1,0	0,0607	3,4	0,3751		
1,1	0,0709	3,6	0,3970		
1,2	0,0844	3,8	0,4174		
1,3	0,0973	4,0	0,4372		
1,4	0,1102	4,2	0,4552		

Für kleine x gilt

$$\mathfrak{G} = \frac{x^2}{15}\left(1 - \frac{2x^2}{21} + \frac{x^4}{105} - \frac{2x^6}{2079} + \ldots\right), \tag{108}$$

für große x

$$\mathfrak{G} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} . \tag{109}$$

1) R. Gans, Göttinger Nachrichten S. 45. 1911.

Durch gliedweise Integration von Gleichung (106) mittels (108) erhält man für große τ

$$v = \frac{1}{8\tau^3}\left[1 - \frac{1}{3\tau^2} + \frac{3}{20\tau^4} - \frac{1}{12\tau^6} + \cdots\right] \tag{110}$$

und für kleine τ nach Gleichung (109)

$$v = \frac{3}{4} - \frac{3\tau}{\sqrt{\pi}} + \frac{3\tau^2}{2}\,. \tag{111}$$

Es ist nicht nötig, eine große Genauigkeit bei der Berechnung von v zu erzielen, da diese Größe nur zur Korrektion in Gleichung (107) dient.

Für die numerische Auswertung von Gleichung (106) ist es nützlich, sich folgender Formel zu bedienen

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathfrak{G}\left(\frac{z}{\tau}\right) z^4 e^{-z^2}\,dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^c \mathfrak{G}\left(\frac{z}{\tau}\right) z^4 e^{-z^2}\,dz$$
$$+ \frac{3}{4}(1+2\tau^2)[1-F(c)] - \frac{3\tau}{2}(1+c^2)F'(c)$$
$$- \frac{3}{8}\left(1+\frac{2}{3}c^2+2\tau^2\right)F''(c),$$

die gültig ist, wenn c so groß ist, daß bereits

$$\mathfrak{G}\left(\frac{c}{\tau}\right) = 1 - \frac{3\tau}{c} + \frac{3\tau^2}{c^2}$$

(vgl. Gleichung (109)) gesetzt werden darf. Diese Beziehung erlaubt nämlich, die mechanische Quadratur zwischen 0 und c statt zwischen 0 und ∞ auszuführen, wenn man die Tafeln für das Fehlerintegral F und seine Ableitungen (z. B. Jahnke und Emde) benutzt.

Tab. 3, welche v und U enthält, läßt erkennen, daß U' und U sich nicht sehr unterscheiden, besonders nicht für große τ.

Setzen wir Gleichung (107) in (38) ein, so erhalten wir für die Kerr-Konstante unter Berücksichtigung der Beziehung $K = E + \frac{4\pi}{3}P = \frac{s+2}{3}E$

$$Q = \frac{m_2 - m_1}{\lambda_0 E^2} = \frac{2\pi N(m_0^2+2)^2(h-h')(s+2)^2}{405\,\lambda_0 m_0 \Delta_0^2}\,U(\tau), \tag{112}$$

und die durch Gleichung (73) definierte Größe R wird mit Benutzung von Gleichung (76)

$$R = R_0 \cdot P(\tau), \tag{113}$$

wo R_0 den Wert von R für unendlich großes τ,

$$P(\tau) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\,\tau\,\frac{U(\iota)}{\psi(\tau)} \tag{114}$$

bedeutet. Die letzte Kolonne von Tab. 3 enthält die Funktion P, und Fig. 4 stellt $P(\tau)$ als Funktion von τ, d. h. den Verlauf

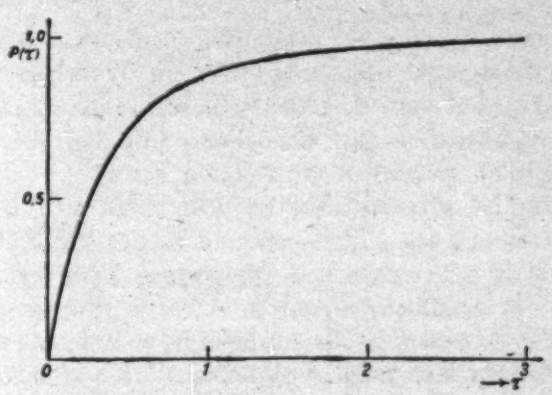


Fig. 4.

von R in seiner Abhängigkeit von $\frac{T}{\sqrt{D}}$ dar, wie aus Gleichungen (77) und (78) folgt.

Für große τ wird nach Gleichungen (100), (110) und (80)

$$P(\tau) = \frac{1 - \frac{1}{6\tau^2} + \frac{1}{15\tau^4} - \frac{41}{1080\tau^6} + \dots}{1 - \frac{1}{100\tau^2} + \frac{1}{300\tau^4} - \frac{3}{2000\tau^6} + \dots}, \tag{115}$$

während für sehr kleine τ

$$P(\tau) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{2}{0{,}94}\,\tau \tag{116}$$

wird.

Ist τ sehr groß — der Fall, auf den Born sich beschränkt —, so wird also nach Gleichung (113) R keineswegs, wie Born[1]) und Lundblad[2]) meinen, der absoluten Temperatur umgekehrt proportional, sondern auch von derselben unabhängig, wie im Falle des Fehlens fester Momente (vgl. Gleichung (79)). Die

1) M. Born, Ann. d. Phys. 55. S. 220. 1918.
2) R. Lundblad, a. a. O. S. 55.

Temperaturabhängigkeit gibt also in diesem Falle kein Kriterium für die molekulare Konstitution ab, entgegen dem Glauben jener beiden Forscher. Ihr Irrtum kommt daher, daß sie nicht beachtet haben, daß bei Vorhandensein fester Momente

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\frac{1}{D}$$

nicht konstant, sondern der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist (vgl. Gleichung (81)). In Wahrheit wird der Temperaturverlauf von R jedoch sehr wohl eine Entscheidung über den molekularen Bau ermöglichen, da bei Flüssigkeiten τ keineswegs als unendlich groß gelten kann.

Die von Lundblad zitierten noch nicht veröffentlichten Messungen Bergholms stimmen nun in der Tat mit unserer Funktion (113) überein, soweit der geringe Temperaturbereich überhaupt ein genaueres Urteil zuläßt. So viel ist jedenfalls sicher, daß nach seinen Beobachtungen feste Momente existieren müssen; es fragt sich nur, ob dieselben durch elektrostatische Felder merklich verändert werden, oder nicht. Das kann erst der nächste Paragraph entscheiden.

§ 6. Molekeln mit fertigen und induzierbaren Momenten.

Wir behandeln also schließlich den Fall, daß das fertige Moment durch das Feld am Orte der Molekel verändert wird, jedoch wollen wir nicht die allgemeinste Möglichkeit betrachten, die etwas verwickelt ist, wenn auch keine prinzipielle Schwierigkeit vorliegt, sondern wir beschränken uns auf isotrope Bindung.

Wir haben also in Gleichung (26) $g = g'$ zu setzen und erhalten

$$X = e^{\frac{g k T}{2} B^2} \int_{-1}^{+1} e^{B M u}\, du = 2 e^{\frac{g k T}{2} B^2} \frac{\mathfrak{Sin}\, B M}{B M}$$

und daraus

$$\overline{\mathfrak{p}_B} = \frac{\partial \log X}{\partial B} = g H + M L(h). \tag{117}$$

Hier sind die Gleichungen (25), (83), (85) benutzt. Da nun H sich zusammensetzt aus der geordneten erregenden Kraft K und dem Molekularfelde A, d. h. $H_x = A_x$; $H_y = A_y$; $H_z = A_z + K$ ist und ferner nach Gleichung (43) $\overline{A_z} = 0$ gilt, so gibt der erste Term rechts $g K$, während der zweite, ebenso

wie in § 5, bei der Mittelwertbildung über alle möglichen Molekularfelder (vgl. Gleichung (75))

$$\frac{4M}{3\sqrt{\pi}A_0}\psi\left(\frac{kT}{MA_0}\right)K$$

ergibt, so daß

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi N}{3}\left[g+\frac{4M}{3\sqrt{\pi}A_0}\psi(\tau)\right] \tag{118}$$

mit

$$\tau=\frac{kT}{MA_0} \tag{119}$$

folgt. Mittels Gleichung (119) können wir (118) auch in der Form schreiben

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\,\frac{T}{N}=\frac{4\pi}{3}\left[gT+\frac{4M^2}{3\sqrt{\pi}k}\tau\psi(\tau)\right]. \tag{120}$$

Wir müssen nun A_0 berechnen, um τ in seiner Abhängigkeit von der Temperatur und Dichte zu kennen.

Wir haben die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} p_x &= M\alpha_1+gA_x,\\ p_y &= M\beta_1+gA_y,\\ p_z &= M\gamma_1+g(A_z+K). \end{aligned}\right. \tag{121}$$

Daraus folgt mit Benutzung von Gleichung (43) und (44)

$$\left\{\begin{aligned} \overline{p_x^2} &= M^2\overline{\alpha_1^2}+g^2a_{11},\\ \overline{p_y^2} &= M^2\overline{\beta_1^2}+g^2a_{22},\\ \overline{p_z^2} &= M^2\overline{\gamma_1^2}+g^2(a_{33}+K^2)+2MgK\overline{\gamma_1}. \end{aligned}\right. \tag{122}$$

Für die Berechnung der Dielektrizitätskonstanten begehen wir keinen Fehler, wenn wir uns auf die Glieder erster Ordnung in K beschränken, also $\overline{\alpha_1^2}=\overline{\beta_1^2}=\overline{\gamma_1^2}=\frac{1}{3}$; $\overline{\gamma_1}K=0$ setzen. So erhalten wir mittels Gleichung (45)

$$\frac{A_0^2}{2}=a_{11}=a_{22}=a_{33}=\frac{10}{9}\,\frac{M^2C}{1-\frac{10}{3}g^2C}. \tag{123}$$

Da C nach Gleichung (46) der Dichte D proportional ist, so hat A_0 die Form

$$\frac{a\sqrt{D}}{\sqrt{1-bD}},$$

und τ ist

$$\frac{T\sqrt{1-bD}}{\sqrt{D}}$$

proportional.

Scheinbar ist der Ausdruck (118) eine Superposition des Einflusses der induzierten Momente und der fertigen Momente. In Wahrheit enthält der zweite Term der Summe aber A_0, und in dieser Größe lassen sich die beiden Einflüsse nicht trennen.

Für sehr große Werte von τ ist $\tau\psi(\tau)$ merklich konstant. Dann wird Gleichung (120) eine von der Dichte unabhängige lineare Funktion der Temperatur, deren konstantes Glied von den festen Momenten herrührt (Debyescher Fall).

Die Kerr-Konstante ergibt sich nach Gleichung (27′) aus

$$Y = \int_{-1}^{+1} e^{BMu}\,du = \frac{2\mathfrak{Sin}\,BM}{BM} \tag{124}$$

genau wie in Gleichung (82). So sind auch die Schlußfolgerungen aus jener Gleichung hier gültig, d. h. wir erhalten — wie in Gleichung (98) — unter der, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, berechtigten Annahme, daß das Molekularfeld der Richtung nach gleichförmig verteilt ist,

$$\varphi = \frac{2}{15}\,\frac{K^2}{A_0^2}\,U'(\tau),$$

und das ist merklich gleich

$$\frac{2}{15}\,\frac{K^2}{A_0^2}\,U(\tau).$$

Somit wird die Kerr-Konstante gleich dem Ausdrucke (112) und R nach der Definition (73)

$$R = R_0\,\frac{P(\tau)}{1+\frac{3\sqrt{\pi}\,A_0\,g}{4M\psi(\tau)}}. \tag{125}$$

Unser Resultat unterscheidet sich von dem für nicht induzierbare Molekeln geltenden der Gleichung (113) erstens durch

den Faktor im Nenner und zweitens dadurch, daß das auch in $\tau = \frac{kT}{MA_0}$ vorkommende A_0 sich jetzt nach Gleichung (123) berechnet, während es sich im vorigen Paragraphen aus (90) ergab.

Während sich nach Gleichung (118) $(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)$ additiv aus dem Einfluß der elastischen Bindungen und dem der festen Momente zusammensetzt, wird die Doppelbrechung nur durch die Orientierung der Molekeln bedingt. Allerdings erstreckt sich die Trennbarkeit der beiden Effekte nicht auf das Molekularfeld A_0 (123), und für den Fall anisotroper Bindungen, den wir wegen seiner Kompliziertheit jetzt nicht behandeln wollen, ist, außer für sehr große τ (Gase und Dämpfe), von einer einfachen Überlagerung der beiden Effekte nicht mehr die Rede.

§ 7. Zusammenstellung der Resultate.

I. Sind keine fertigen Momente in der Molekel vorhanden, so ist nach Gleichung (59) und (73)

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\frac{1}{D} = A; \quad R = \frac{R_0}{1 - aD}.$$

Hier sind A, R_0, a Konstanten; D bedeutet die Dichte.

II. Existieren fertige Momente, die aber durch äußere Felder nicht merklich verändert werden, so ist nach Gleichung (81) und (113)

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\frac{T}{D} = Q\tau\psi(\tau); \quad R = R_0 P(\tau); \quad \tau = b\frac{T}{\sqrt{D}}.$$

T bedeutet die absolute Temperatur, Q, R_0 und b sind Konstanten, $\tau\psi(\tau)$ und $P(\tau)$ die in den Figg. 3 und 4 gezeichneten Funktionen von τ, die für große τ (Gase und Dämpfe) konstant werden.

III. Können die äußeren Felder die fertigen Momente merklich verändern, so gilt nach Gleichungen (120), (123), (125)

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\frac{T}{D} = cT + c'\tau\psi(\tau); \quad R = R_0 \frac{P(\tau)}{1 + \dfrac{\gamma\sqrt{D}}{\sqrt{1 - \gamma' D}\,\psi(\tau)}};$$

$$\tau = b\frac{T}{\sqrt{D}}\sqrt{1 - \gamma' D}.$$

Hier sind c, c', γ, γ', b, R_0 Konstanten.

Wir wollen von einem Vergleich mit der Erfahrung einstweilen absehen. Es müßten als Beobachtungsmaterial Messungen der Dielektrizitätskonstante und der Kerr-Konstante in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur *an denselben Körpern* herangezogen werden. Dazu liegt nur spärliches Material vor. Zu seiner Vervollständigung soll auch eine Experimentaluntersuchung beitragen, die im hiesigen Institut augenblicklich angestellt wird.

La Plata, 20. Juli 1920.
Instituto de Fisica.

(Eingegangen 1. September 1920.)

2. *Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen;* *von Carl Ramsauer.*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

I. Ziel und Prinzip der Arbeit.

Das Ziel der nachstehenden Arbeit, welche bereits vor dem Kriege in Gang gesetzt war[1]), besteht darin, den insgesamt wirksamen Querschnitt eines Gasmoleküls gegenüber langsamen Elektronen für eine *einheitliche* Elektronengeschwindigkeit und für einen *eindeutig definierten* Elektronenweg festzustellen. Zu diesem Zwecke werden Elektronen bestimmter Geschwindigkeit aus einer beliebigen Geschwindigkeitsverteilung heraus mittels eines entsprechenden magnetischen Feldes auf einem durch Blenden festgelegten Kreisbogen zuerst durch das „Vakuum" und darauf durch ein Gas bestimmten Drucks hindurchgeleitet und am Ende ihres Weges aufgefangen. Die im zweiten Falle fehlende Elektronenmenge gibt dann die Zahl aller derjenigen Elektronen an, welche durch die Moleküle des eingeführten Gases in irgendeiner Weise beeinflußt sind, nämlich nicht nur diejenigen Elektronen, welche von den Molekülen vorübergehend oder dauernd festgehalten werden, sondern auch alle diejenigen, welche durch Richtungsänderung oder Geschwindigkeitsänderung irgendwelcher Art eine Ablenkung aus dem Kreise erleiden. Die Rückkehr solcher Elektronen in die Kreisbahn ist im Gegensatz zu Elektronenstrahlen ohne magnetische Festlegung der Bewegungsrichtung unwahrscheinlich im *zweiten* Grade, da zum Wiedereintritt in die Kreisbahn die doppelte Vorbedingung einer bestimmten Bewegungsrichtung *und* einer bestimmten Geschwindigkeit erfüllt sein muß.

1) C. Ramsauer, Über eine direkte magnetische Methode zur Bestimmung der lichtelektrischen Geschwindigkeitsverteilung. Ann. d. Phys. 45. S. 1000. Anm. 1. 1914. — Im weiteren Texte kurz als „1914" angeführt.

Aus der Weglänge, dem Gasdruck und dem Elektronenverlust läßt sich ein spezifisches Beeinflussungsvermögen „a“ berechnen. Dasselbe ist formell dem spezifischen Absorptionsvermögen a des Gases analog; es erscheint jedoch zweckmäßiger, die Versuchsergebnisse unmittelbar zur Bestimmung des gesamten, auf die Elektronen irgendwie wirksamen Querschnitts und zwar *eines* Gasmoleküls zu verwenden. Diese Größe soll kurz als *Wirkungsquerschnitt* bezeichnet werden.

Um den Vergleich dieser Arbeit mit den unmittelbaren Absorptionsuntersuchungen zu erleichtern, seien hier noch einmal — im Anschluß an Herrn Lenard[1]) — die verschiedenen Möglichkeiten im Verhalten eines zu einem einheitlichen Strahlenbündel gehörigen Elektrons gegenüber einem Molekül zusammengestellt.

1. Das Elektron erfährt keinerlei Veränderung in der Geschwindigkeit oder Richtung seiner Bewegung.

2. Das Elektron erleidet eine merkliche, aber doch so geringe Beeinflussung, daß sein Bewegungszustand im großen und ganzen erhalten bleibt. Zu unterscheiden sind: Geschwindigkeitsverminderung und Richtungsänderung. Letztere wird in ihrer Gesamtwirkung auf das Strahlenbündel als *Diffusion* bezeichnet und ist dadurch charakterisiert, daß die Wahrscheinlichkeit jeder Richtungsänderung schnell mit ihrer Größe abnimmt.

3. Das Elektron wird beim Zusammentreffen mit *einem* Gasmolekül in Geschwindigkeit und Richtung zu ungeordneter Bewegung von molekularer Größenordnung reduziert, d. h. *absorbiert*, wobei es gleichgültig ist, ob das Elektron dauernd oder vorübergehend festgehalten wird. Von ähnlicher Wirkung ist die bei sehr langsamen Strahlen auftretende Reflexion, welche das Elektron ebenfalls bei *einem* Zusammenstoß aus dem Strahlenbündel ausschaltet, ohne allerdings die Geschwindigkeit sofort auf die molekulare Größenordnung zu reduzieren. Diese Reflexion unterscheidet sich äußerlich von der Diffusion dadurch, daß bei ihr jede Bewegungsrichtung nach dem Zusammenstoß gleich wahrscheinlich ist. Echte Absorption und Reflexion (auch unechte Absorption genannt) lassen sich experimentell schwer trennen, da beide die plötz-

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Heidelberg, Verlag Winter 1918.

liche Ausschaltung des Elektrons aus dem Strahlenbündel bedeuten, wobei allerdings bei der Reflexion die Rückkehr in das Strahlenbündel nur unwahrscheinlich, nicht aber unmöglich ist.

Das Ziel der eigentlichen Absorptionsuntersuchungen ist die Feststellung der unter 3. genannten Elektronen, welche durch das Zusammentreffen mit *einem* Molekül vollständig aus dem Strahlenbündel ausgeschieden werden. Elektronen von kleinem Geschwindigkeitsverlust oder geringer Richtungsänderung sind nicht „absorbiert"; sie müssen daher geradeso wie die unbeeinflußten Elektronen aufgefangen oder, falls sie aus dem Strahlenbündel wegdiffundiert sind, durch eine gleiche Anzahl aus dem „Schutzring" hinzudiffundierter Elektronen ersetzt werden. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Feststellung der unter 3. und 2. genannten Elektronen, d. h. aller Elektronen, welche überhaupt irgendeine Beeinflussung erfahren und infolgedessen aus dem magnetisch scharf definierten Strahlenbündel ausgeschieden werden.

Der Vergleich der beiden Methoden gibt die Differenz zwischen dem überhaupt wirksamen und dem absorbierenden Querschnitt, d. h. denjenigen Teil des Querschnitts, innerhalb dessen die Beeinflussung der Elektronen von der völligen Festhaltung (oder Reflexion) zur nicht mehr merklichen Richtungs- und Geschwindigkeitsänderung übergeht, wobei es begrifflich gleichgültig ist, wieweit dieser Übergang sprunghaft und wieweit er stetig erfolgt.

Zur Durchführung dieses Vergleichs kommen in erster Linie die neuen Absorptionsversuche in Betracht, welche für die auch von mir benutzten Gase und Geschwindigkeiten nach der bekannten Methode, aber unter besonders weitgehender Berücksichtigung aller Fehlerquellen von Herrn Hans Ferd. Mayer im hiesigen radiologischen Institut ausgeführt sind.[1]) Die Werte für Helium und Argon gelangen erst jetzt, etwa gleichzeitig mit der vorliegenden Arbeit, zur Veröffentlichung[2]), Herr Mayer war jedoch so liebenswürdig, sie mir schon jetzt zur Verfügung zu stellen, wofür ich auch

1) Hans Ferd. Mayer, Über das Verhalten von Molekülen gegenüber freien langsamen Elektronen. Heidelb. Diss. 5. I. 1920.

2) Hans Ferd. Mayer, Ann. d. Phys. **64**. S. 451. 1921.

an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte. Es sei bemerkt, daß wir für Helium und Argon die gleichen Gasproben benutzt haben.

Die Ergebnisse dieses Vergleichs werden weiter unten näher besprochen. Es möge jedoch schon hier das Hauptresultat vorweggenommen werden, daß sich bei diesen langsamen Strahlen (Größenordnung 1 Volt) der überhaupt wirksame Querschnitt und der absorbierende Querschnitt innerhalb der Versuchsgenauigkeit als identisch erweisen. Trotzdem erschien es für eine strenge Beweisführung richtiger, die Unterscheidung zwischen diesen beiden Querschnitten (bzw. die Unterscheidung zwischen „a“ und a) bis zum Schlusse scharf beizubehalten, zumal die reale Bedeutung dieser Unterscheidung für größere Geschwindigkeiten unzweifelhaft festgestellt ist. Es sei hervorgehoben, daß Herr Lenard dieses Fehlen der Diffusion bereits aus der vorliegenden Gesamtkenntnis der Molekülwirkungen auf langsamste Elektronen geschlossen hat, wie quantitativ durch die Setzung des „Umwegfaktors“ für langsamste Elektronen gleich 1 zum Ausdruck kommt.[1])

II. Versuchsanordnung.[2])

Da mit einer Änderung der ursprünglichen Elektronenemission nach Menge und Geschwindigkeitsverteilung im Augenblick der Gaseinführung gerechnet werden muß, so erscheint es am zweckmäßigsten, die Methode als Differenzmethode auszubilden, d. h. die Elektronen über zwei verschieden lange Kreiswege zu leiten und die sich ergebenden Mengen der Elektronen ohne und mit Gasfüllung mit der Längendifferenz der beiden Wege in Verbindung zu bringen, wie in Abschnitt III mathematisch näher ausgeführt ist.

1. *Das Meßkästchen.* Fig. 1 stellt den Grundriß eines ganz aus Zinkblech von 0,5 mm Dicke gefertigten Kästchens von etwa 35×35 mm Fläche und 11 mm Höhe (senkrecht zur Zeichenebene gemessen) dar. Der Zinkstreifen Z von 1 mm

1) P. Lenard, a. a. O. Abschnitt VII.

2) Die Versuchsanordnung schließt sich in ihren äußeren Verhältnissen eng an „1914“ an, so daß hier von der Darstellung weniger wichtiger Einzelheiten abgesehen werden konnte.

Breite und 9,5 mm Höhe wird durch den Lichtstrahl L getroffen, zu dessen Einstellung die Umgebung der Eintrittsöffnung auf der Außenseite mit einer Schicht fluoreszierenden Willemits bedeckt ist. Der hintere Abschluß S des Belichtungsraums ist siebartig durchlocht, um das überschüssige Licht möglichst nach außen gelangen zu lassen. K und k sind die beiden Kreisbahnen, auf denen die Elektronen durch entsprechende Magnetfelder herumgeleitet werden; die mittleren Radien betragen 12,0 bzw. 8,0 mm. Die Kreisbahnen sind geometrisch festgelegt durch Z und durch die 1,0 mm breiten und 8 mm hohen Blenden B_1 B_2 bzw. b_1 b_2; die übrigen Blenden sind absichtlich etwas größer gehalten, so daß sie die Kreisbahnen unter keinen Umständen stören können. A und a dienen als Auffangekäfige und können einzeln mit dem Elektrometer verbunden werden. Das ganze Meßkästchen ist von oben her mit einem Deckel verschlossen, doch ist allgemein durch Öffnungen an allen den Stellen, wo keine elektrischen Störungen befürchtet werden müssen, dafür gesorgt, daß die eingeführten Gase möglichst frei zirkulieren können.

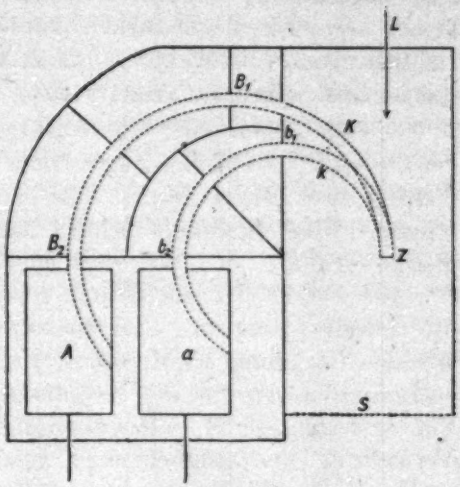


Fig. 1.

2. *Die Strahlungsquellen.* Als Strahlungsquellen diente eine mittelstarke Quarzquecksilberlampe und ein elektrischer Funke zwischen Metallelektroden Al–Al, Mg–Al (vgl. „1914"). Das Licht wurde durch zwei Quarzlinsen von 9 cm Durchmesser und etwa 15 cm gemeinsamer Brennweite auf die Eintrittsöffnung des Meßkästchens konzentriert, wobei die Linsen etwa in der Mitte zwischen Lichtquelle und Eintrittsöffnung standen. Die genaueren Entfernungen wurden der Brechbarkeit der benutzten Wellenlänge angepaßt, so daß die Belichtung — abgesehen von den Mg-Al-Funken, bei

welchen absichtlich das Mg- und das Al-Maximum durch entsprechende Abpassung der Entfernung auf etwa gleiche Wirksamkeit gebracht wurden (vgl. VI, 2) — ziemlich monochromatisch war, wie hier nur der Vollständigkeit wegen bemerkt sei. Die Lichtstärken konnten durch Änderung des Lampenstromes bzw. der Funkenkapazität sowie durch eingeschobene schwarze Schleier nach Bedarf geändert werden.

3. *Das Magnetfeld.* Zur Erzeugung der Magnetfelder von gewünschter Stärke (im allgemeinen zwischen 2 und 5 Gauss) dienten zwei flache Spulen von etwa 20 cm innerem Durchmesser. Über Eichung, Schutz vor Fehlerquellen usw. vergleiche „1914".

Die Stärke des Magnetfeldes ist gleichzeitig ein Maß für die jeweils benutzte Elektronengeschwindigkeit. Die notwendige Beziehung wurde durch direkte Aufnahme der Gegenspannungskurven für die Kreisbahn K, nach Art der Kurve Fig. 4, festgelegt: 1 Volt entspricht 0,80 Gauss. Von einer Verwertung der magnetischen Spulenkonstanten wurde abgesehen, da die Spulen aus äußeren Gründen nicht ganz symmetrisch zum Meßkästchen angebracht waren, zumal diese Frage bereits „1914" eingehend behandelt ist.

4. *Das Vakuum.* Das Meßkästchen befindet sich in einem Glasrohr von etwa 30 cm Länge und 5 cm Durchmesser (in Fig. 2 im Querschnitt als M gezeichnet). An der einen Stirnseite tritt das Licht durch ein Fenster aus Kristallquarz ein, auf der anderen Seite sind die Zuführungen zu den beiden Auffangekäfigen A und a isoliert eingeführt. An beiden Stirnseiten befindet sich vor der eigentlichen Abschlußplatte in etwa 10 mm Abstand je eine analoge äußere Platte. Die so entstehenden beiden Zwischenräume werden besonders ausgepumpt, so daß die eigentlichen Abschlußplatten nicht an die äußere Luft, sondern an ein Vorvakuum von $^1/_{1000}$ bis $^1/_{100}$ mm Druck grenzen. Die Abdichtung des Hauptvakuums war übrigens so gut, daß eine Erhöhung des Drucks im Vorvakuum ohne meßbaren Einfluß auf das Hauptvakuum blieb. Die Kittung der eigentlichen Abschlußplatten konnte, da sie ja nur geringem Außendruck zu widerstehen brauchte, so ausgeführt werden, daß offenliegende Kittflächen nach der Innenseite ganz vermieden waren; an den Hauptstellen war hierbei das außen verwandte Pizein mit Schellack unterlegt. Zur

Vermeidung aller stärkeren Druckdifferenzen standen Vorvakuum und Hauptvakuum bei der ersten Auspumpung stets in Verbindung.

Zur Evakuierung diente eine rotierende Quecksilberpumpe, zur Beseitigung von Dämpfen war unmittelbar am eigentlichen Meßraum eine Kühlvorrichtung für feste Kohlensäure und Alkohol angebracht (vgl. Fig. 2, *K*). Die Messung der Innendrucke erfolgte mit einem größeren Kompressionsmanometer, welches Hunderttausendstel Millimeter abzulesen erlaubte.

Hervorgehoben sei, daß es bei der benutzten Methode nicht auf ein möglichst hohes Vakuum, sondern auf möglichst konstante Druckverhältnisse im Innern des Meßraumes ankommt, da nur die Differenz der Gasfüllungen in die Rechnung eingeht.

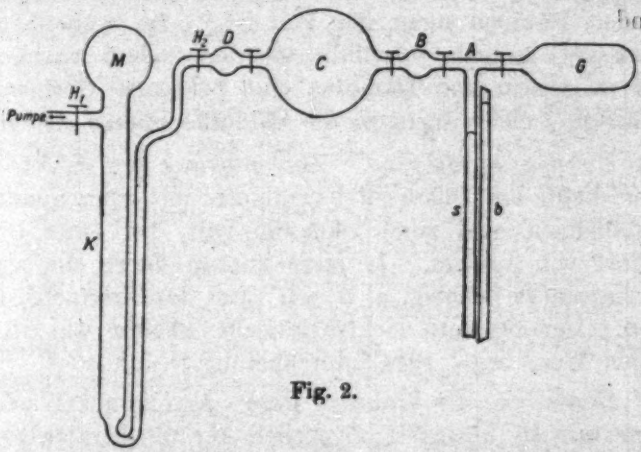


Fig. 2.

5. *Gaseinführung und Druckmessung* (Fig. 2). *M* ist das eigentliche Meßrohr im Querschnitt mit dem Kühlrohr *K*. *M* wird nach der Auspumpung durch die Hähne H_1 und H_2 von der Pumpe und der Gaseinführungsvorrichtung abgeschlossen; das so abgegrenzte Volumen sei *V* (804,5 ccm). *G* ist das Gefäß mit dem reinen Gas; von *G* aus wird zuerst der Raum $A + B$ unter einen bestimmten Druck gesetzt, welcher an dem Steigrohr *s* als Differenz gegen das Barometerrohr *b* mittels Kathetometer abgelesen werden kann (z. B. 50,0 mm). Darauf wird *B* von *A* abgeschlossen und der Inhalt von *B* (7,10 ccm) auf $B + C + D$ (7,10 + 366,0 + 7,44 ccm) verteilt. Dann wird *D* von *C* abgeschlossen und auf $D + V$

verteilt. Durch diese Unterteilungen wird der anfängliche Druck von 50,0 mm auf das 0,000171fache reduziert, so daß er jetzt nach dem angeführten Beispiel im Meßraum unter Voraussetzung überall gleicher Temperaturen $50\,0 \times 0{,}000171 = 0{,}00855$ mm betragen würde. Dieser Druck ist dann noch auf 0° C zu reduzieren, wobei die Tatsache entsprechend zu berücksichtigen ist, daß die innerhalb des Kühlgefäßes befindliche Gasmenge von rund 100 ccm nicht Zimmertemperatur, sondern eine Temperatur von −78° C besitzt.

Der Vorteil dieser Methode gegenüber der sonstigen Druckmessung besteht darin, daß der Meßraum einschließlich Kühlvorrichtung vor und nach der Gaseinführung völlig abgeschlossen bleibt und einen ganz stationären Zustand in sich ausbilden kann, was bei Verbindung mit größeren Hg-Dampf führenden Räumen nicht der Fall ist.[1]) Im Augenblick des Gaseinlasses kommt jedenfalls zu dem schon vorhandenen Inhalt an Gasen und Dämpfen eine bekannte Gasmenge als *Plus* hinzu, welche allein in die Schlußrechnung eingeht.

6. *Elektrische Messung.* Zur Messung der Elektrizitätsmengen diente ein Quadrantelektrometer mit einer Spannungsempfindlichkeit von rund 2600 mm/Volt, bei einer Gesamtkapazität von 144 cm. Letztere konnte durch eine variable Zusatzkapazität beliebig, z. B. auf rund das Vierfache, erhöht werden. Der gesamte elektrostatische Schutz war in einer analogen Weise wie „1914" durchgeführt.

7. *Herstellung der benutzten Gase.* Argon und Wasserstoff wurden mir in höchster, eigentlich für Spektralzwecke bestimmter Reinheit von der Badischen Anilin- und Sodafabrik zur Verfügung gestellt, wofür ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte. Helium wurde von der Firma R. Götze, Leipzig bezogen. Stickstoff wurde durch quantitative Entfernung des Sauerstoffs und der Kohlensäure

1) Nach Abschluß des Meßversuchs kann natürlich das Kompressionsmanometer nach Verteilung des Gasinhalts auf Meßraum + Manometervolumen — unter entsprechender Anrechnung des Anfangsdrucks im Manometer — zur Kontrolle herangezogen werden. Dies ist durchweg geschehen, um nicht etwaige Okklusionen unberücksichtigt zu lassen. Eine weitere Kontrolle der etwaigen Veränderung der eingeführten Gasmenge ergibt sich aus dem zeitlichen Verlauf der Absorptionsmessungen.

aus der atmosphärischen Luft gewonnen, um nicht durch die bei der chemischen Herstellung kaum vermeidlichen Spuren von Stickoxyd starke Änderungen der lichtelektrischen Empfindlichkeit der bestrahlten Zinkfläche befürchten zu müssen. Der Argongehalt ist bei der Berechnung des Endergebnisses mit 1,2 Volumprozenten in Rechnung gesetzt.

III. Die Theorie der Methode.

Die benutzten Magnetfelder seien dem Verhältnis der Kreisradien angepaßt, so daß auf beiden Kreisen Elektronen des gleichen Geschwindigkeitsbereichs zu den Auffangekäfigen geleitet werden. Die Versuche werden ausgeführt zuerst für einen beliebigen aber stationären Anfangszustand — „Meßperiode 1" — und darauf nach Einlaß einer neuen Gasmenge vom Partialdruck p mm — „Meßperiode 2" —.

Es bedeuten:

a_1 bzw. a_2 die „Absorptionsvermögen" der Moleküle für das Dampfresiduum und das Gas vom Druck p mm, rein formal im Sinne der benutzten Absorptionsgleichung genommen.

„a" das *spezifische* „Absorptionsvermögen" des Gases für den Druck von 1 mm in rein formalem Sinne (d. h. in Wirklichkeit das spezifische Beeinflussungsvermögen des Gases).

J_1 bzw. J_2 diejenigen Elektronenmengen, welche nach Durchlaufung des größeren Kreises K im Auffangekäfig A aufgefangen und tatsächlich gemessen werden.

J_1' bzw. J_2' diejenigen Elektronenmengen, welche nach Durchlaufung des größeren Kreises im Auffangekäfig A lediglich entsprechend der geometrischen Konfiguration aufgefangen werden würden, wenn die Beeinflussung der Elektronen durch die Gasmoleküle nicht vorhanden wäre.

W die auf dem größeren Kreise K durchlaufene Wegstrecke in Zentimetern.

i_1 und i_2 bzw. i_1' und i_2' sowie w haben die entsprechende Bedeutung für den kleineren Kreis k.

Dann ist:

$$J_1 = J_1' \cdot e^{-a_1 W},$$

$$J_2 = J_2' \cdot e^{-(a_1 + a_2) W},$$

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{J_1'}{J_2'} \cdot e^{a_2 W},$$

analog:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{i_1'}{i_2'} \cdot e^{a_1 w},$$

ferner[1]):

$$\frac{J_1'}{J_2'} = \frac{i_1'}{i_2'},$$

also:

$$\frac{J_1}{J_2} \Big/ \frac{i_1}{i_2} = e^{a_2 (W - w)},$$

daraus:

$$a_2 = \frac{1}{W - w} \text{ lognat } \left(\frac{J_1}{J_2} \Big/ \frac{i_1}{i_2} \right),$$

$$„a“ = \frac{1}{p \cdot (W - w)} \text{ lognat } \left(\frac{J_1}{i_1} \Big/ \frac{J_2}{i_2} \right).$$

Da „a“ die physikalische Bedeutung der Querschnittsumme aller Moleküle für 1 ccm bei 1 mm Druck hat, so erhält man den Wirkungsquerschnitt q eines Moleküls durch Division mit $26{,}4 \cdot 10^{18} \cdot \frac{1 \text{ mm}}{760 \text{ mm}}$

$$q = 28{,}8 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{1}{p\,(W - w)} \text{ lognat } G \text{ cm}^2,$$

wenn man das Gesamtverhältnis

$$\frac{J_1}{i_1} \Big/ \frac{J_2}{i_2} = G$$

setzt.

In dieser Formel wird $W - w$ als Differenz der mittleren Halbkreise $= 1{,}26$ cm gesetzt[2]), p wird nach der obigen Unterteilungsmethode bestimmt (Größenordnung im allgemeinen 0,01 mm), J_1 und i_1 bzw. J_2 und i_2 werden elektrometrisch gemessen. Hierbei tritt lediglich das Verhältnis J_1/i_1 bzw. J_2/i_2 in die Formel ein. Infolgedessen dürfen die Bestrahlungszeiten und die Lichtintensitäten von der Meßperiode 1 zur Meßperiode 2 mit Rücksicht auf irgendwelche praktische Erfordernisse beliebig geändert werden, dagegen sollen im Hinblick auf etwaige kompliziertere Ermüdungserscheinungen die Bestrahlungsverhältnisse innerhalb einer Meßperiode für

1) Eine etwaige Änderung der lichtelektrisch erzeugten Elektronenmenge infolge der Einführung des Gases wirkt nämlich auf die Elektronenmengen in beiden Kreisen im gleichen Verhältnis.

2) Eine Korrektur wegen der verschiedenen Wegmöglichkeiten nach dem Schema „1914“ S. 988ff. bleibt unter 1 Proz.

J und i die gleichen seien. Die Elektrometerempfindlichkeiten für J und i dürfen sich unterscheiden; diese Verschiedenheit geht überhaupt nicht in die Rechnung ein, wenn sie nur für beide Meßperioden dieselbe ist.

IV. Messungsbeispiele.

Als Beispiele seien zwei ausführliche Messungsreihen angeführt, die so gewählt sind, daß auch die im folgenden Abschnitt besprochenen Gesichtspunkte klar hervortreten.

1. *Wasserstoff.* Strahlungsquelle: Quecksilberlampe; Partialdruck der eingelassenen Gasmenge für 0° 0,00410 mm (dieser Wert ist nur etwa halb so groß wie die meist benutzten Werte für Wasserstoff; er gibt an sich ein weniger sicheres Endresultat, ist aber hier gewählt worden, um den etwaigen Einfluß einer langsamen Änderung der Gasfüllung [vgl. V, 1] besser hervortreten zu lassen). Benutzte Magnetfelder: 3,65 Gauss für den kleineren Kreis (i-Werte), 2,58 Gauss für den größeren Kreis (J-Werte). Diese Magnetfelder entsprechen den Maxima der Geschwindigkeitsverteilungskurven im Sinne der Tab. IV und V „1914". Durch ihre Anlegung werden in beiden Kreisbahnen dieselben Elektronen, nämlich die maximal vertretenen Elektronen, zur Messung gebracht.[1])

Die unmittelbaren Ablesungen sind noch zu vermindern um diejenigen Elektronenmengen, welche nicht auf den vom bestrahlten Zinkstreifen Z ausgehenden Kreisbahnen, sondern infolge der Bestrahlung mit zerstreutem Licht aus dem Innern der Abteile des Meßkästchens nach den Auffangekäfigen gelangen. Diese Elektronenmengen werden entsprechend „1914" S. 982 durch Umkehrung der Magnetfelder festgestellt und bei der schließlichen Berechnung in Abzug gebracht. Die betreffenden Messungen sind in der folgenden Tabelle mit — markiert.

Um Fehler durch die Gegenspannung der sich aufladenden Käfige zu vermeiden (vgl. V, 4), werden die Ausschläge möglichst auf den gleichen Voltbetrag (etwa $^1/_{20}$ Volt) gebracht.

1) Über die Abweichung des Verhältnisses 2,58/3,65 von dem umgekehrten Verhältnis der beiden Kreisradien 0,8/1,2 vgl. S. 531 Anm. 2. In die Endresultate gehen die Magnetfelder nur ein, soweit es sich um die Berechnung der Elektronengeschwindigkeiten in Volt handelt.

Dies geschieht durch Vervierfachung der Gesamtkapazität für alle i-Messungen in beiden Meßperioden.[1]) Außerdem ist während der ersten Meßperiode das Licht durch einen Schleier auf 0,77 geschwächt, um auch nach Einlaß des Gases nach Möglichkeit die gleichen Aufladepotentiale zu erhalten. Eine Änderung der Bestrahlungszeit von Meßperiode 1 zu Meßperiode 2, wie sie bei den höheren Gasdrucken außerdem noch angewandt wurde, war hier nicht notwendig; die Bestrahlungszeit betrug in beiden Meßperioden 15 Sekunden.

Zur Ermittlung von Änderungen des Gasinhalts während der eigentlichen Messungen ist vor die Meßperiode 1 eine Vorperiode und hinter die Meßperiode 2 eine Nachperiode, beide in einem Zeitabstande von etwa 2 Stunden, gelegt; $\Delta\tau$ bedeutet den mittleren Zeitabstand der betreffenden Periode vom Augenblick der Gaseinfüllung.

Die Messungen folgen einander derart, daß jedesmal zwei i-Werte den zugehörigen J-Wert einschließen. Die Werte der Vertikalreihe J/i korr. sind gebildet durch Division der J-Werte durch das Mittel der beiden benachbarten i-Werte nach Abzug der zugehörigen — -Werte. (Vgl. Tab. 1).

Mittels der Tabellenwerte lassen sich die Verhältnisse J_1/i_1 und J_2/i_2 auf den Zeitpunkt der Gaseinführung vor- und zurückrechnen:

$$\frac{J_1}{i_1} = 1{,}288 - (1{,}36 - 1{,}29) \cdot \frac{14}{153} = 1{,}282,$$

$$\frac{J_2}{i_2} = 1{,}010 - (1{,}01 - 0{,}980) \cdot \frac{14}{114} = 1{,}014.$$

Man erhält so $G = 1{,}264$ statt 1,275 ohne diese Berücksichtigung der während der eigentlichen Meßperioden hinzukommenden Gasmenge.

---

1) Die i-Werte betragen aus den einfachsten geometrischen Gründen das $1{,}5^2 = 2{,}25$fache der entsprechenden J-Werte, ein Faktor, der durch genauere Berücksichtigung der geometrischen Verhältnisse sowie durch den stärkeren Einfluß des Dampfresiduums auf dem längeren Wege bei gutem „Vakuum" auf etwa 3 vergrößert wird. Aus der Rechnung fällt dieser Faktor naturgemäß völlig heraus.

Tabelle I.

Periode	Ausschläge in mm i	Ausschläge in mm J	J/i korr.	J/i Mittel
	2,3(−)	2,1(−)		
	119,0			
Vorperiode	114,6	156,8	$1,35_2$	
	114,4	154,1	$1,35_3$	
$\Delta\tau = -153'$	113,6	154,4	$1,36_4$	$1,35_6$
	112,2	151,8	$1,35_5$	
	2,9(−)	2,7(−)		
	2,6(−)	2,2(−)		
Periode 1	106,4			
	107,7	135,8	$1,27_9$	$J_1/i_1 =$
$\Delta\tau = -14'$	107,2	136,3	$1,27_8$	$1,28_8$
	105,8	135,8	$1,28_5$	
	105,3	136,1	$1,30_0$	
Gaseinführung				
	108,0			
	106,6	107,6	$1,01_4$	
Periode 2	107,0	106,3	$1,00_6$	$J_2/i_2 =$
	105,8	106,5	$1,01_2$	
$\Delta\tau = +14'$	103,6	104,6	$1,01_0$	$1,01_0$
	4,0(−)	2,9(−)		
	3,8(−)	2,2(−)		
Nachperiode	102,0			
	100,8	98,1	$0,98_3$	
$\Delta\tau = +114'$	101,1	96,9	$0,97_4$	$0,98_0$
	99,8	95,8	$0,96_8$	
	98,8	97,3	$0,99_6$	

Hieraus ergibt sich

$$q = 28{,}8 \cdot 10^{-18} \frac{\text{lognat } 1{,}264}{1{,}26 \cdot 0{,}00410} = 131\,0 \cdot 10^{-18}\ \text{cm}^2,$$

$$„a“ = 45{,}4$$

für eine Elektronengeschwindigkeit von 0,85 Volt.

2. *Argon.* Strahlungsquelle: Quecksilberlampe; Partialdruck der eingelassenen Gasmenge für 0° 0,0682 mm. Der Zweck der Versuchsreihe ist neben der Bestimmung von q die Verfolgung der Veränderungen der Geschwindigkeitsverteilungskurven in der Nähe der Maxima (vgl. V, 8). Die

zur Bildung von J/i benutzten Werte mit den zugehörigen Magnetfeldern 2,43 und 3,43 Gauss sind in der Tabelle unterstrichen.

Tabelle II.

Magnetfeld in Gauss	Ausschläge in mm J	Ausschläge in mm i	J/i korr.	Relative Elektronenmenge bezogen auf $J = 100$	Relative Elektronenmenge bezogen auf $i = 100$
− 2,43	1,8(−)				
2,43	113,4			100	
2,19	85,0			74,5	
2,67	107,0			94,2	
2,43	113,5			100	
− 3,43		2,0(−)			
3,43		80,2			100
3,08		68,8	110,3/77,4		86,0
3,43		79,1	$= 1{,}42_5$		100
3,76		77,0			97,4
3,43		78,9			100
2,43	110,8			100	
2,67	108,5			98,0	
2,19	75,4			68,2	
2,43	110,6			100	
		Gaseinführung			
− 2,43	2,0(−)				
2,43	106,7			100	
2,19	99,5			92,7	
2,67	76,8			71,0	
2,43	107,6			100	
− 3,43		4,9(−)			
3,43		95,4			100
3,08		90,7	104,1/89,4		95,8
3,43		93,5	$= 1{,}16_4$		100
3,76		77,8			82,1
3,43		93,9			100
2,43	106,1			100	
2,67	77,7			73,4	
2,19	91,0			86,3	
2,43	104,0			100	

Man erhält für G 1,224 oder nach Abzug von 1 Proz. für die Druckänderung während der Meßperioden im Sinne des vorhergehenden Beispiels 1,212.

Daraus ergeben sich:

$q = 64{,}5 \cdot 10^{-16}$ cm^2 } für 0,75 Volt
„a" = 2,24 } Elektronengeschwindigkeit.

Die Geschwindigkeitsverteilungskurven in der Nähe der Maxima sind in Fig. 3 a, b dargestellt.[1]) Über ihre Verwertung vgl. den folgenden Abschnitt unter 8.

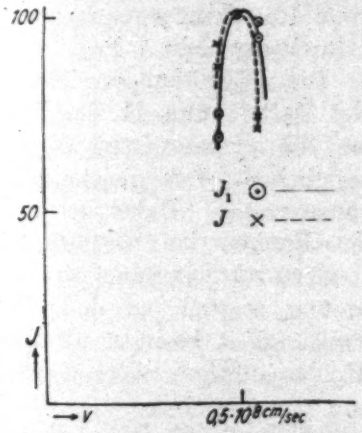


Fig. 3a.

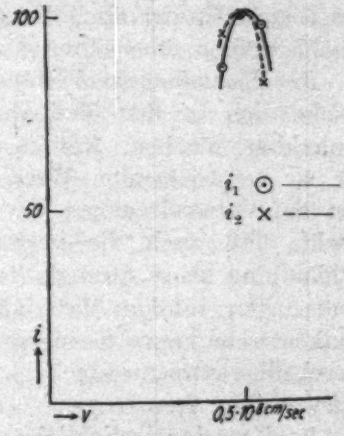


Fig. 3b.

Das letzte Beispiel ist weniger geeignet, die Verhältnisse J_1/i_1 und J_2/i_2 zu bestimmen, als die eigentlichen Meßperioden des Beispiels 1, da hier der Vergleich der Werte nicht so unmittelbar erfolgt. Die beiden Schemata wurden daher im allgemeinen miteinander kombiniert, wobei je nach der Lage des Einzelfalls der Hauptwert auf die Ermittlung der Größe G oder auf die Bestimmung der Verteilungskurven gelegt wurde; die Nachprüfung des Einflusses der Druckänderungen während der eigentlichen Meßperioden erfolgte nur von Zeit zu Zeit nach dem Schema der Vor- und Nachperiode des Beispiels 1.

---

1) Der Abszissenmaßstab in dieser Figur, sowie in den Fig. 5 und 6, ist abgerundet; er müßte genau genommen den etwas verschiedenen Magnetfeldern angepaßt sein.

Bei allen Messungen wurde der Grundsatz festgehalten, daß jeder Wert von seinen Vergleichswerten zeitlich eingeschlossen wird.

V. Fehlerquellen und Kontrollmaßnahmen.

1. *Änderungen des Gasinhalts.* Als Mittel öfterer Kontrollen ergab sich mit geringen Schwankungen, daß bei dem Schema des Beispiels IV, 1 das unmittelbar gefundene G durch Verminderung um $^3/_4$ Proz. auf den Zeitpunkt der Gaseinführung umgerechnet werden kann. Bei längeren Versuchsreihen mit einem größeren mittleren Zeitabstand vom Moment der Gaseinführung als 15′ muß diese Korrektur entsprechend erhöht werden, überschreitet aber durchweg nicht 1 Proz.

2. *Ermüdungserscheinungen.* Die Ermüdungseinflüsse, welche sich in den Meßreihen der Tab. I und II deutlich bemerkbar machen, werden durch die symmetrische Folge der zu vergleichenden Werte ausgeglichen. Das gleiche gilt von den Veränderungen der Lichtintensität. Dabei sei bemerkt, daß auch die verwandten Funken bei sorgfältiger Behandlung keine sprunghaften, sondern nur langsame stetige Änderungen infolge Materialabnutzung zeigten, so daß die Funkenwerte kaum geringere Zuverlässigkeit besitzen als die Quecksilberlampenwerte (vgl. z. B. den stetigen Verlauf der Kurven (Fig. 6).

3. *Kontaktpotentialdifferenzen* sind durch die Herstellung des ganzen Meßkästchens aus ein und demselben Zinkblech vermieden. Kurz vor jeder neuen Zusammensetzung werden alle Teile noch einmal durch Behandlung mit ungebrauchtem, nicht zu grobem, aber doch merklich angreifendem Schmirgelpapier auf die gleiche Oberflächenbeschaffenheit gebracht.

4. *Einfluß der Käfigaufladung.* Die Auffangung der Elektronen in den Käfigen A und a ergibt eine Gegenspannung, welche die aufgefangene Elektrizitätsmenge herabsetzen muß. Durch Anlegen von 0,1 Volt Gegenspannung aus einer *äußeren* Spannungsquelle erhält man eine Verminderung der aufgefangenen Elektronenzahl sowohl für J wie für i von rund 2 Proz., wobei es nichts ausmacht, ob der Versuch im Dampfresiduum oder bei der üblichen Gasfüllung ausgeführt wird (vgl. auch Fig. 4). Dieser Wert erniedrigt sich bei den Meßversuchen auf etwa 0,5 Proz., da

die benutzten Aufladungen 0,05 Volt im allgemeinen nicht übersteigen, und da nur die durchschnittliche Gegenspannung während des Versuchs (0,05 Volt : 2) einzusetzen ist. Hält man nach Art des Beispiels IV, 1 alle Elektronenausschläge möglichst auf der gleichen Größenordnung, so fällt dieser Fehler aus G praktisch ganz heraus.

5. *Raumladungen.* Durch den Elektronenstrahl selbst und durch Trägerbildung längs der Elektronenbahnen wird eine gewisse Raumladung geschaffen, welche ein schwächeres Spannungsgefälle in Richtung der Bahn und ein stärkeres Gefälle quer zur Bahn besitzt und die Elektronen störend beeinflussen muß. Dieser Einfluß muß für i größer sein als für J, da i schon im Vakuum etwa dreimal so groß ist wie J und eine entsprechend größere Raumladung bedingt. Die Größe dieses Einflusses läßt sich rechnerisch schwer feststellen, ist aber praktisch jedenfalls zu vernachlässigen, wie sich aus den folgenden Beobachtungen ergibt:

a) q wird unabhängig vom benutzten Gasdruck gefunden, während der Fehler mit dem Gasdruck infolge der erhöhten Trägerzahl wachsen müßte (vgl. Tab. III, Nr. 1, 2, 3; 4, 7—13, 14; 4, 5, 6, letztere in Verbindung mit dem Text VI, 1).

b) q wird unabhängig von der Menge der emittierten Elektronen gefunden (vgl. Tab. III, Nr. 7—13), bei welchen infolge von Ermüdung die Elektronenmengen auf die Hälfte herabgesunken waren.

c) Die Anwendung von Quecksilberlampenlicht und Funkenlicht macht für die Größe von G innerhalb der Versuchsfehler keinen Unterschied, wie durch einen unmittelbaren Kontrollversuch an Wasserstoff bis auf 1 bis 2 Proz. festgestellt werden konnte, während die momentane Raumdichte im zweiten Falle ungleich größer ist.

6. *Falsche Elektronen.* Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich die Elektronen, welche infolge zerstreuten Lichtes in die Auffangekäfige gelangen oder auch von ihnen fortgehen, und die Elektronen, welche aus dem letzten Teil der eigentlichen Elektronenbahn stammen, ohne nach ihrer Geschwindigkeit und Richtung dem Strahle noch wirklich anzugehören; zu letzteren rechnen auch durch Raumladung beschleunigte Träger. Die zuerst angeführten Elektronen werden durch Umkehrung des Magnetfeldes, d. h. durch Aus-

schaltung des Hauptelektronenstrahles, gemessen und in Abzug gebracht (vgl. die — - Werte der Tab. I und II). Die zweite Frage verlangt eine besondere Untersuchung, nämlich die Aufnahme der Voltverteilungskurve durch Anlegung variabler Spannungsdifferenzen zwischen dem Auffangekäfig und den übrigen Teilen des Meßkästchens.

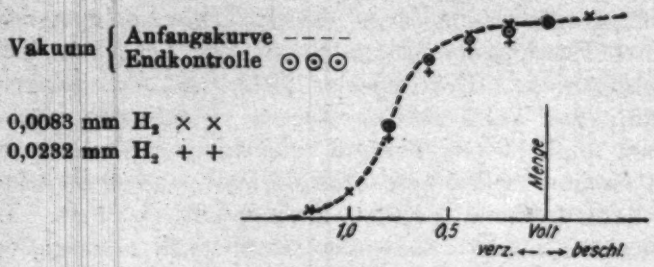


Fig. 4.

Eine solche Kurve ist in Fig. 4 bei 0,8 Volt mittlerer Elektronengeschwindigkeit für i wiedergegeben, da bei i diese Fehlerquelle stärker hervortreten muß als bei J. Die gestrichelte Kurve bezieht sich auf das „Vakuum"; die experimentellen Punkte, welche namentlich in der Nähe von 0 Volt sehr eng liegen, sind hier fortgelassen, um die Gesamtübersicht nicht zu erschweren. Der trotz einheitlicher Geschwindigkeit schon bei geringen Gegenspannungen einsetzende Abfall der Kurve erklärt sich dadurch, daß der Strahl sehr schmal ist, und daß infolgedessen Elektronen, welche nicht parallel zum mittleren Kreis laufen (vgl. 1914 S. 989) durch die Wirkung des Gegenfeldes seitlich aus dem Strahle herausgedrängt werden. Die $\times\times$ beziehen sich auf eine Wasserstoffüllung von 0,0083 mm Druck, wie er bei den Hauptmessungen gebräuchlich war; die $\odot\odot$ sind Kontrollpunkte für die gestrichelte Kurve nach Wiederherstellung des „Vakuums". Hiernach zeigt sich kein Einfluß der Gasfüllung auf die Voltverteilungskurve. Genau das gleiche galt für die J-Werte. Es würde deswegen keinen Unterschied in der Bestimmung von G machen, ob man den Käfigen das Anfangspotential 0 oder ob man ihnen eine beliebige Gegenspannung bis nahe an die Eigengeschwindigkeit der benutzten Elektronen gibt. Daraus geht hervor, daß bei der Messung von G andere Elektronen als die den

eigentlichen Kreisbahnen zugehörigen keine merkliche Rolle spielen.[1])

Erst bei noch höheren Gasdrucken, wie sie für die eigentlichen Messungen nicht mehr benutzt worden sind, zeigt sich der theoretisch zu erwartende Einfluß, wie die $+\,+$ beweisen, welche einem Druck von 0,0232 mm entsprechen. Bei diesem höheren Gasdruck würden also tatsächlich auch Elektronen bzw. Träger geringerer Geschwindigkeit in den Käfig gelangen als beim „Vakuum" und das Versuchsresultat fälschen, soweit sich die Fehler nicht durch die analoge Änderung der Voltverteilungskurve für J wieder herausheben.

8. *Änderung der Geschwindigkeitsverteilungskurven bei Gaseinfüllung.* Die Geschwindigkeitsverteilungskurven für i und J besitzen infolge der bei dieser Anordnung unvermeidlichen geometrischen Unähnlichkeit der beiden Elektronenbahnen verschiedene Formen[2]), in dem Sinne, daß die J-Kurve etwas schmäler ist und im An- und Abstieg etwas steiler verläuft als die i-Kurve.

Bleibt jetzt die Kurvenform und Kurvenlage beim Gaseinlaß die gleiche, wie dies für H_2 experimentell bewiesen werden konnte (vgl. Fig. 5), so ist diese Verschiedenheit zwischen J und i für das Endresultat G belanglos, selbst dann, wenn nicht, wie gewöhnlich, die Maximalordinaten zum Vergleich benutzt werden. Verschiebt sich dagegen das Maximum aus irgendwelchen erst weiter unten zu besprechenden Gründen, wie in Fig. 3, so ändern sich die zu einer bestimmten Abszisse

---

1) Die einzige Andeutung einer Trägerwirkung liegt in dem geringen Knick bei 0 Volt, welcher bei der J-Kurve noch etwas stärker hervortritt, sowie in der kleinen Verstärkung dieses Knicks bei Gaseinfüllung.

2) Maßgebend ist hierbei nach den Erörterungen „1914" S. 988ff. namentlich die Höhe der Blenden und des bestrahlten Streifens im Verhältnis zum Kreisradius. Die hierdurch gegebenen Schraubenbahnen sind für i steiler als für J und bedingen daher eine stärkere Verbreiterung der i-Kurven als der J-Kurven gegenüber der idealen Geschwindigkeitsverteilung. In diesem Sinne liegt auch die Abweichung des Verhältnisses der zu den Maximalordinaten von i und J gehörigen Magnetfelder von dem umgekehrten Verhältnis der Kreisbahnradien. Die höchst umständliche Durchrechnung aller dieser Verhältnisse nach dem Schema „1914" ist nicht erfolgt, da die Kurvenformen hier nicht Selbstzweck sind.

gehörigen Ordinaten (Elektrizitätsmengen) für die steilere J-Kurve stärker als für die flachere i-Kurve. Hat man z. B. im Vakuum die Maxima der beiden Kurven verglichen, so sinkt bei einer Verschiebung der Geschwindigkeitsverteilung der J-Wert stärker als der i-Wert und G wird zu groß. Man umgeht diesen Fehler oder drückt ihn doch mindestens auf ein praktisch nicht mehr in Betracht kommendes Maß herab, wenn man den Vergleichspunkt so legt, daß er anfangs gerade so weit links wie nach dem Gaseinlaß rechts vom Maximum zu liegen kommt, wobei der Sinn der Verschiebung wie in Fig. 3 angenommen ist. Hierdurch werden beide J-Werte um den gleichen prozentualen Betrag gegenüber dem jeweils zugehörigen i-Wert geändert, soweit die Verschiedenheit der beiden Kurvenformen in Betracht kommt.

Diese Vorsichtsmaßregel ist bei allen Messungen berücksichtigt. Zu ihrer Durchführung ist die dauernde Nachprüfung der Kurvenformen nach Art des Beispiels IV, 2 erforderlich. Das Ergebnis dieses Beispiels ist in Fig. 3 graphisch dargestellt; der Schnittpunkt der beiden J-Kurven bzw. der beiden i-Kurven ist der gesuchte Vergleichspunkt, bei welchem G unabhängig von der geometrischen Unähnlichkeit der beiden Elektronenbahnen wird. Erfüllt der gefundene Schnittpunkt die obigen Symmetriebedingungen nicht von vornherein mit genügender Genauigkeit, so läßt sich die noch nötige Korrektur leicht aus den Kurvenformen graphisch ermitteln.

VI. Versuchsergebnisse.

1. *Die Wirkungsquerschnitte der verschiedenen Gase.* In der nachstehenden Tab. III sind die gefundenen Werte zusammengestellt.

Im einzelnen ist folgendes zu bemerken.

Luft: Die Werte für Luft stellen Vorversuche dar, bei welchen noch nicht alle Vorsichtsmaßregeln der späteren Messungen angewandt worden sind. Sie sind hier nur deswegen aufgenommen, um die Unabhängigkeit des q-Wertes vom Druck und damit die Richtigkeit der experimentellen und theoretischen Voraussetzungen zu beweisen.

Wasserstoff: Dieses Gas wurde in erster Linie dazu verwandt, die Methode in ihren verschiedenen Einzelheiten zu

Tabelle III.

Lfd. Nr.	Gas	Gasdruck in 10^{-4} mm	Geschwindigkeit in Volt	$G = \frac{J_1}{i_1} / \frac{J_2}{i_2}$	Wirkungsquerschnitt q in 10^{-13} cm²	Wirkungsquerschnitt q in 10^{-13} cm² (Mittel)	Wirkungsquerschnitt q in Einheiten des gaskin. Querschnitts[1]	„a“ (Mittel)
1		33		1,136	890			
2	Luft	67	0,80	1,290	880	890	1,4	31,0
3		131		1,681	910			
4		41,0		1,264	1310			
5		40,3		1,225	1150			
6		39,5		1,235	1220			
7		75,0		1,51	1260			
8		76,5		1,56	1330			
9	H_2	78,1	0,85	1,522	1230			
10		79,1		1,54	1250	1260	3,4	43,8
11		83,1		1,583	1260			
12		81,4		1,588	1300			
13		77,3		1,526	1250			
14		121		1,905	1220			
15		96,3		1,44	860			
16	N_2	102	0,75	1,53	950	920	1,4	31,9
17		104		1,53	940			
18		151		1,43	540			
19	*He*	138	0,75	1,41	570	550	2,3	19,1
20		143		1,41	550			
21		111	0,80	1,055	(110)			
22		711		1,27	77			
23	*A*	682	0,75	1,21	64	75	0,14	2,6
24		345		1,130	81			
25		470	1,1[2])	1,391	160	160	0,3	5,5

prüfen. Nr. 4, 5, 6; 7—13 und 14 zeigen wieder die Unabhängigkeit der Werte vom Gasdruck. Nr. 5 und 6 sind so erhalten, daß die Gaseinführung nicht in das „Vakuum“, sondern zu dem bereits vorhandenen Gasdruck des jeweils vorhergehenden Versuchs, also so 0,00410 bzw. zu 0,00410 + 0,00403 mm erfolgte. Diese Werte sind an sich weniger sicher, da der Einfluß des zerstreuten Lichtes mit dem Gesamtdruck, das Verhältnis G aber mit dem Zusatzdruck wächst, zeigen aber doch deutlich auch von diesem Gesichtspunkt aus die Einwandfreiheit der Methode.

1) Die gaskinetischen Querschnitte sind aus den Werten „Qt corr“ der Landolt-Börnsteinschen Tabellen 4. Aufl. entnommen.

2) Al-Al-Funke.

Zur Mittelnahme sind hier nur die Werte der mittleren Gruppe, Nr. 7—18 mit dem praktisch günstigsten Gasdruck verwandt.

Stickstoff: Die drei angeführten Werte sind unter gleichen Bedingungen aufgenommen und zur Mittelbildung verwandt.

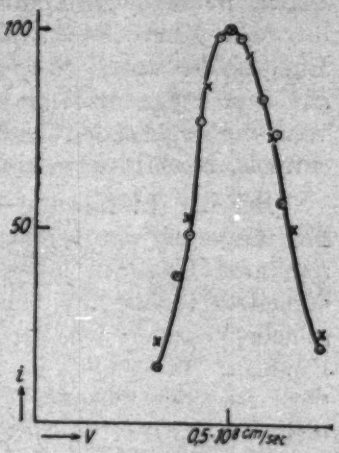
Helium: Mittelbildung wie bei Stickstoff.

Argon: Der Wert Nr. 21 ist, absolut genommen, unsicher, wie schon aus der Kleinheit von G folgt; er soll nur zeigen, daß ein Druck von der bei den übrigen Gasen benutzten Größenordnung bei Argon fast unwirksam ist. Die Werte Nr. 22, 23, 24 sind zur Mittelbildung für die Durchschnittsgeschwindigkeit 0,75 Volt benutzt; der Wert Nr. 25 entspricht einer merklich höheren Geschwindigkeit. Die relativ großen Schwankungen der drei Argonwerte für 0,75 Volt erklären sich durch die ausnahmsweise starke Änderung der Geschwindigkeitsverteilungskurve bei der Gaseinführung, wodurch die Messungen wesentlich erschwert werden. Die Fehlergrenzen für die Argonwerte sind infolgedessen höher einzuschätzen als die der übrigen Daten.

2. *Die Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte von der Elektronengeschwindigkeit.* Die benutzte Methode ist in ihrer jetzigen Form weniger zur Veränderung der Elektronengeschwindigkeit geeignet, da der Wechsel der Lichtquelle nur geringe Unterschiede in der Lage der Maxima hervorruft, und da die Ausnutzung der ganzen Verteilungskurven weniger sichere Resultate ergeben würde. Die ganze Frage bildet zur Zeit den Gegenstand einer besonderen Untersuchung, bei welcher unter Beibehaltung ähnlicher Versuchsbedingungen die Beschleunigung der Elektronen durch ein elektrisches Feld vorgesehen ist. Immerhin ergeben sich aber auch schon jetzt wertvolle Anhaltspunkte.

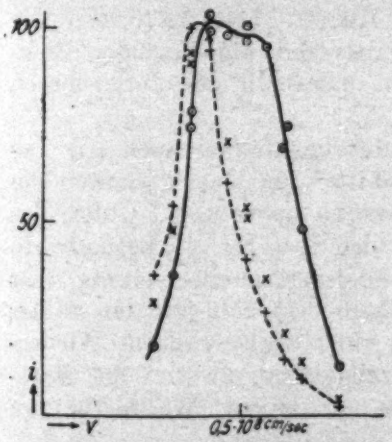
Wir können zwei Hauptfälle unterscheiden: Wasserstoff und Argon. Der Wirkungsquerschnitt des Wasserstoffmoleküls bleibt innerhalb des untersuchten Gebiets konstant, wie, entsprechend den weiter unten folgenden Schlüssen, aus der Identität der Verteilungskurven mit und ohne Wasserstofffüllung hervorgeht; vgl. Fig. 5, in welcher die i-Verteilungskurve vor ($\odot\odot$) und nach ($\times\times$) der Wasserstoffeinführung dargestellt ist.

Dagegen sinkt der Wirkungsquerschnitt des Argonatoms innerhalb des untersuchten Gebietes schnell mit abnehmender Strahlgeschwindigkeit. Dies geht aus Tab. III hervor, welche für die Geschwindigkeiten 1,1 und 0,75 Volt die Werte 75 und $160 \cdot 10^{-18}$ cm² für q ergibt, und folgt außerdem aus der Formänderung der Verteilungskurven bei der Einführung von Argon, wie Fig. 6 zeigt. Der Druck ist hier absichtlich sehr hoch gewählt, 0,117 mm. Als Lichtquelle ist ein Mg-Al-Funke verwandt, um ein möglichst großes Lichtgebiet und damit eine möglichst breite Geschwindigkeitsverteilungskurve zu erhalten. Die Einzelmaxima des Mg- und des Al-Spektrums sind in den beiden Vakuumkurven noch deutlich zu unterscheiden. Ihre Wirkung ist durch entsprechende Abpassung



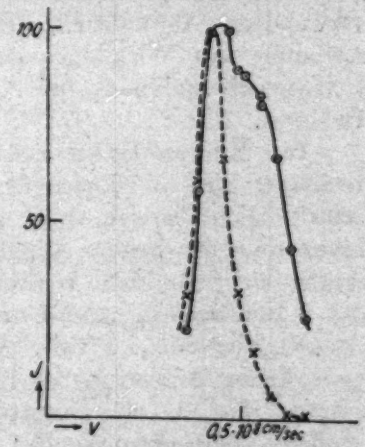
i_1 ⊙⊙ i_2 × × (0,083 mm H_2)

Fig. 5.



i_1 ⊙ i_2 × 0,117 mm A
i_3 + 0,164 mm A

Fig. 6a.



J_0 ⊙
J_2 × 0,117 mm A

Fig. 6b.

der Linsenabstände auf ungefähr die gleiche Größe gebracht. Die beiden Vakuumkurven für J und i, welche auf gleiche

Geschwindigkeit und gleiche Maximalordinate umgerechnet sind, unterscheiden sich über den geometrisch begründeten Betrag hinaus (vgl. S. 531 Anm. 2) durch ihre Breite, da sich bei der J-Kurve bereits jetzt eine Herabdrückung der rechten Kurvenhälfte durch stärkere Absorption der schnelleren Strahlen auf dem längeren Wege durch das Dampfresiduum, welches vom vorhergehenden Versuche her noch Reste von Argon enthielt, bemerkbar macht.

Bei der Einführung des Argons ergibt sich eine starke Formänderung der beiden Kurven. Diese Änderung kann an sich zwei Ursachen haben: eine Verschiebung der Geschwindigkeitsverteilung des lichtelektrischen Effekts und eine Verschiedenheit der Argonwirkung für schnellere und langsamere Strahlen. Tatsächlich ist der zweite Grund der alleinige oder doch ausschlaggebende. Dies geht, abgesehen von der sonst nicht erklärbaren gleichzeitigen Verschmälerung der Kurven, daraus hervor, daß bei einer Erhöhung des Drucks (vgl. Fig. 6) um etwa 50 Proz. die i-Kurve, bei welcher jetzt der kürzere Weg durch den höheren Druck ausgeglichen ist, sich wieder weiter nach links verschiebt und mit ihrem Maximum auf dem gleichen Punkt zu liegen kommt, wie die J-Kurve beim zuerst verwandten Argondruck. Die Kurven bestätigen also die Abnahme des Wirkungsquerschnitts mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit bei Argon innerhalb des untersuchten Gebietes.

Die Kurven lassen sich selbstverständlich auch zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte für das gesamte Geschwindigkeitsbereich ihrer Abszissen verwerten. Unter Zuhilfenahme der beiden Angaben der Tab. III als Bezugswerte ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt ein weiterer fast auf 0 hinzeigender Abfall unterhalb 0,75 Volt und ein steiler Anstieg oberhalb 1,1 Volt. Von einer zahlenmäßigen Wiedergabe dieser Ergebnisse ist hier abgesehen, da von der Fortsetzung der Arbeit unmittelbar gewonnene Werte für ein größeres Beobachtungsgebiet zu erwarten sind.

Die übrigen untersuchten Gase liegen in bezug auf die Größe der Kurvenformänderung infolge der Gaseinführung zwischen Wasserstoff und Argon. Bei Helium wird kaum die Spur einer Formänderung innerhalb des untersuchten Gebietes beobachtet. Der Wirkungsquerschnitt müßte also fast

die gleiche Konstanz besitzen wie der des Wasserstoffs. Stickstoff dagegen zeigt eine Formänderung der Geschwindigkeitsverteilungskurve im gleichen Sinne wie Argon. Sein Wirkungsquerschnitt müßte also innerhalb des untersuchten Gebiets bei abnehmender Elektronengeschwindigkeit ebenfalls kleiner werden. Immerhin ist die Formänderung hier so gering, daß es sich auch um indirekte lichtelektrische Erscheinungen handeln könnte. Die bereits erwähnte Fortsetzung dieser Arbeit dürfte auch hier Aufklärung bringen.

VII. Allgemeine Schlußfolgerungen.

1. *Der Vergleich des gesamten Wirkungsquerschnitts mit dem absorbierenden Querschnitt.* In der folgenden Tab. IV sind für H_2, N_2, *He* und *A* die Werte dieser Arbeit mit den neuesten Absorptionswerten Hrn. Hans Ferd. Mayers (vgl. Anm. 2 S. 531) für annähernd gleiche Elektronengeschwindigkeit *V* zusammengestellt. Zum Vergleich sind hierbei die Querschnittssummen für die Moleküle eines cm³ bei 1 mm Hg-Druck und 0°C. gewählt.

Tabelle IV.

Gas	*a*	*V*	„*a*“	*V*
H_2	43,7 49,3 } 46,7 47,2	0	43,8	0,85
	47,9	1,0		
N_2	31,8 32,6 } 32,2	0		
	32,6	0,5	31,9	0,75
	31,3 32,3 } 31,8	1,0		
He	18,3 19,2 } 18,8	0,2	19,1	0,75
	20,3 20,2 } 20,3	2,0		
A	2,5	0,2	2,6	0,75
	6,3	0,7	5,5	1,1
	9,7	1,2		

Bedenkt man die völlige Verschiedenheit der beiden Methoden und die große Empfindlichkeit der in beiden Fällen benutzten logarithmischen Differenzformel gegen alle Fehlerquellen, so kann man „*a*“ und *a* für H_2, N_2 und *He* innerhalb der Meßgenauigkeiten als gleich ansehen. Mit anderen Worten:

der gesamte Wirkungsquerschnitt ist für diese geringen Elektronengeschwindigkeiten nicht größer als der absorbierende Querschnitt.

Die Argonwerte zeigen wesentlich schlechtere Übereinstimmung, was zum Teil durch die größere Unsicherheit meiner Daten, zum Teil durch die geringere Homogenität der Mayerschen Elektronengeschwindigkeit bedingt sein mag. Jedenfalls bestätigt der Vergleich die außerordentliche Kleinheit des Argonquerschnitts für geringe Elektronengeschwindigkeiten und liefert keinen Widerspruch gegen die Identität des Wirkungsquerschnitts mit dem absorbierenden Querschnitt, da „a" *kleiner* als a und nicht größer als a gefunden wird.

Die Gleichheit der „a" und a bedeutet mit anderen Worten das Fehlen der Diffusion bei den untersuchten Elektronengeschwindigkeiten. Wie außerordentlich verschieden sich in dieser Beziehung diese Strahlen gegenüber den Kathodenstrahlen des Vakuumrohrs von etwa 0,35 Lichtgeschwindigkeit verhalten, zeigt folgende Zusammenstellung.[1])

Die Elektronen von etwa 1 Volt Geschwindigkeit werden auf dem Wege des kleinen Halbkreises von rund 2,5 cm Länge bei der am häufigsten benutzten Wasserstoffüllung von 0,0080 mm auf das rund 0,4fache vermindert.

Zur gleichen Verminderung sind für die Kathodenstrahlen von 0,35 Lichtgeschwindigkeit (34300 Volt) rund 0,0002 cm Al erforderlich. Von dieser Strecke durchlaufen die Strahlen nur $^1/_{50}$, ohne wesentliche Richtungsänderung (Parallelfalldicke 0,000004 cm). Bei $^2/_3$ dieser Strecke haben sie bereits den vollen Höchstwert der Rückdiffusion erreicht (Rückdiffusionsdicke 0,00014 cm). Schon viel früher zeigen sie vollständig ausgebildete Diffusion mit einem Umwegfaktor von 1,8 (Normalfalldicke nicht angebbar, aber viel kleiner als Rückdiffusionsdicke).

Dem gegenüber ändern die Elektronen von 1 Volt Geschwindigkeit auf dem ganzen Wege bei gleicher Mengenverminderung ihre Richtung überhaupt nicht merklich.

Für die etwaige Anwendung der gefundenen Wirkungsquerschnitte z. B. bei der Berechnung der freien Weglänge der Elektronen in einem Gase sei noch besonders auf den Ver-

1) Die Zahlenwerte für die schnelleren Kathodenstrahlen sind P. Lenard, a. a. O., entnommen. (Taf. VI und Tab. 18.)

gleich der gefundenen Werte mit den gaskinetischen Querschnitten in der vorletzten Spalte der Tab. III hingewiesen.

2. *Die Bedeutung der gewonnenen Ergebnisse für den Begriff der Molekülgrenze.* Das Volumen eines Moleküls (oder Atoms) ist ganz verschieden, je nachdem durch welche Prüfkörper — langsame Kathodenstrahlen, schnelle Kathodenstrahlen, Gasmoleküle von bloßer Temperaturenergie usw. — dieses Volumen bestimmt wird. Vom Standpunkte der klassischen Elektrizitätslehre müßte man dies Volumen streng genommen als unendlich groß bezeichnen, da die elektrischen und magnetischen Wirkungen bis ins Unendliche reichen, und es müßte sich bei der Nachmessung stets um so größer ergeben, je leichter die benutzten Prüfkörper durch elektrische oder magnetische Kräfte beeinflußt werden können.

Demgegenüber weist jedoch das zuerst von Hrn. Lenard nachgewiesene und jetzt wieder von Hrn. Mayer sehr sorgfältig bestätigte Konstantwerden des absorbierenden Querschnitts mit immer mehr abnehmender Elektronengeschwindigkeit auf eine bestimmte Molekülgrenze hin. Diese Grenzbestimmung gilt aber nur für den Absorptionsvorgang und läßt an sich die Möglichkeit eines diesen absorbierenden Querschnitt umgebenden diffundierenden Querschnitts offen, der um so größer zu erwarten wäre, je langsamer, d. h. je leichter ablenkbar die benutzten Elektronen sind. Diese Frage wird durch die obigen Ergebnisse unmittelbar gelöst. Die Identität des Wirkungsquerschnitts mit dem absorbierenden Querschnitt zeigt, daß ein Elektron entweder absorbiert oder überhaupt nicht, weder in der Größe noch der Richtung seiner Geschwindigkeit, beeinflußt wird.[1]) Damit ist auch für das Molekül bzw. Atom eine feste Wirkungsgrenze gegeben, außerhalb deren ein langsames Elektron überhaupt nicht, innerhalb deren es stark beeinflußt wird. Daß es sich hierbei nicht lediglich um eine sehr schnelle Abnahme der Wirkung mit dem Abstande handelt, geht daraus hervor, daß gerade ein elektrostatisch so wenig geschlossenes Gebilde wie Wasserstoff die Konstanz des Querschnitts besonders deutlich zeigt.

Ob es sich hier um eine Quantelung in den Energiewirkungen der Atome oder um eine räumliche Diskontinuität

1) Über die Vorausberechnung dieses Resultats durch Hrn. Lenard vgl. S. 514.

der elektromagnetischen Felder handelt, wie Hr. Lenard sie annimmt, muß vorläufig dahingestellt bleiben.

3. *Die freie Durchlässigkeit des Argonatoms.* Würde man die außerordentliche Kleinheit des absorbierenden Querschnitts beim Argon für kleine Elektronengeschwindigkeiten aus Versuchen ermitteln, bei welchen auch die durch Diffusion abgelenkten Elektronen zur Auffangung und Messung gelangen, wie es entsprechend der Definition der Absorption nach Hrn. Lenard der Fall sein sollte, so bliebe es unbestimmt, ob die vermehrte Durchlässigkeit nicht auf einer Ersetzung der Absorptionswirkung durch Diffusionswirkung (bei streifender Durchquerung) beruht. Diese wichtige Frage wird durch die Art der hier benutzten Methode unmittelbar entschieden. Da die aufgefangenen Elektronen keine Ablenkung aus der Kreisbahn erfahren haben können, so ist damit bewiesen, daß die Verminderung des Wirkungsquerschnitts mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit *eine Erhöhung der völlig freien Durchlässigkeit* des Atoms bedeutet.

Diese Erscheinung läßt sich in Zusammenhang mit der Quantelung der Energiewirkung des Atoms bringen, kann aber vielleicht noch unmittelbarer als ein Zeichen für die Diskontinuität der elektromagnetischen Felder im Atominnern angesehen werden, welches als um so beweisender zu betrachten ist, da es sich hier um sehr langsame, also leicht zu beeinflussende Elektronen handelt.[1]) Der Vorgang selbst scheint magnetischer Natur zu sein, da sonst die Abnahme der Atomwirkung mit der sinkenden Geschwindigkeit der Elektronen nicht verständlich wäre.

Durch diese abnorme Durchlässigkeit des Argonatoms für langsamste Elektronen wird auch die bekannte Kleinheit des Kathodenfalls für Argongas, welcher mit der verhältnismäßig hohen Trägerbildungsspannung im Widerspruch zu stehen scheint, verständlich, indem sich die freie Weglänge der Elektronen mit der Kleinheit der Wirkungsquerschnitte stark erhöht.

Heidelberg, im August 1920.

1) Vgl. P. Lenard, a. a. O. S. 183 und 245, wo diese Anschauungen für die bei der Atomdurchquerung völlig unbeeinflußt bleibenden Elektronen höherer Geschwindigkeit durchgeführt sind.

(Eingegangen 7. September 1920.)

3. *Atomstruktur und Streustrahlung;* *von R. Glocker und M. Kaupp †.*

Infolge der regelmäßigen Anordnung der Elektronen im Atom müssen, wie Debye nachgewiesen hat, auch bei regelloser Orientierung der Atome beim Auftreffen elektromagnetischer Wellen Interferenzeffekte auftreten, so daß die Intensität der von den Atomen zerstreuten Strahlung in bezug auf ihre räumliche Verteilung Maxima und Minima aufweist. Eine quantitative Prüfung der Theorie durch Vergleich mit der experimentellen Erfahrung war zur Zeit des Erscheinens jener Arbeit noch nicht möglich, weil über die Anordnung der Elektronen im Atom noch zu wenig Anhaltspunkte vorhanden waren. Dank der raschen Entwicklung der Röntgenspektroskopie haben sich nunmehr ganz bestimmte Vorstellungen über die Einzelheiten der Atomstruktur herausgebildet, insbesondere in bezug auf die an der Spitze des periodischen Systems stehenden leichtatomigen Elemente, welche wiederholt Gegenstand experimenteller Streustrahlenuntersuchungen waren. Damit ist die Möglichkeit gegeben für bestimmte Atome (z. B. Kohlenstoff, Aluminium) auf Grund der gegenwärtig herrschenden Vorstellungen über ihre atomare Struktur den Streueffekt zu berechnen und das Resultat mit der experimentellen Erfahrung zu vergleichen. Die Ausführung dieser Absicht erfordert zunächst eine Erweiterung der Debyeschen Theorie auf Elektronensysteme, welche aus 2 und 3 Ringen bestehen. Dabei tritt die Schwierigkeit auf, daß die Abstände der Elektronen der verschiedenen Ringe voneinander nicht mehr zeitlich konstant sind, sondern durch periodische Funktionen der Zeit dargestellt werden, weil die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons auf den verschiedenen Ringbahnen verschieden groß ist.

§ 1. Streuwirkung eines aus mehreren konzentrischen komplanaren Kreisringen bestehenden Elektronensystems.

Bei einem Elektronenhaufen, bei dem die gegenseitigen Abstände der Ruhelage, um welche die Elektronen Schwin-

gungsbewegungen ausführen, zeitlich unveränderlich sind, wird nach Debye[1]) unter dem Winkel ϑ gegenüber der Einfallsrichtung der primären Strahlung im Abstand R von dem streuenden Körper der Bruchteil J der auffallenden Strahlungsenergie zerstreut:

$$(1) \qquad J = \frac{N\varepsilon^4 \ (1+\cos^2\vartheta)}{\mu^2 v^4 R^2 \cdot 2} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left[2k s_{m,n} \sin\vartheta/2\right]}{2k s_{m,n} \sin\vartheta/2}.$$

ε Ladung eines Elektrons,
μ Masse eines Elektrons,
v Lichtgeschwindigkeit,
N Zahl der streuenden Atome,
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ Wellenlänge
$s_{m,n}$ Abstand des $m$ten vom $n$ten Elektron.

Vorausgesetzt ist dabei, daß die Lagenänderung eines Elektrons infolge seiner Schwingungsbewegung während der Zeit einer Schwingung der auffallenden Welle klein ist gegenüber der Wellenlänge und daß die Frequenz der Welle groß ist gegenüber der Eigenfrequenz einer Störung des Systems. Bei Anwendung einer primären Strahlung von der Größenordnung der Wellenlänge der Röntgenstrahlen darf erwartet werden, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Bei einer Erweiterung des Debyeschen Ansatzes auf ein Elektronensystem, das aus zwei konzentrischen komplanaren Kreisen besteht, (von den Ellipsenbahnen soll der Einfachheit halber zunächst abgesehen werden) setzt sich die Doppelsumme aus drei Termen zusammen:

T_1 Summierung über die Elektronenabstände $s_{m,n}$ des inneren Ringes
T_2 Summierung über die Elektronenabstände $s_{m',n'}$ des äußeren Ringes,
T_{12} Summierung über die Abstände der Elektronen $\sigma_{n,n'}$ des inneren Ringes von denen des äußeren Ringes.

Die Doppelsumme in Gl. (1) lautet[1]) für einen Elektronenring vom Radius a, der in äquidistanten Abständen von p-Elektronen besetzt ist:

1) P. Debye, Ann. der Physik 46. S. 809. 1915.

$$(2) \qquad T_1 = \sum_m \sum_n \frac{\sin\left[4\varkappa a \sin\vartheta/2 \sin\left(|n-m|\frac{\pi}{p}\right)\right]}{4\varkappa a \sin\vartheta/2 \sin\left(|n-m|\frac{\pi}{p}\right)}$$

oder als einfache Summe angeschrieben, wobei

$$\varrho = 4\varkappa a \sin\vartheta/2$$

ist:

$$(3) \qquad T_1 = p \sum_0^{p-1} \frac{\sin\left[\varrho \sin\frac{n\pi}{p}\right]}{\varrho \sin\frac{n\pi}{p}} = p^2 \Phi_p(\varrho).$$

Analog ergibt sich der zweite Term (Ringradius $a' = c\,a$, Besetzungszahl p')

$$(4) \qquad T_2 = p' \sum_0^{p'-1} \frac{\sin\left[c\varrho \sin\frac{n\pi}{p'}\right]}{c\varrho \sin\frac{n\pi}{p'}} = p'^2 \Phi_{p'}(c\varrho).$$

Bei der Berechnung des Wechselwirkungsgliedes T_{12} möge zunächst angenommen werden, daß die beiden Ringe gegeneinander keinerlei Relativbewegungen ausführen. Der einfachste Fall der Orientierung der beiden Ringe zueinander ist der in Fig. 1 gezeichnete: Es gibt mindestens *einen* Radius, auf dem sowohl ein inneres, als auch ein äußeres Elektron liegt (mit 0 bzw. 0′ bezeichnet). Dann ist der Abstand des $m$ten Elektrons des einen Ringes vom m'ten Elektron des anderen Ringes

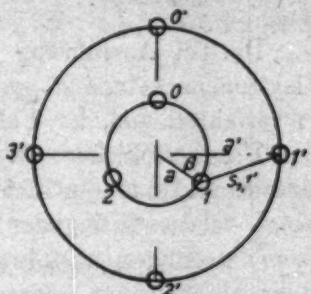


Fig. 1.

$$(5) \qquad \sigma^2_{m,m'} = a^2 + a'^2 - 2a\,a' \cos\beta.$$

a und a' Radius der Ringe, β Centriwinkel zwischen dem durch das $m$te, bzw. m'te Elektron gehenden Radiusvektor. Ist die Zahl der in äquidistanten Abständen über jeden Ring verteilten Elektronen p bzw. p', so wird

$$(6) \qquad \beta = \frac{2\pi}{p} n - \frac{2\pi}{p'} n'.$$

Im allgemeinen werden die Elektronenringe so gegeneinander verdreht sein, daß sich kein Radius findet, auf dem

sowohl ein inneres als auch ein äußeres Elektron liegt. Ist der Centriwinkel zwischen dem Radiusvektor des 0ten und des 0′ten Elektrons φ, so lautet jetzt Gl. (6):

$$\beta = \frac{2\pi}{n} p - \frac{2\pi}{n'} p' - \varphi. \tag{7}$$

Der Abstand des $n$ten und n'ten Elektrons ergibt sich aus Gl. (5) und (7) zu

$$\sigma_{n,n'} = a\sqrt{c^2 + 1 - 2c\cos 2\pi\left(\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} - \frac{\varphi}{2\pi}\right)}, \tag{8}$$

wobei $c = \frac{a'}{a}$ ist.

Das Wechselwirkungsglied T_{12} ist somit aus Gl. (1) und (8) in folgender Weise zu berechnen:

$$\left\{\begin{aligned} T_{12} &= 2\sum_{n=0}^{p-1}\sum_{n'=0}^{p'-1} \frac{\sin\left[2\pi a \sin\vartheta/2\sqrt{c^2+1-2c\cos 2\pi\left(\frac{n}{p}-\frac{n'}{p'}-\frac{\varphi}{2\pi}\right)}\right]}{2\pi a\sin\vartheta/2\sqrt{c^2+1-2c\cos 2\pi\left(\frac{n}{p}-\frac{n'}{p'}-\frac{\varphi}{2\pi}\right)}} \\ &= 2\Psi_{p\,p'}(\varrho). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Da bei Ausführung der Summation in T_1 und T_2 die Elektronenabstände doppelt gezählt werden, ist bei T_{12} analog zu verfahren und der Faktor 2 der Doppelsumme beizufügen.

Die verschiedene Winkelgeschwindigkeit w bzw. w' der inneren und äußeren Elektronen hat zur Folge, daß die beiden Ringe relativ zueinander um einen gemeinsamen Mittelpunkt Drehbewegungen ausführen. Der Winkel φ darf jetzt nicht mehr als konstant angesehen werden; er ist eine periodische Funktion der Zeit. Zur Berechnung von $\varphi = f(t)$ fasse man ein beliebiges Elektron des Ringes mit der kleineren Besetzungszahl ins Auge, im folgendem als Elektron 0 bezeichnet. Befindet sich dieses zur Zeit $t = 0$ gerade in Opposition zum Elektron 0′— des anderen Ringes (d. h. liegen beide Elektronen auf einem und demselben Radiusvektor) und zur Zeit Δt gerade in Opposition zu dem auf das Elektron 0′ nächstfolgenden Elektron 1′, so wird nach Ablauf der Zeit $2\Delta t$ das ins Auge gefaßte Elektron sich in Opposition zum Elektron 2′ befinden usf., d. h. jedesmal nach Ablauf der Zeit Δt stellt sich in bezug auf die Summenbildung der Elektronenabstände wieder der gleiche Wert ein, wie zur Zeit $t = 0$. Ist τ und

τ' die Umlaufszeit eines inneren bzw. äußeren Elektrons und $\gamma = \frac{w'}{w} = \frac{\tau}{\tau'}$, dann gilt

$$\frac{2\pi}{\tau}\Delta t = \frac{2\pi}{\tau'}\Delta t + \frac{2\pi}{p'},$$

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{1}{p'(1-\gamma)}. \tag{10}$$

Der in der Zeit Δt von dem Elektron 0 bzw. von den auf demselben Kreisring liegenden Elektronen überstrichene Centriwinkel $\Delta\varphi$ ist dann

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi t}{\tau} = \frac{2\pi}{p'(1-\gamma)}. \tag{11}$$

Der größte Unterschied bei der Summierung über die Elektronenabstände nach Gl. (9) für die verschiedenen Fälle der Orientierung der beiden Ringe zueinander wird sich dann ergeben, wenn das ins Auge gefaßte Elektron 0 gerade in Opposition zu einem Elektron des anderen Ringes steht (Fall 1) bzw. wenn es sich gerade in der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Oppositionsstellungen befindet (Fall 2). Somit ergeben sich bei der Summierung der Abstände die beiden Extremwerte, wenn

$$1.\ \varphi = 0, \qquad 2.\ \varphi = \frac{\Delta\varphi}{2}$$

gesetzt wird. Über die Größe des Intervalles, in dem die für verschiedene Zeiten berechneten Werte des Wechselwirkungsgliedes liegen, gibt folgendes Beispiel Aufschluß:

Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten . $\gamma = \frac{1}{8}$,
„ „ Radien . . . . . $c = 4$,
Zahl der Elektronen des inneren Ringes $p = 2$,
„ „ „ „ äußeren „ $p' = 4$.

Tabelle 1.

	Werte von Ψ für		
ϱ	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{4}$	$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{2}$
0,0	8,00	8,00	8,00
0,5	6,67	6,66	6,66
1,0	3,52	3,52	3,52
2,0	− 1,10	− 1,10	− 1,11
3,0	− 0,25	− 0,28	− 0,32
4,0	0,25	0,24	0,22

Merkliche Unterschiede treten erst auf für Werte $\varrho > 2$. Bei der Berechnung des gesamten Streueffektes V nach Gl. (1) ist aber von $\varrho > 2$ an das Wechselwirkungsglied sehr viel kleiner als die beiden Terme T_1 und T_2, so daß die bei der Berechnung von Ψ für verschiedene Zeiten sich ergebenden Unterschiede (Tab. 1) im Endresultat V vernachlässigt werden dürfen. Für $p = 2$ und $p = 4$ ist ist z. B. von $\varrho > 2$ ab T_{12} im Mittel nur 2 Proz. des Wertes von T_1 und T_2 zusammen. Bei den Atommodellen mit $\gamma \gtrless \frac{1}{8}$ und $c \geqq 4$ darf daher von den durch die Relativbewegung der beiden Ringe bedingten Verschiedenheiten der Werte des Terms T_{12} abgesehen werden. Es genügt, T_{12} für eine einzige beliebige Zeit zu berechnen und zwar wird in folgendem der Einfachheit halber der Fall $t = 0$, d. h. $\varphi = 0$ zugrunde gelegt werden. Eine etwas größere Genauigkeit ließe sich durch Benützung von $\varphi = \frac{\Delta\varphi}{4}$ erreichen.

Für die Streuwirkung eines zweiringigen Elektronensystems ergibt sich aus Gl. (1), (2), (3) und (9) somit, wenn $\frac{e^4 N}{\mu^2 v^4 R^2} = b$ ist,

$$(12) \quad V = b \frac{1 + \cos^2\vartheta}{2} \{p^2 \Phi_p(\varrho) + p'^2 \Phi_{p'}(c\varrho) + 2\Psi_{pp'}(c, \varrho)\},$$

während Debye für das einringige System berechnet hat

$$(13) \quad V = b \frac{1 + \cos^2\vartheta}{1} \{p^2 \Phi_p(\varrho)\}.$$

Für ein dreiringiges System läßt sich Gl. (12) leicht erweitern, ist a'' der Radius, p'' die Besetzungszahl usw. des dritten Ringes, so wird, wenn $c' = \frac{a''}{a}$ und $c'' = \frac{a''}{a'}$ ist:

$$(14) \quad \begin{cases} V = b \cdot \frac{1 + \cos^2\vartheta}{2} \{p^2 \Phi_p(\varrho) + p'^2 \Phi_{p'}(c\varrho) + p''^2 \Phi_{p''}(c'\varrho) \\ \qquad + 2\Psi_{pp'}(c, \varrho) + 2\Psi_{pp''}(c', \varrho) + 2\Psi_{p'p''}(c'', \varrho)\}. \end{cases}$$

Grenzfälle.

1. λ klein gegen a, also ϱ sehr groß.

Abgesehen von dem kleinen Winkelbereich in der Einfallsrichtung des Primärstrahles (ϑ nahezu 0) verschwinden alle Glieder in den Termen T_1, T_2 und T_{12} mit Ausnahme des

ersten Gliedes in T_1 und T_2, welches den Wert 1 annimmt; somit ist $T_1 = p$, $T_2 = p'$, $T_{12} = 0$ und

$$V = b\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}(p+p'). \tag{15}$$

Für ein System von n Ringen mit den Besetzungszahlen $p_1, p_2, p_3 \ldots$ ergibt sich analog die Beziehung

$$V = b\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\sum_1^n p_r = b\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\cdot Z, \tag{16}$$

wenn Z die gesamte Elektronenzahl des Atomes ist.

Bei kurzen Wellen ist, genau wie beim einringigen System, die zerstreute Intensität proportional der Gesamtzahl der Elektronen des streuenden Atoms. Für die leichtatomigen Stoffe ist $Z = \frac{A}{2}$ (A Atomgewicht); Gl. 16) geht dann über in das Barklasche Gesetz; die von einem Atom zerstreute Intensität ist proportional dem Atomgewicht.

2. λ sehr groß gegen a, ϱ nahezu 0.

In den Termen T_1, T_2, T_{12} nähern sich alle Glieder dem Grenzwert 1, also

$$T_1 = p^2, \qquad T_2 = p'^2, \qquad T_{12} = 2pp'$$

und

$$V = b\cdot\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\{p^2+p'^2+2pp'\} = b\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}Z^2, \tag{17}$$

bzw. beim dreiringigen System

$$V = b\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\{p^2+p'^2+p''^2+2pp'+2pp''+2p'p''\}, \tag{18}$$

$$= b\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}Z^2.$$

Das von Debye aufgestellte Gesetz, daß bei sehr langen Wellen die gestreute Intensität proportional dem Quadrat der Gesamtzahl der Elektronen im Atom ist, behält somit seine Gültigkeit für Atome, die aus mehr als einem Elektronenring bestehen.

Räumlicher Mittelwert der Streuung.

Für die folgenden Überlegungen ist die Kenntnis der gesamten von einem Atom bei einer bestimmten Wellenlänge nach allen Richtungen hin zerstreuten Strahlung erforderlich.

Ist $\bar{V}$ der räumliche Mittelwert der Streuung und $d\omega$ der körperliche Winkel des Elementarkegels, so ist die Gesamtstrahlung $= 4\pi \bar{V}$, also

$$\bar{V} = \frac{1}{4\pi}\int v R^2 \, d\omega, \tag{19}$$

oder aus Gl. (12) für das zweiringige Elektronensystem

$$\left\{ \bar{V} = \frac{e^4}{4u^2 v^4} N \int_0^{\pi} [p^2 \Phi_p(\varrho) + p'^2 \Phi_{p'}(c\varrho) + \Psi_{pp'}(c, \varrho)] \right. \tag{20}$$
$$\left. (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta . \right.$$

Für das dreiringige System ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck durch Einsetzen des in Gl. (14) enthaltenen Wertes der Summe der Funktionen Φ und Ψ.

Bei Ausführung der Integration unter Benutzung der Reihenentwicklung der Funktionen Φ und Ψ (Gl. 3 und 9) liefert das erste Glied von Φ jeweils das Integral

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{8}{3}. \tag{21}$$

Alle übrigen Glieder von Φ, sowie sämtliche Glieder von Ψ führen auf Integrale von der Form:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin[b \sin \vartheta/2]}{b \sin \vartheta/2} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = 8 F(b). \tag{22}$$

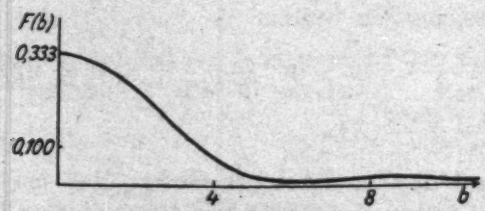


Fig. 2.

Das Integral läßt sich transformieren in

$$\frac{1}{b}\int_0^{1} (1 - 2x^2 + 2x^4) \sin[bx] \, dx;$$

hieraus folgt durch Reihenentwicklung

$$F(b) = \frac{1}{3} - \frac{b^2}{36} + \frac{7b^4}{7200} - \frac{11b^6}{604800} + \cdots \tag{23}$$

Für große Werte von b läßt sich $F(b)$ mit guter Näherung erhalten aus

$$F(b) = \frac{1 - \cos b}{b^2}. \tag{24}$$

§ 2. Kohlenstoffatom.

Auf Grund der zurzeit herrschenden Anschauungen von der Atomstruktur ist das Kohlenstoffatom als zweiringiges Elektronensystem aufzufassen. In bezug auf die Verteilung der Elektronen sind zwei Fälle nahezu gleich wahrscheinlich: die Annahme eines aus zwei Elektronen bestehenden inneren Ringes (K-Ring) wird durch das periodische System nahegelegt, während die genaue Berechnung der Frequenz der K_α-Linie einen mit drei Elektronen besetzten K-Ring erfordert. Der Zweck der folgenden Berechnungen ist, zu prüfen, ob die experimentellen Beobachtungen des Streueffektes eine Entscheidung zwischen diesen beiden möglichen Atomstrukturen zu treffen gestatten.

Berechnung der Ringradien und Winkelgeschwindigkeiten.

Das Verhältnis der Radien a und a' des K- und L-Ringes (Besetzungszahlen p und p') eines aus Z-Elektronen bestehenden Bohrschen Atomes ist

$$c = \frac{a'}{a} = 4\frac{Z - s_p}{Z - p - s_{p'}}, \tag{25}$$

wobei s_p die Abschirmungswirkung[1]) der Kernladung durch die auf dem gleichen Ring befindlichen p-Elektronen bedeutet.

Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten w bzw. w' eines Elektrons des K-Ringes und eines Elektrons des L-Ringes ist

$$\gamma = \frac{w'}{w} = 2\left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \frac{2}{c^2}. \tag{26}$$

1. Fall:

$p = 2$, $p' = 4$, $Z = 6$,

$s_p = 0{,}25$, $s_{p'} = 0{,}957$, somit $c = 7{,}6$, $\gamma = \frac{1}{29}$.

2. Fall:

$p = 3 = p'$, $Z = 6$, somit $c = 9$, $\gamma = \frac{1}{40{,}5}$,

$s_p = s_{p'} = 0{,}577$.

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, S. 262, Tab. für s_p S. 84.

Der absolute Wert des Radius a des K-Ringes ergibt sich in beiden Fällen nahezu gleich groß, nämlich $a = 1 \cdot 10^{-9}$ cm; während sich im Falle eines einzigen Ringes mit 6 Elektronen $a = 1{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm ergibt.

Berechnung der charakteristischen Funktionen.

Auf Grund der Überlegungen des § 1 ergeben sich für die verschiedenen Atomstrukturmodelle folgende Werte der charakteristischen Funktionen[1]):

1. Fall: $p = 2$, $p = 4$.

$$\Phi_2(\varrho) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin\varrho}{\varrho}\right). \tag{27}$$

$$\Phi_4(7{,}6\,\varrho) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sin 7{,}6\,\varrho}{7{,}6\,\varrho} + 2\,\frac{\sin(5{,}4\,\varrho)}{5{,}4\,\varrho}\right). \tag{28}$$

$$\Psi_{2,4} = \sum_0^1 \sum_0^3 \frac{\sin\left[\varrho\sqrt{14{,}6 - 3{,}8\cos 2\pi\left(\frac{n}{2} - \frac{n'}{4}\right)}\right]}{\varrho\sqrt{14{,}6 - 3{,}8\cos 2\pi\left(\frac{n}{2} - \frac{n'}{4}\right)}}. \tag{29}$$

2. Fall: $p = 3$, $p' = 3$.

$$\Phi_3(\varrho) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2\sin(0{,}87\,\varrho)}{0{,}87\,\varrho}\right] \tag{30}$$

analog $\Phi_{3'}$, wenn statt ϱ das Argument 9ϱ eingesetzt wird; ferner

$$\Psi_{3,3'}(\varrho) = \sum_0^2 \sum_0^2 \frac{\sin\left[\varrho\sqrt{20{,}35 - 4{,}5\cos 2\pi\left(\frac{n}{3} - \frac{n'}{3}\right)}\right]}{\varrho\sqrt{20{,}35 - 4{,}5\cos 2\pi\left(\frac{n}{3} - \frac{n'}{3}\right)}}. \tag{31}$$

3. Fall: (ein Ring mit 6 Elektronen):

$$\Phi_6(\varrho) = \frac{1}{6}\left[1 + \frac{2\sin(0{,}5\,\varrho)}{0{,}5\,\varrho} + \frac{2\sin(0{,}87\,\varrho)}{0{,}87\,\varrho} + \frac{\sin\varrho}{\varrho}\right]. \tag{32}$$

Abhängigkeit der Streuung vom Streuwinkel.

Wie aus Gl. (12) zu ersehen ist, hat man zunächst die Summe $\sum$ der charakteristischen Funktionen als Funktion

1) Von der Relativbewegung der beiden Ringsysteme darf hier mit um so größerer Berechtigung abgesehen werden, als c wesentlich größer und γ erheblich kleiner als bei dem in § 1 behandelten Beispiel ist, so daß der dort schon vernachlässigbar klein gefundene Fehler hier noch kleiner ist.

von $\varrho = \frac{8\pi a}{\lambda} \sin \vartheta$ darzustellen (Fig. 3, Kurve 1, entspricht dem 1. Fall der Atomstruktur, Kurve 2 dem 2. Fall). Hieraus erhält man dann unter Konstanthaltung der Wellenlänge die

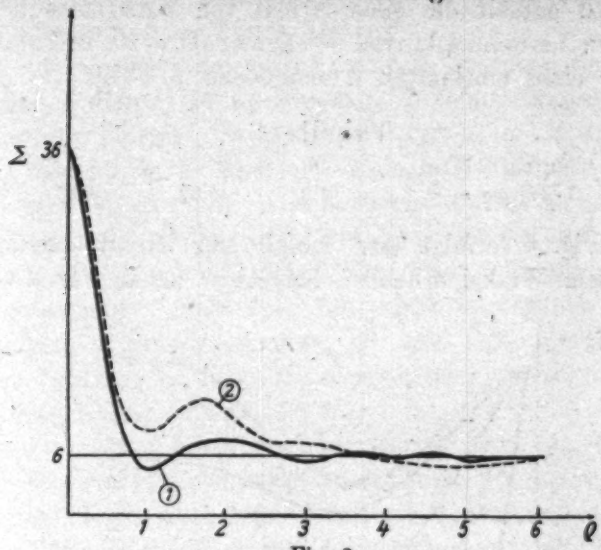


Fig. 3.

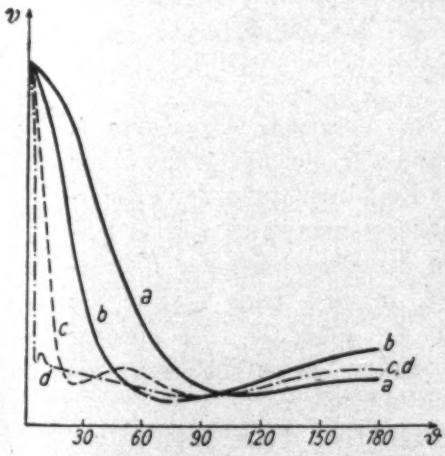


Fig. 4.

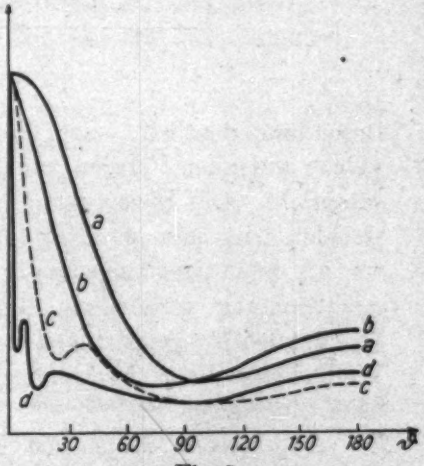


Fig. 5.

Abhängigkeit der zerstreuten Intensität vom Winkel ϑ gegenüber der Einfallsrichtung der Primärstrahlen (Fig. 4: 1. Fall, Fig. 5: 2. Fall). Die betreffenden Werte der Wellenlänge sind in Tab. 3 angegeben.

Tabelle 3.

Kurve	*a*	*b*	*c*	*d*
$\lambda \cdot 10^8$ cm =	2,5	1,25	0,5	0,06

Fig. 6 enthält die einer Arbeit von Kohlrausch[1]) entnommenen Verteilungskurven (Wellenlängenwerte in Tab. 4) bei Annahme eines einringigen Atommodells (3. Fall).

Tabelle 4.

Kurve	*a*	*b*	*c*	*d*
$\lambda \cdot 10^8$ cm =	∞	1,3	0,52	0,13

In Fig. 6 erfolgt der Abfall der Streuintensität mit wachsendem Winkel erheblich langsamer als in Fig. 4 und 5.

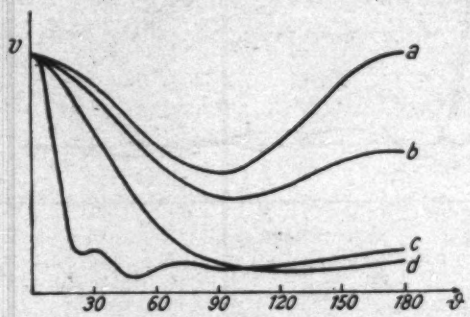


Fig. 6.

Besonders deutlich zeigt dies ein Vergleich der Kurve *b*, welche auf allen Figuren annähernd der gleichen Wellenlänge entspricht. Die Bevorzugung der Einfallsrichtung der Primärstrahlen tritt beim zweiringigen Elektronensystem stärker hervor als beim einringigen; der in der Umgebung der Primärstrahlrichtung vorhandene Bezirk, in dem nach Debye die Streuintensität proportional mit Z^2 geht, ist bei gleicher Wellenlänge beim zweiringigen System wesentlich enger als beim einringigen.

Andererseits zeigen die Kurven, daß beim zweiringigen Kohlenstoffatom selbst bei den längsten technisch vorkommenden Wellen die im Grenzfall $\lambda = \infty$ gültige Thomsonsche Verteilung proportional mit $1 + \cos^2 \vartheta$ noch nicht auftritt. Wie im folgenden nachgewiesen wird, ist die Annahme

1) F. Kohlrausch, Phys. Zeitschr. 21. S. 193. 1920.

eines einringigen Kohlenstoffatoms unbedingt abzulehnen; das Kohlenstoffatom ist sicher ein zweiringiges*) System. Bei Messungen an Kohlenstoff als streuendem Körper wird man daher bei Verwendung technischer Röntgenröhren niemals die Thomsonsche Verteilung auffinden können.

Wenn es sich nun darum handelt, zwischen den beiden möglichen Fällen eines zweiringigen Kohlenstoffatoms zu entscheiden, so bietet das Auftreten deutlicher Maxima und Minima bei kurzen Wellen und kleinen Winkeln im 2. Falle (Fig. 5) die Möglichkeit eines experimentellen Beweises zugunsten der Annahme eines aus zwei Ringen mit je drei Elektronen bestehenden Atoms. Sämtliche vorliegenden Streustrahlenmessungen sind aber mit nicht homogenen Primärstrahlungen angestellt worden, so daß sich hieraus keine sicheren Schlüsse in dieser Hinsicht ziehen lassen.

Dagegen läßt sich an der Hand dieser Kurven ein in der Literatur[1]) häufig betonter Widerspruch zwischen den Messungen von Barkla[2]) einerseits und Owen[3]) bzw. Crowther[4]) andererseits leicht aufklären. Während Barkla gefunden hatte, daß die Dissymetrie der Kurve (Abweichung von der Thomsonschen Kurve $1 + \cos^2 \vartheta$) mit wachsender Härte größer wird, scheinen die Messungen von Owen gerade das Gegenteil zu ergeben.

Wie eine Durchsicht der Originalarbeiten zeigt, benützt Barkla zur Ermittlung der Winkelabhängigkeit der Streuung von Kohle eine sehr weiche Röntgenröhre und findet mit Ausnahme der Werte für 20° und 30°, die zu groß sind, gute Übereinstimmung mit dem Thomsonschen Ansatz. Dieses Ergebnis deckt sich vollständig mit dem Resultat der theoretischen Berechnung: Bildet man in Fig. 4 im Winkelbereich von 45° bis 180° das Verhältnis $V\vartheta / V_{90}$, so erhält man an-

*) *Anm. bei der Korrektur:* In einer besonderen Arbeit wird gezeigt werden, daß die Annahme einer räumlich-tetraedrischen Anordnung der vier äußeren Elektronen (nach Landé) nahezu die gleiche Streuwirkung besitzt, wie das oben betrachtete zweiringige System.

1) E. Marx, Handbuch der Radiologie 5. S. 330; R. Pohl, Die Physik der Röntgenstrahlen. S. 64.

2) Barkla, Phil. Mag. 15. S. 289. 1908; 21. S. 270. 1911.

3) Owen, Proc. Cambr. Soc. 16. S. 161. 1911.

4) Crowther, Proc. Roy. Soc. 86. S. 478. 1912.

nähernd dieselben Werte, wie unter Benutzung der Thomsonschen Formel, während von $\vartheta = 45^0$ an $V\vartheta/V_{90}$ wesentlich größer wird als der Proportionalität mit $1 + \cos^2\vartheta$ entspricht. Barkla betont besonders in seiner Arbeit, daß diese (abgesehen von den Winkeln 20^0 und 30^0) symmetrische Verteilung nur bei Verwendung sehr weicher Strahlen erhalten werde und weist auf frühere Messungen[1]) hin; bei diesen wurde jedoch nur das Verhältnis von V_{170}/V_{90} für verschiedene Härte der Röntgenstrahlen bestimmt und gefunden:

$$\frac{V_{170}}{V_{90}} = 2 \text{ für eine sehr weiche Strahlung,}$$
$$= 1{,}9 \text{ „ „ weiche Strahlung,}$$
$$= 1{,}5 \text{ „ „ gefilterte, harte Strahlung,}$$

d. h. also um so bessere Gültigkeit der Thomsonschen Verteilung, je weicher die Strahlung ist.

Berechnet man das Verhältnis V_{170}/V_{90} mit Hilfe unserer Formeln für eine große Reihe von Wellenlängen, so findet man im 1. Fall (Atom mit zwei und vier Elektronen) für $\lambda = 1{,}25$ Å. den Wert 2,6, der dann langsam abnimmt bis zu 1,45, im 2. Fall (Atom mit je drei Elektronen) für $\lambda = 1{,}25$ Å. den Wert 2,0, der ziemlich rasch abnimmt und im Intervall $\lambda = 0{,}9$ bis 0,5 Å. nahezu konstant = 1,5 ist. In beiden Fällen ist also das Barklasche Ergebnis mit der Theorie gut zu vereinen.

Im Gegensatz zu Barkla beobachtet Owen eine um so bessere Gültigkeit der Thomsonschen Verteilung, wenn die Härte der Primärstrahlung zunimmt. Der scheinbare Widerspruch wird behoben, sobald man beachtet, daß bei beiden Forschern verschiedene Winkelintervalle in Betracht kommen. Während Barkla die Härteabhängigkeit des Verhältnisses der Streuintensität bei $\vartheta = 170^0$ zu der bei $\vartheta = 90^0$ beobachtet, stützt sich das Owensche Ergebnis auf Messungen im Intervall $\vartheta = 30^0$ bis 45^0. Außerdem ist zu bemerken, daß die Härteänderungen bei Owen an und für sich klein[2]) waren, aber im Gebiet zwischen 30^0 und 45^0 deutlich hervortraten[3]),

1) Barkla, Phil. Mag. 15. S. 288. 1908.

2) In der betreffenden Arbeit ist angegeben, daß durchweg weiche Röntgenröhren verwandt wurden.

3) Bei Winkel kleiner als 30^0 wurden keine Messungen ausgeführt.

weil hier die Verteilungskurven für die verschiedenen Wellenlängen sich beträchtlich voneinander unterscheiden (Fig. 4 und 5). Die Theorie liefert in Übereinstimmung mit Owen für das Verhältnis V_{30}/V_{90} um so bessere Annäherung an die Thomsonsche Verteilung, je kleiner die Wellenlänge ist.

Die theoretischen Kurven lassen aber erwarten, daß bei Ausdehnung der Streustrahlenmessung auf kleine Winkel schließlich wieder Winkel erreicht werden, bei denen die Messung größere Werte liefert als das Thomsonsche Gesetz, und zwar muß dieser Winkel um so kleiner sein, je größer die Härte ist. Diese Folgerungen finden eine gute Bestätigung in den Messungen von Crowther (vgl. Tab. 5, angegeben ist $V\vartheta/V_{90}$), welcher an paraffiniertem Filterpapier genaue Intensitätsverteilungskurven, insbesondere auch bei kleinen Winkeln, aufgenommen und im Bereich 30° bis 45° die Owenschen Messungen bestätigt hat.

Tabelle 5.

ϑ	Parallelfunkenstrecke			Thomsonsche Formel
	1 cm	2,1 cm	4 cm	
10°	3,66	4,24	4,60	1,97
20°	2,90	2,75	2,30	1,88
30°	2,14	1,98	—	1,75
40°	1,78	1,66	1,52	1,59

Auch das zunächst auffällige Resultat, daß in Tab. 5 $V\vartheta/V_{90}$ mit der Härte im allgemeinen abnimmt, für $\vartheta = 10°$ aber zunimmt, läßt sich aus der Theorie ableiten.

Wellenlängenabhängigkeit des räumlichen Mittelwertes der Streuung.

Als eines der gesichertsten Resultate der Streustrahlenmessung gilt das Barklasche Gesetz: Bei Elementen mit Atomgewichten kleiner als 32 ist der Massenstreukoeffizient unabhängig von der Wellenlänge der auffallenden Strahlung und der chemischen Natur des Stoffes eine universelle Konstante. Dieser Erfahrungssatz eignet sich gut als Kriterium zur Entscheidung zwischen den verschiedenen möglichen Strukturen des Kohlenstoffatoms. Es wird der räumliche Mittelwert $\bar{V}$ der Streuung für beide Fälle berechnet, sodann $\bar{V}$ als

Funktion von λ dargestellt und mit dem Versuchsergebnis $\bar{V} = \text{const}$ in bezug auf λ verglichen.

Nach Ausführung der Integration gemäß Gl. (20) und (22) ist der räumliche Mittelwert der Streuung $\bar{V}$, wenn $\frac{e^4 N}{\mu^2 v^4} = b_0$ und $a_1 = 4 \varkappa a = \frac{8\pi a}{\lambda}$ ist.

1. Fall:

$$p = 2, \qquad p' = 4.$$

$$\bar{V} = 4 b_0 [1 + F(a_1) + 2F(3{,}28 a_1) + 4F(3{,}82 a_1) + 2F(4{,}29 a_1) + 4F(5{,}38 a_1) + 2F(7{,}6 a_1)]. \tag{33}$$

2. Fall:

$$p = 3, \qquad p' = 3.$$

$$\bar{V} = 4 b_0 [1 + 3F(0{,}87 a_1) + 3F(3{,}98 a_1) + 6F(4{,}76 a_1) + 3F(7{,}8 a_1)]. \tag{34}$$

3. Fall:

$$\bar{V} = 4 b_0 [1 + 6F(0{,}5 a_1) + 6F(0{,}87 a_1) + 3F(a_1)]. \tag{35}$$

Die verschiedenen Werte von $\bar{V}$ sind für die drei Fälle in Fig. 7 als Funktion von λ graphisch dargestellt. Das Wellenlängenintervall der bei den Streustrahlenmessungen von Barkla[1]) angewandten Strahlungen ist durch die beiden Ordinaten A und B begrenzt, entsprechend einer Wellenlänge von $\lambda = 2{,}2 \cdot 10^{-8}$ cm (A) und $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm (B) für das zweiringige Atom. Bei Kurve 3 hat man sich die Grenzen dieses Spektralgebietes in Fig. 7 ein wenig nach links verschoben zu denken, da beim einringigen Atom der Radius a das 1,3fache des Radius beim zweiringigen System ist.[2])

Aus Fig. 7 Kurve 3, ist ohne weiteres zu entnehmen, daß der 3. Fall der in Frage kommenden Atommodelle (ein Ring mit sechs Elektronen) zu Ergebnissen führt, die mit der Erfahrung $\bar{V} = \text{const}$ nicht vereinbar sind. Die Annahme eines einringigen Kohlenstoffatoms, die — wie bekannt — aus röntgenspektroskopischen Gründen sehr wenig wahrscheinlich

1) Barkla, Phil. Mag. 17. S. 755. 1909.

2) a_1 in Gl. (35) ist das 1,3fache von a_1 in Gl. (33) und (34).

ist, muß mit Rücksicht auf die Streustrahlungsmessungen ebenfalls abgelehnt werden. Da der Grad der Wellenlängenabhängigkeit bei Kurve 1 und 2 nahezu der gleiche ist, so kann aus dem Gang des Streukoeffizienten mit der Wellenlänge nichts darüber ausgesagt werden, welcher der beiden Möglichkeiten des zweiringigen Systems die größere Wahrscheinlichkeit zukommt.

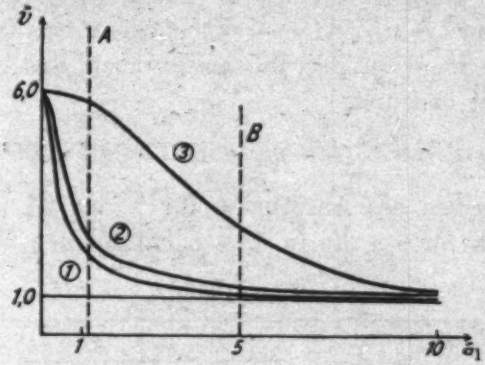


Fig. 7.

Die Tatsache, daß auch die Kurven 1 und 2 eine allerdings geringe Härteabhängigkeit für $\bar{V}$ liefern, war die Veranlassung, zu untersuchen, auf welche experimentellen Grundlagen der Barklasche Satz, daß $\frac{s}{\varrho} = \text{const}$ unabhängig von λ ist, sich stützt. Unter Benutzung der Eigenstrahlung von Chrom und Silber (Wellenlängen etwa 2,2 bzw. 0,56 Å.) fand Barkla[1]) für Kohle beide Male $\frac{s}{\varrho} = 0{,}2$. Eine genaue azimutale Intensitätsverteilungskurve der Streuung wurde nicht aufgenommen; gemessen wurde nur das Verhältnis aus Streuintensität unter dem Streuwinkel $\vartheta = 90°$ zur Primärintensität und hieraus s/ϱ berechnet unter der Voraussetzung der Richtigkeit der Thomsonschen Formel, daß die Streuung proportional $1 + \cos^2\vartheta$ ist. Da die Streustrahlung in Richtung der Fortpflanzung der Primärstrahlen erheblich größer ist als in der entgegengesetzten Richtung, und da die Größe dieser Dissymmetrie von der Härte der Primärstrahlen abhängt (vgl.

1) Barkla, Phil. Mag. 7. S. 543. 1904; 17. S. 739. 1909.

Fig. 4 u. 5), so liefert die Barklasche Messung keinen sicheren Beweis für die Gleichheit von s/ϱ bei $\lambda = 0{,}56$ Å. und $\lambda = 2{,}2$ Å. Eine experimentelle Nachprüfung des Barklaschen Gesetzes erscheint daher dringend erwünscht.

Absolute Größe des Massenstreukoeffizienten.

Ist $\bar{V}$ der räumliche Mittelwert der Streuung nach Gl. (20), so ist die gesamte von einem Atom zerstreute Strahlung $= 4\pi \bar{V}$ oder $= s_{At}$ (Atomstreukoeffizient), wobei $N = 1$ zu setzen ist. Somit ist der Massenstreukoeffizient, wenn A das Atomgewicht bedeutet,

$$\frac{s}{\varrho} = \frac{6{,}07 \cdot 10^{23}}{A} s_{At} = 4\pi \bar{V} \cdot 6{,}07 \cdot 10^{23}. \tag{36}$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes für $\bar{V}$ aus Gl. (33) bzw. (34) ergeben sich für s/ϱ die in Tab. 6 enthaltenen Werte.

Tabelle 6.

$\lambda \cdot 10^8$ cm	s/ϱ	
	(1. Fall)	(2. Fall)
0,5	0,17	0,19
1,0	0,22	0,28
2,0	0,31	0,36
5,0	0,52	0,68

An experimentellen Ergebnissen liegt außer den oben erwähnten Messungen von Barkla eine Arbeit von Crowther[1]) vor, welcher s/ϱ an paraffiniertem Filterpapier bestimmte auf Grund einer genauen Aufnahme der azimutalen Verteilung der Streuung. Aus dem Resultat $\frac{s}{\varrho} = 0{,}27$ ergibt sich unter Berücksichtigung der erfahrungsgemäß den normalen Wert um das Doppelte übersteigenden Streuwirkung des Wasserstoffatoms, für Kohlenstoff etwa $\frac{s}{\varrho} = 0{,}21$.

Ein Vergleich der Messungen mit den berechneten Werten in Tab. 6 spricht somit eher zugunsten der Atomstruktur mit den Besetzungszahlen 2 und 4 (1. Fall).

Nimmt man zu diesen Resultaten die oben mitgeteilten Vergleiche zwischen Theorie und Experiment in bezug auf die azimutale Verteilung hinzu, so kommt man zu der Fest-

1) Crowther, Proc. Roy. Soc. 86. S. 478. 1912.

stellung, daß die erweiterte Debyesche Theorie der Streuung beim Kohlenstoffatom unter der Voraussetzung eines zweiringigen komplanaren Elektronensystems[1]) imstande ist, in weitem Umfange alle typischen Züge der Meßresultate wiederzugeben und bestehende Widersprüche aufzuklären. Eine sichere Entscheidung zwischen den beiden möglichen Fällen eines zweiringigen Systems zu treffen, gestatten die vorliegenden Messungen, die durchweg unter Verwendung inhomogener Strahlen gewonnen worden sind, nicht. Mit Rücksicht auf die absolute Größe des Massenstreukoeffizienten erscheint jedoch die Annahme, daß der innere Ring des Kohlenstoffatoms mit zwei, der äußere mit vier Elektronen besetzt ist, wahrscheinlicher, als eine Belegung beider Ringe mit je drei Elektronen. Unbedingt abzulehnen ist das Atommodell, das nur einen Ring von 6 Elektronen enthält.

§ 3. Aluminiumatom.

Das günstigste Beispiel zur Berechnung der Streuung eines dreiringigen Elektronensystemes ist Aluminium, weil die Streustrahlung dieses Stoffes wiederholt untersucht worden ist. In Hinsicht auf das periodische System und die Ergebnisse der Röntgenspektroskopie können die 13 Elektronen im Aluminiumatom so verteilt sein, daß entweder zwei auf den innersten, acht auf den mittleren, drei auf den äußersten Ring entfallen oder so, daß die Besetzungszahlen 3, 9, 1 sind.

Berechnung der Ringradien und Winkelgeschwindigkeiten.

1. Fall: $p = 2, \quad p' = 8, \quad p'' = 3.$

In analoger Weise wie in § 2 erhält man für den Radius a des innersten Ringes

$$a = \frac{a_H}{Z - s_2} = 0{,}04_3 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}. \tag{37}$$

$s_2 = 0{,}25$ Abschirmungswirkung der Elektronen des K-Ringes,
a_H Radius des K-Ringes beim Wasserstoffatom.

Ferner

$$c = \frac{a'}{a} = \frac{4\,(Z - s_2)}{Z - p - s_3} = 6{,}2. \tag{38}$$

a' Radius des L-Ringes.

1) Vgl. hierzu Anm. *) auf S. 553.

Um näherungsweise den Radius a'' des M-Ringes zu erhalten, denke man sich K- und L-Ring auf den Kern zusammengezogen, d. h. die Kernladung Z um den Betrag $p + p'$ vermindert; dann ist

$$(39) \qquad c' = \frac{a''}{a} = \frac{9(Z - s_3)}{Z - p - p' - s_3} = 47{,}2 \quad \text{und} \quad c'' = \frac{a''}{a'} = 7{,}6\,.$$

Nun ist zu bedenken, daß das von den Elektronen eines Ringes veranlaßte elektrische Feld in einem Punkt innerhalb des Ringes so beschaffen ist, daß die von den verschiedenen Elektronen herrührenden Feldkomponenten sich teilweise schwächen, daß aber in einem Punkt außerhalb des Ringes stets eine Verstärkung der Komponenten stattfindet. Während also bei der Berechnung des Radius des L-Ringes von der Wirkung der Elektronen des M-Ringes abgesehen werden darf, erscheint es nicht ohne weiteres erlaubt, bei der Bestimmung des Radius des M-Ringes die Wirkung der p' Elektronen des L-Ringes durch Anbringen einer Ladung $-p'$ im Kern zu ersetzen. Ist z. B. der M-Ring (Radius a'') von drei, der L-Ring (Radius a') von acht Elektronen besetzt, so erhält man durch eine geometrische Überlegung das elektrische Feld an einer Stelle des M-Ringes:

$$(40) \qquad \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon^2}{(a'' - a')^2} + \frac{\varepsilon^2}{(a'' + a')^2} + 2\varepsilon^2 \sum_1^3 \frac{a'' - a' \cos\frac{n\pi}{4}}{\left(a'^2 + a''^2 - 2a'a'' \cos\frac{n\pi}{4}\right)^{3/2}}.$$

Hieraus folgt durch Reihenentwicklung

$$(41) \qquad \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon^2}{a''^2}\left[8 - 3\frac{a'}{a''} + 12{,}76\left(\frac{a'}{a''}\right)^2 - \ldots\right].$$

Durch Einsetzen des Näherungswertes für a'/a'' aus Gl. (39) erhält man

$c' = 44$ statt 47,2 (genähert), $\quad c'' = 7{,}1$ statt 7,6 (genähert).

Ist die Winkelgeschwindigkeit der Elektronen des K-Ringes, L-Ringes, M-Ringes w, w', w'', so gilt

$$(42) \qquad \begin{cases} \frac{1}{\gamma} = \frac{w}{w'} = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 19{,}2\,, \\ \frac{1}{\gamma''} = \frac{w}{w''} = \frac{1}{3}\left(\frac{a''}{a'}\right)^2 = 64{,}3\,. \end{cases}$$

2. Fall: $p = 3,\ p' = 9,\ p'' = 1.$

Es wird $a = 0{,}04_4 \cdot 10^{-8}$ cm.

$$(43)\qquad \begin{cases} c = \dfrac{a'}{a} = 7{,}5, & \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{w}{w'} = 28, \\ c' = \dfrac{a''}{a} = 49{,}7, & \\ c'' = \dfrac{a''}{a'} = 6{,}6, & \dfrac{1}{\gamma''} = \dfrac{w}{w''} = 82. \end{cases}$$

Charakteristische Funktionen.

1. Fall: Es ist

$$(44)\qquad \begin{cases} \Phi_2(\varrho) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\sin\varrho}{\varrho}\right), \\ \Phi_8(c\,\varrho) = \dfrac{1}{8}\left(1 + \dfrac{\sin[c\,\varrho]}{c\,\varrho} + \dfrac{2\sin[0{,}71\,c\,\varrho]}{0{,}71\,c\,\varrho} + \dfrac{2\sin[0{,}38\,c\,\varrho]}{0{,}38\,c\,\varrho} + \dfrac{2\sin[0{,}92\,c\,\varrho]}{0{,}92\,c\,\varrho}\right), \\ \Phi_3(c'\varrho) = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2\sin[0{,}87\,c'\varrho]}{0{,}87\,c'\varrho}\right). \end{cases}$$

Bei der Berechnung der Wechselwirkungsglieder läßt sich folgende Näherung einführen: Der Abstand eines Elektrons des K-Ringes von einem des L-Ringes liegt zwischen den Grenzen $a'' + a$ und $a'' - a$. Wegen $a'' > a$ kann näherungsweise für alle Abstände der mittlere Wert a'' eingesetzt werden. Diese Näherung, ebenso wie die analogen bei den beiden anderen Wechselwirkungsgliedern, ist um so eher gestattet, je größer das Verhältnis der betreffenden Ringradien ist und je größer die Besetzungszahlen der Ringe sind. Somit wird

$$(45)\qquad \begin{cases} \Psi_{2,8} = \dfrac{16\sin(3{,}1\,\varrho)}{3{,}1\,\varrho}, \\ \Psi_{2,3} = \dfrac{6\sin(22\,\varrho)}{22\,\varrho}, \\ \Psi_{8,3} = \dfrac{24\sin(22\,\varrho)}{22\,\varrho}. \end{cases}$$

Die in § 1 angegebene Bedingung dafür, daß von der Relativbewegung der Ringe gegeneinander abgesehen werden kann, ist, wie die Werte von c, c', c'', γ, γ'' zeigen, beim Aluminiumatom gut erfüllt.

Abhängigkeit der Streuung vom Winkel.

In analoger Weise wie in § 2 ist in Fig. 8 für die in Tab. 7 enthaltenen Wellenlängen die azimutale Verteilung der Streuung des Aluminiumatoms dargestellt.

Tabelle 7.

Kurve Nr.	*a*	*b*	*c*	*d*
$\lambda \cdot 10^8$ cm	2,2	1,1	0,55	0,22

Messungen der Abhängigkeit der Streustrahlung des Aluminiums vom Winkel wurden von Crowther[1]) ausgeführt.

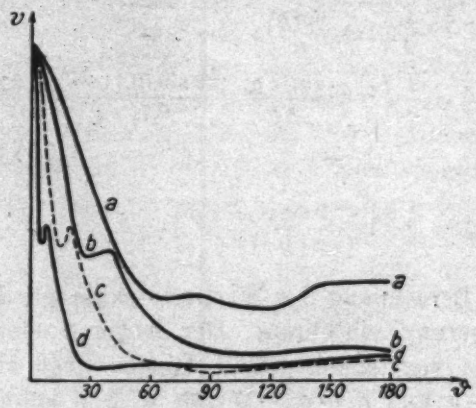


Fig. 8.

Zwischen $\vartheta = 90^0$ und 180^0 ist gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung vorhanden. Die von Crowther benutzte nicht homogene Strahlung einer Röntgenröhre hatte den Absorptionskoeffizienten $\mu_{Al} = 11$; dem entspricht eine mittlere Wellenlänge von 0,65 Å. Dem experimentellen Wert von $\frac{V_{180}}{V_{90}} = 1{,}76$ steht gegenüber der theoretische Wert 1,7. Auch für die Inzidenzstrahlung ($\vartheta = 0$ bis 90^0) sind die Messungen im Einklang mit der theoretischen Kurve, wenngleich eine *genaue* Vergleichung durch die Verwendung nicht homogener Primärstrahlung und durch das Fehlen der Messungen für kleine Winkel unmöglich gemacht wird.

1) Crowther, Proc. Roy. Soc. 85. S. 29. 1911.

Räumlicher Mittelwert der Streuung.

Für den räumlichen Mittelwert der Streuung ergibt sich in bekannter Weise:

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}\bar{V} = \frac{4\,e^4\,N}{\mu^2\,v^4}\Big[\frac{13}{3} &+ 2\,F(a_1) + 16\,F(2{,}36\,a_1) + 32\,F(3{,}1\,a_1)\\ &+ 16\,F(4{,}4\,a_1) + 16\,F(5{,}75\,a_1) + 8\,F(6{,}2\,a_1)\\ &+ 60\,F(22\,a_1) + 6\,F(38{,}5\,a_1)\Big].\end{aligned}\right.$$

Kurve Nr. 1 in Fig. 9 zeigt $\bar{V}$ in Abhängigkeit von $a_1 = \frac{8\pi a}{\lambda}$. Die gestrichelten Ordinaten entsprechen den Wellenlängen $\lambda = 2{,}2 \cdot 10^{-8}$ cm (A_1) und $\lambda = 0{,}55 \cdot 10^{-8}$ cm (B_1). Zum Ver-

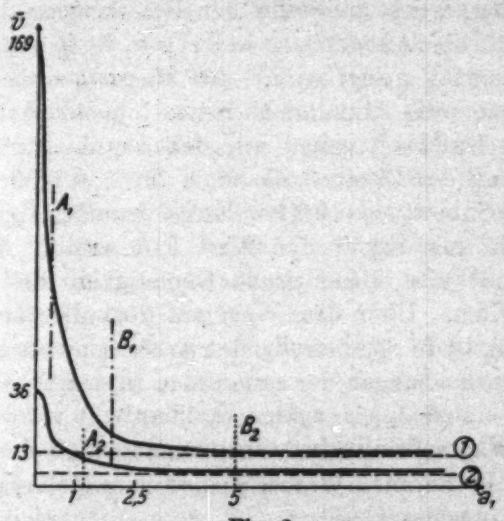


Fig. 9.

gleich ist $\bar{V}$ für das Kohlenstoffatom (Kurve 2) im gleichen Maßstabe eingetragen; das Spektralgebiet $\lambda = 2{,}2$ Å. bis 0,56 Å. ist begrenzt durch die Ordinaten A_2 und B_2. Aus der Fig. 9 läßt sich zweierlei entnehmen: 1. daß der Abfall von $\bar{V}$ um so größer wird, je größer die Elektronenzahl des Atomes ist[1]), und 2. daß infolge Abnahme des Radius des innersten Ringes mit wachsendem Z der Spektralbezirk, in dem die experimentellen Streustrahlenuntersuchungen vorgenommen wurden, immer mehr in das Gebiet des Steilabfalls verlagert ist. Hieraus folgt,

1) Dies folgt auch aus den Grenzgesetzen (§ 1) für lange und kurze Wellen.

daß der Massenstreukoeffizient der Elemente um so mehr mit der Wellenlänge variieren muß, je mehr Elektronen das Atom enthält, und zwar so, daß s/ϱ mit abnehmender Wellenlänge ebenfalls abnimmt. Eine Bestätigung für diese Schlüsse liefern die Messungen von Barkla-Dunlop.[1]) Im Intervall von $\lambda = 1$ bis $\lambda = 0{,}3$ Å. etwa nimmt s/ϱ für Silber im Verhältnis 1:4 (für Zinn 1:5,55) ab.

Die Theorie liefert für das Aluminiumatom eine starke Abhängigkeit des räumlichen Mittelwertes der Streuung von der Wellenlänge der Primärstrahlung, und zwar für beide Fälle der Atomstruktur. (Kurve 1 in Fig. 9 erleidet eine kaum merkliche Änderung, wenn an Stelle der Besetzungszahlen $p = 2$, $p = 8$, $p = 3$ die Annahme $p = 3$, $p = 9$, $p = 1$ der Berechnung zugrunde gelegt wird.) An Messungen des Massenstreukoeffizienten des Aluminiums liegen folgende Arbeiten vor: Barkla und Sadler[2]) geben an, daß sowohl für $\lambda = 2{,}2$ Å. (Eigenstrahlung des Chroms) als auch für $\lambda = 0{,}56$ Å. (Eigenstrahlung des Silbers) $s/\varrho = 0{,}2$ ist. Es ist demnach $\bar{V}_{A_1} : \bar{V}_{B_1} = 1:1$, während sich aus Fig. 9 der Wert 1:4 ergibt. Daß diese Barklaschen Werte keine große Genauigkeit besitzen, darf als sicher gelten. Über den Weg, auf dem die Resultate erhalten wurden, ist in der betreffenden Arbeit[3]) nichts angegeben. Da genaue Ausmessungen der azimutalen Intensitätsverteilungskurven erst einige Jahre später veröffentlicht wurden, so ist mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß die Intensität unter einem bestimmten Winkel gemessen und hieraus mittels des Thomsonschen Gesetzes (vgl. § 2) s/ϱ berechnet wurde.

Eine genaue Bestimmung von Crowther[4]) unter Aufnahme der azimutalen Verteilungskurve ergibt für die nicht homogene Strahlung einer weichen Röntgenröhre $\frac{s}{\varrho} = 0{,}29$. Das Energiemaximum der benutzten Primärstrahlung liegt zwischen $\lambda = 0{,}5$ Å. und $\lambda = 1{,}0$ Å; hierfür liefert die Theorie

1) Barkla-Dunlop, Phil. Mag. 31. S. 232. 1916.

2) Barkla u. Sadler, Phil. Mag. 17. S. 735. 1909.

3) Die betr. Tabelle steht in einer Arbeit über Absorptionsmessungen und dient dort zu Korrektionszwecken.

4) Crowther, Proc. Roy. Soc. 86. S. 478. 1912. Der frühere, viel zu große Wert 1,18 (Proc. Roy. Soc. 85. S. 29. 1911) wird durch diese neuere Arbeit desselben Verfassers aufgehoben.

$\frac{s}{\varrho} = 0{,}26$ bzw. 0,55, so daß der experimentelle Wert innerhalb dieser Grenzen liegt.

Im wesentlichen sind somit die vorliegenden Messungen im Einklang mit der Theorie; dagegen bedarf die Frage, ob der von der Theorie geforderte Anstieg von s/ϱ mit wachsender Wellenlänge wirklich vorhanden ist, dringend einer experimentellen Klärung. Bisher stützt sich der Einwand auf ein einziges Meßresultat von zweifelhafter Sicherheit.[1]) Eine Bestätigung dieser Unstimmigkeit wäre in doppelter Hinsicht von großer Wichtigkeit:

1. Da, wie oben erwähnt, auch bei einer anderen Wahl der Besetzungszahlen der Elektronenringe die starke Wellenlängenabhängigkeit von s/ϱ bestehen bleibt, so müßten prinzipielle Änderungen an den Vorstellungen vom Atombau vorgenommen werden, etwa in dem Sinne, daß die Anordnung der Elektronen in Form eines komplanaren Ringsystems aufgegeben werden muß. Die befriedigende Übereinstimmung beim Kohlenstoffatom läßt vermuten, daß bei den aus wenigen Elektronen bestehenden Atomen, soweit es sich um Berechnung der Streuwirkung handelt, die Ringvorstellung jedenfalls näherungsweise gültig bleiben wird.

2. Gewisse Bedenken[2]) gegen die Richtigkeit der bisherigen Dispersionstheorie lassen es zweifelhaft erscheinen, ob es gelingen kann, ausschließlich mit den Mitteln der klassischen Elektrodynamik die Streuwirkung der Atome in vollem Umfange theoretisch zu beherrschen. In dieser Richtung liegt wohl auch die Erklärung für das Versagen der Debyeschen Theorie in einem Gebiet, in dem die Voraussetzungen derselben gerade am besten erfüllt sind, nämlich bei den ganz kurzen Wellen.[3])

Stuttgart, Juli 1920,

Röntgenlaboratorium an der Techn. Hochschule.

---

1) Betreffs der Bedenken gegen die experimentelle Begründung des Barklaschen Gesetzes, daß der Massenstreukoeffizient für leichte Stoffe von der Härte unabhängig, einen universellen Wert besitzt, vgl. oben § 2.

2) Vgl. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, S. 533.

3) Für γ-Strahlen ist s/ϱ erheblich kleiner als der kleinste theoretisch mögliche Wert 0.2.

(Eingegangen 12. Juli 1920.)

4. *Die Dispersion des Wasserstoffs im Ultraviolett; von Max Kirn.*

(Auszug aus der Tübinger Dissertation.)

Nachdem es Hrn. W. Traub im Sommer 1919 gelungen war, den Verlauf der Dispersion von Luft im ultravioletten Spektrum bis zur Wellenlänge 1854 Å.-E. zu messen[1]), veranlaßte mich Herr Professor Paschen, die Traubsche Arbeit fortzusetzen und für Wasserstoff den Absolutwert des Brechungsexponenten für die grüne Hg-Linie möglichst genau zu bestimmen und die Dispersion bis zur Wellenlänge 1854 Å.-E. zu verfolgen.

Während die von den verschiedenen Forschern ermittelten Werte anderer Gase oft stark voneinander abweichen, gehört Wasserstoff zu den Gasen, deren Dispersion verhältnismäßig am besten bekannt ist. Kettleler[2]), Lorenz[3]), Mascart[4]), Perreau[5]), Scheel[6]), J. Koch[7]) und C. und M. Cuthbertson[8]) haben dieses Gas untersucht. Im ultravioletten Teil des Spektrums ist es jedoch nur eine einzige Arbeit, die den Verlauf der Dispersion verfolgt und große Genauigkeit erreicht: J. Koch von 5462—2302 Å.-E.

Nachdem Debye[9]) auf Grund der Studien von Bohr[10]) den Bau des Wasserstoffmoleküls in bezug auf sein optisches

1) W. Traub, Ann. d. Phys. 61. 1920. (Tüb. Diss.)
2) E. Ketteler, Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865.
3) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. S. 70. 1880.
4) E. Mascart, Ann. Ec. Norm. Sup. 6. S. 1. 1877.
5) F. Perreau, Ann. de Chim. et de Phys. 7. S. 289. 1896.
6) K. Scheel, Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. 9. S. 24. 1907.
7) J. Koch, Arkiv för Mat., Astr. och Physik 8. S. 20. 1912.
8) C. und M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. London (A) 83. S. 164. 1909.
9) P. Debye, Sitz.-Ber. d. Bay. Akad. zu München 1915.
10) N. Bohr, Phil. Mag. 26. 1913.

Verhalten näher untersucht hat, ist ein Vergleich der experimentell gefundenen Dispersion mit der theoretisch abgeleiteten von Interesse.

Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung, deren ich mich bediente, ist dieselbe, wie sie Traub zur Bestimmung der Dispersion von Luft anwandte: die bekannten horizontalen Interferenzstreifen eines Jaminschen Interferentialrefraktometers mittels Prisma zerlegt. Als Kollimatorlinse hatte ich ein Quarz–Fluorit-Achromat von 25 cm Brennweite. Die Jaminplatten waren aus Flußspat von 5 mm Dicke. Das Doppelrohr war 50 cm lang mit Verschlußplatten aus Flußspat. Ebenso bestand das zerlegende Prisma für Ultraviolett aus Flußspat. Das Spektrum mit den horizontalen Interferenzstreifen wurde durch ein Quarz–Fluorit-Achromat von 25 cm Brennweite auf der photographischen Platte abgebildet. Die Röhren waren mittels Ansatzröhren und federnden Glasrohrverbindungen mit Manometer und Luftpumpe einerseits und mit Trockenröhren, Waschflaschen und Gasentwicklungsapparat andererseits völlig luftdicht verbunden. Die Röhren waren, um die Temperatur konstant zu halten, in ein großes Wasserbad gesetzt. Als Lichtquelle wurde bis 2300 Å.-E. eine Quarzquecksilberlampe bei 60 Volt und etwa 1,5 Amp. verwendet; bis 1854 Å.-E. ein durch hochgespannten Wechselstrom erzeugter Funke an Aluminiumelektroden (6 Leidnerflaschen ohne Selbstinduktion). Hinter der Kassette wurde ein Planspiegel aufgestellt, der das Licht in ein mikroskopisch vergrößerndes Fernrohr hineinreflektierte. In diesem sah man bei nicht eingesetzter Kassette die Interferenzstreifen. Auf diese Weise konnte die ganze Anzahl vorbeipassierender Streifen gezählt werden. Als Anhaltspunkt wurde zur Messung der Bruchteile gewanderter Streifen an den Spaltbacken ein feiner Faden senkrecht über den Spalt befestigt. Da derselbe aber im äußersten Violett nicht mehr abgebildet wurde, befestigte ich an der betreffenden Stelle dicht vor der photographischen Platte eine Marke (Faden), die mir nun als Anhalt diente.

Als Platten benutzte ich die Deutsche Imperial-Trockenplatte, Trockenplattenfabrik Kranseder & Co., München.

Beobachtungen und Ergebnisse.

Als Formel für $(n-1)$ benutzte ich:

$$(n_0 - 1) = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \alpha t)}{L\,(p_1 - p_2)},$$

wobei

s = Zahl der gewanderten Streifen,
λ_0 = die auf Vakuum reduzierte Wellenlänge,
L = Länge der Röhren,
$(p_1 - p_2)$ = Druckunterschied ist.

Die Ableitung der Formel ist in der Traubschen Arbeit zu finden. Die dort mit β bezeichnete Größe

$$[(n-1) = c(p + \beta p^2)]$$

ist nach Mascart für Wasserstoff $\beta = 0{,}00000085$. Die im Nenner stehende Korrektion $\beta\,[760 - (p_1 + p_2)]$ bleibt, da $(p_1 + p_2)$ wenig von 760 verschieden, voll innerhalb der Fehlergrenzen. Für α wurde der Wert $\alpha = 0{,}00366$ benutzt.

Die vorliegende Untersuchung galt der absoluten Bestimmung der Brechungsindizes. Es mußten somit genaue Druck- und Temperaturmessungen angestellt werden. Zu dem Zweck waren sowohl im Wasserbad, als am Quecksilbermanometer und an der Skala des Kathetometers genaue Thermometer angebracht. Besondere Sorgfalt wurde darauf verwendet, daß während einer Messung keine Temperaturänderung stattfand.

Der Wasserstoff wurde elektrolytisch aus reiner Natronlauge dargestellt, getrocknet durch 2 Chlorcalciumröhren, gereinigt mittels einer konzentrierten Lösung von Kaliumbichromat in konzentrierter Schwefelsäure, weiterhin getrocknet mittels Phosphorpentoxyd. Der letzte Gasballon war so groß, daß ich immer genügend getrocknetes Gas zur Verfügung hatte. Als Ausgangs- und Bezugslinie wählte ich die grüne Hg-Linie $\lambda = 5462$ Å.-E. Zur Absolutbestimmung des Brechungsindex für diese Linie verfuhr ich folgendermaßen:

Die Röhren wurden ausgepumpt, bis ich in einem angeschlossenen Geißlerrohr Kathodenstrahlen erhielt. In diesem Zustand wurde eine Aufnahme gemacht. Die Röhren waren vorher gründlich mit Wasserstoff ausgespült worden. Darauf wurde so langsam Gas in eine Röhre eingelassen,

daß die Zahl gewanderter Streifen im Fernrohr gezählt werden konnte. Es passierten durchschnittlich 120 ganze Streifen die Marke im Gesichtsfeld. Nun wurde eine Aufnahme gemacht (2—3 Minuten). Zur Kontrolle wurde die andere Röhre mit Gas gefüllt, bis kein Gangunterschied vorhanden war und wieder eine Aufnahme gemacht. Nun wurden wieder beide Röhren leer gepumpt und derselbe Messungsgang auch für die zweite Röhre durchgeführt. Durch gleichzeitige Beobachtung der Richtung, in welcher die Fransen wanderten und spätere Ausmessung der Platten unter dem Komparator wurde auf diese Weise genau ermittelt, wie viele Interferenzfransen der grünen Hg-Linie die Marke passiert hatten. Bei den Kontrollaufnahmen war keine Änderung während der Messungszeit feststellbar. Aus Druckunterschied und Temperatur wurde der absolute Wert des Brechungsindex der grünen Hg-Linie berechnet. Zu Anfang der Versuche differierten die Messungen noch und waren etwas größer als die Messungen von Koch und Cuthbertson. Nach vielen Versuchen konnte ich feststellen, daß wohl von den Messingröhren adsorbierte Gasreste die Ursache hiervon bildeten. Schließlich erhielt ich als Werte meiner endgültigen Messungen:

$(n-1)\cdot 10^6$
139,59
139,70
139,62
139,69
139,65

Koch und Cuthbertson erhielten aus ihren Messungen für $(n-1)\cdot 10^6$ den Wert: 139,66.

Hiermit hatte ich nun eine als Ausgangspunkt zur Messung der *Dispersion* dienende Linie. Zu ihrer Bestimmung wurde mit den Aufnahmen ebenso verfahren wie oben angegeben. Bis $\lambda = 2302$ Å.-E. reichte die Hg-Lampe. Es genügte eine Belichtungszeit von 2 – 3 Minuten. Die ganzen Streifen konnte ich aus den Messungen Kochs oder aus der Kochschen Dispersionsformel entnehmen. Die Übereinstimmung war sehr gut. Aus der oben angegebenen Formel folgt:

$$\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = \frac{s_1 \cdot \lambda_1}{s_2 \cdot \lambda_2}.$$

Aus dem Absolutwert der grünen Hg-Linie sind damit auch die anderen Absolutwerte gegeben. Das Ergebnis meiner

Messungen ist in folgender Tabelle zusammengestellt. Es ist angegeben, wieviel Streifen einer Wellenlänge 10000 Streifen der grünen Hg-Linie entsprechen.

λ Å.-E. red. Vak.	Serie I		Serie II		Serie III		Serie IV		Mittel
	s	$(n-1)\cdot10^8$	s	$(n-1)\cdot10^8$	s	$(n-1)\cdot10^8$	s	$(n-1)\cdot10^8$	$(n-1)\cdot10^8$
5462·260	10000	13965,0	10000	13965,0	10000	13965,0	10000	13965,0	13965,0
4359·567	12720,2	14177,7			12719,4	14176,8			14177,3
4078·991	13676,0	14262,0	13679,2	14265,3	13677,0	14263,0	13676,6	14262,6	14263,2
4047·698	13790,7	14271,3	13795,0	14275,7	13796,1	14276,9	13791,7	14272,3	14274,1
3342·438	17098,2	14611,1	17104,9	14616,8	17099,6	14612,3	17100,4	14613,0	14613,3
2968·141	19649,3	14910,8	19651,1	14912,2	19646,7	14908,8	19646,4	14908 6	14910,1
2894·452	20251,2	14986,0	20250,0	14985,1	20253,1	14987,4	20249,7	14984,9	14985,9
2753·615	21524,6	15153,3	21518,2	15148,8	21519,9	15150,0	21516,9	15147,9	15150,0
2535·560	23859,2	15466,7			23866,4	15471,4			15469,0
2379·115	25924,9	15768,9	25921,3	15766,7	25920.5	15766,2	25927,8	15770,6	15768,1
2302·870	27074,2	15940,2	27076,3	15941,5	27080,9	15944,2	27075,8	15941,2	15941,8

Die von Koch gefundenen Werte sind in folgender Tabelle dargestellt.

λ Å.-E. (Vakuum)	Serie I		Serie II	
	s	$(n-1)\cdot10^8$	s	$(n-1)\cdot10^8$
5462,23	10000	13966,0	10000	13966,0
4359,54	12720,0	14178,5		
4078,97	13677,1	14264,2		
4047,68	13793,2	14274,9		
3342,42	17100,6	14614,2	17097,8	14611,8
2968,13	19648,6	14911,3	19650,0	14912,4
2894,44	20251,5	14987,3	20251,5	14987,8
2753,60	21521,5	15152,2	21518,5	15150,1
2535,55	23863,7	15470,8	23859,5	15468,0
2379,10	25924,3	15769,6	25923,2	15769,0
2302,86			27077,8	15948,5

Um die Werte für noch kleinere Wellenlängen zu erhalten, mußte ich zu dem Al-Funken übergehen, der dicht vor den Kollimatorspalt gestellt wurde. Hier dauerte die Belichtungszeit erheblich länger und war etwa $1^1/_2$ Stunden, da anscheinend infolge der nicht vollständigen Exaktheit der Jaminplatten die Interferenzstreifen nicht mehr genügend scharf abgebildet wurden und somit ziemlich viel Licht abgeblendet werden mußte. Da der Funke ständig seitlich hin und her sprang, mußte ich während der ganzen Belichtungszeit

mittels eines dem Kollimator gegenüberstehenden Schirmes die Stellung des Funkens fortwährend nachregulieren, um volle Lichtwirkung zu erhalten. Besonders schwierig war auch die Erhaltung gleichmäßiger Temperatur während der langen Belichtungszeiten. Es gelang, die Temperatur bis auf ein zehntel Grad konstant zu halten. Vor und nach jeder Aufnahme mit Funke wurde zur Kontrolle eine Aufnahme mit Hg-Lampe gemacht. Um die ganzen Streifen zu erhalten, benutzte ich die Kochsche Dispersionsformel. Da ich aber größere Abweichungen erhielt, maß ich erst bei einem Druckunterschied von nur einer Interferenzbande der grünen Hg-Linie. Dies wurde mit einer immer größeren Anzahl verschobener grünen Hg-Banden zwischen den Spektralaufnahmen wiederholt, so daß ich schließlich eine genügend große Phasenverschiebung grüner Banden erhielt. Die Druckänderung betrug etwa 70 cm Hg. Die Interferenzen waren scharf und konnten auf der Platte gut ausgemessen werden. Das Ergebnis der Messungen für die Al-Linien ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

λ Å.-E. red. Vak.	Serie I		Serie II		Serie III		Mittel
	s	$(n-1)\cdot 10^8$	s	$(n-1)\cdot 10^8$	s	$(n-1)\cdot 10^8$	$(n-1)\cdot 10^8$
1990·469	33285,2	16938,6	33288,5	16940,2	33287,6	16939,7	16939,5
1935·846	34721,3	17184,4	34715,1	17181,4	34715,2	17181,4	17182,4
1862·749	36865,0	17556,6	36856,2	17552,2	36858,8	17553,5	17554,1
1854·637	37120,5	17601,2	37114,2	17598,2	37116,7	17599,4	17599,6

Vergleich mit anderen Beobachtern.

Ein direkter Vergleich des Absolutwertes des Brechungsexponenten, der als Ausgangslinie dienenden grünen Hg-Linie ist nur mit Koch und C. und M. Cuthbertson möglich. Beide finden den Wert $(n-1)\cdot 10^8 = 13966{,}0$. Dies dürften die genauesten Messungen sein. Die von den übrigen Beobachtern gefundenen Werte weichen hiervon etwas ab. Alle diese Messungen beanspruchen keinen hohen Grad der Genauigkeit. Der Verlauf des Dispersion ist nur vergleichbar mit den Messungen Kochs. Alle übrigen Beobachter haben nur in engem Gebiet des Spektrums die Dispersion des Wasserstoffs untersucht und die von diesen Beobachtern aufgestellten Dispersonsformeln geben bei der Extrapolation schon im sicht-

baren Violett beträchtliche Abweichungen. Die aus der Formel von Koch berechneten Brechungsexponenten finden sich in folgender Tabelle:

$$\left(n^2 - 1 = \frac{2889752 \cdot 10^{-8}}{116{,}7539 - 10^{-8} \cdot \lambda^{-2}} + \frac{1117754 \cdot 10^{-8}}{452{,}5617 + 10^{-8} \cdot \lambda^{-2}}\right).$$

Die Beobachtungen lassen sich darstellen durch die Formel:

$$(1) \quad \begin{cases} (n-1) \cdot 10^8 = 13610{,}1866 + 1{,}0246373 \cdot 10^{10} \cdot \lambda^{-2} \\ \qquad + 990606{,}9 \cdot 10^{10} \cdot \lambda^{-4} + 70{,}512617 \cdot 10^{20} \cdot \lambda^{-6} \end{cases}$$

oder auch

$$(2) \quad (n-1) \cdot 10^8 = \frac{1220070}{118{,}6371 - 10^{-8} \cdot \lambda^{-2}} + \frac{581198{,}1}{175{,}3273 - 10^{-8} \cdot \lambda^{-2}},$$

die aus ersterer Formel berechneten Werte*) finden sich ebenfalls in der Tabelle:

λ Å.-E. red. Vak.	$(n-1) \cdot 10^7$				
	beobachtet	berechnet*)	Δ	nach Koch	Δ
5462·260	1396,50	1396,50	±0	1396,60	−0,10
4359·567	1417,73	1417,77	−0,04	1417,91	−0,18
4078·991	1426,32	1426,33	−0,01	1426,48	−0,16
4047·698	1427,41	1427,41	±0	1427,59	−0,18
3342·438	1461,33	1461,18	+0,15	1461,28	+0,05
2968·141	1491,01	1491,11	−0,10	1491,17	−0,16
2894·452	1498,59	1498,63	−0,04	1498,67	−0,08
2753·615	1515,00	1515,00	±0	1515,01	−0,01
2535·560	1546,90	1547,01	−0,11	1547,01	−0,11
2379·115	1576,81	1576,85	−0,04	1576,92	−0,11
2302·870	1594,18	1594,18	±0	1594,33	−0,15
1990·469	1693,95	1694,08	−0,13	1705,75	−1,80
1935·846	1718,24	1718,37	−0,13	1720,65	−2,41
1862·749	1755,41	1755,47	−0,06	1759,81	−4,40
1854·637	1759,96	1759,96	±0	1763,75	−3,79

Der Fehler der Beobachtungen dürfte kleiner als 0,01% sein, so daß mindestens die 4. Stelle der relativen Messungen der Brechungsexponenten sicher ist. Bei den Absolutwerten konnte dieselbe Genauigkeit nicht erzielt werden. Man erhält als mittleren Fehler ungefähr 0,04%. Da bei Messung der 50 cm langen Röhren mittels Kathetometer nicht mehr als die Zehntel-Millimeter mit Sicherheit angegeben werden konnten, dürfte die 4. Stelle von $(n-1) \cdot 10^8$ gesichert sein. Koch gibt seine Fehler ebenfalls auf kleiner als 0,01% an. Die Übereinstimmung mit Koch ist außerordentlich gut. Abweichungen von den Kochschen Messungen liegen innerhalb der Fehlergrenzen.

Vergleich mit der Dispersionsformel von Debye.

Debye stellt den Verlauf der Dispersion in abgekürzter Form dar durch die Formel:

$$(n-1) = 2\pi N \frac{\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\left[6{,}42266 + 25{,}0989\,\frac{s^2}{\omega^2}\right].$$

Da diese Formel zur Darstellung der Dispersion nicht ausreicht, habe ich ihre ursprüngliche vollständige Form:

$$\frac{n^2-1}{4\pi N} = \frac{\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\left[\frac{2{,}97429}{1-\left(\frac{s}{0{,}412375\,\omega}\right)^2} + \frac{2{,}15347}{1-\left(\frac{s}{0{,}556397\,\omega}\right)^2}\right.$$
$$+ \frac{0{,}0276447}{1-\left(\frac{s}{2{,}412375\,\omega}\right)^2} + \frac{0{,}246581 + 0{,}579918\left(1-\frac{s}{\omega}\right)}{0{,}304388 + \left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2}$$
$$\left. + \frac{0{,}246581 + 0{,}579918\left(1+\frac{s}{\omega}\right)}{0{,}304388 + \left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2}\right]$$

nach s/ω entwickelt und ein weiteres Glied noch hinzugenommen. Ich erhielt so

$$n^2-1 = \frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\Big[\; 2{,}97429 + 17{,}49040\,\frac{s^2}{\omega^2} + 102{,}8522\,\frac{s^4}{\omega^4}$$
$$+ 2{,}15347 + 6{,}95615\,\frac{s^2}{\omega^2} + 22{,}4698\,\frac{s^4}{\omega^4}$$
$$+ 0{,}02764 + 0{,}00475\,\frac{s^2}{\omega^2} + 0{,}0008\,\frac{s^4}{\omega^4}$$
$$+ 0{,}63363 + 0{,}32219\,\frac{s^2}{\omega^2} - 0{,}10896\,\frac{s^4}{\omega^4}$$
$$+ 0{,}63363 + 0{,}32219\,\frac{s^2}{\omega^2} - 0{,}10896\,\frac{s^4}{\omega^4}\Big]$$

oder zusammengefaßt:

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\left[6{,}42266 + 25{,}09568\,\frac{s^2}{\omega^2} + 125{,}1049\,\frac{s^4}{\omega^4}\right],$$

hierin bedeutet:

- n Brechungsindex,
- N Anzahl der Moleküle in 1 ccm,
- ε positive Ladung der Kerne,
- μ Masse des Elektrons,
- ω Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung,
- s Frequenz der einfallenden Welle (Schwingungszahl in 2π sec).

Führt man an Stelle der Frequenz s die Wellenlänge λ ein, so erhält man aus der letzten Formel:

$$n^2-1=\frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}[6{,}42266+8916{,}642\cdot10^{20}\cdot\omega^{-2}\cdot\lambda^{-2}+15793530\cdot10^{40}\cdot\omega^{-4}\cdot\lambda^{-4}]\quad(\lambda\text{ in cm}).$$

Diese Gleichung hat die Form:

$$n^2-1=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}.$$

Stellt man mittels der graphisch ausgeglichenen Werte für $(n-1)$ in dieser Form (n^2-1) als Funktion der λ dar, so erhält man folgende Gleichung:

$$(n^2-1)=0{,}0002723513+199{,}5973\cdot10^{-16}\cdot\lambda^{-2}+2{,}5676424\cdot10^{-24}\cdot\lambda^{-4}.$$

Soll dies mit der Formel von Debye übereinstimmen, so muß sein:

$$\frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\cdot6{,}42266=2{,}723513\cdot10^{-4},$$

$$\frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\cdot8916{,}642\cdot10^{20}\cdot\omega^{-2}=199{,}5973\cdot10^{-16},$$

$$\frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\cdot15793530\cdot10^{40}\cdot\omega^{-4}=2{,}5676424\cdot10^{-24}.$$

Hieraus folgt:

$$\omega=3{,}7106\cdot10^{16},$$

$$\frac{N\varepsilon^2}{\mu}=6{,}39008\cdot10^{27},$$

$$\frac{\varepsilon}{\mu}=4{,}9574\cdot10^{17}.$$

Aus den Messungen Kochs und Cuthbertsons hat Debye hierfür folgende Werte erhalten. In der letzten Spalte sind meine Werte angeführt:

	Nach Debye aus Messungen von		meine Werte
	Koch	Cuthbertson	
ω	$4{,}214\cdot10^{16}$	$4{,}38\cdot10^{16}$	$4{,}3521\cdot10^{16}$
$\frac{N\varepsilon^2}{\mu}$	$5{,}987\cdot10^{27}$	$6{,}48\cdot10^{27}$	$6{,}3901\cdot10^{27}$
$\frac{\varepsilon}{\mu}$	$4{,}64\cdot10^{17}$	$5{,}01\cdot10^{17}$	$4{,}9574\cdot10^{17}$

Im Sinne der Quantentheorie ist nun nach Debye ω dadurch bestimmt, daß das Impulsmoment eines Elektrons gleich einem Vielfachen $\frac{1}{\delta}$ von h gesetzt wird (h = Planksches Wirkungsquantum) $\mu a^2 \omega = \frac{1}{\delta} \cdot h$. ($a$ = Radius der Bahn der Elektronen.) Andererseits ist als Gleichgewichtsbedingung des Moleküls:

$$\mu a \omega^2 = \frac{3\sqrt{3}-1}{4} \frac{\varepsilon^2}{a^2}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\omega = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 \frac{\varepsilon^2 \mu}{\frac{1}{\delta^3} \cdot h^3}.$$

Hierin ist, um im Einklang zu bleiben mit der theoretischen Ansicht über die Einführung der Quanten bei der Rotationsbewegung für $\frac{1}{\delta}$ zu setzen:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{2\pi}.$$

Setzt man noch die Werte ein: $\varepsilon = 4{,}773 \cdot 10^{-10}$ (Sommerfeld), $\frac{\varepsilon}{\mu} = 5{,}295 \cdot 10^{17}$ (Paschen) und $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$, so erman für ω den Wert $\omega = 4{,}5342 \cdot 10^{16}$. Stellt man den Verlauf der Dispersion mittels der Debyeschen Formel und dem Wert $\omega = 4{,}5342 \cdot 10^{16}$ dar, so zeigt sich aus folgender Tabelle, daß die Kurve für $(n-1) \cdot 10^6$ aus den beobachteten Werten steiler verläuft, als nach der Debyeschen Formel. Die Abweichungen im Ultraviolett sind recht beträchtlich.

λ Å.-E.	$(n-1) \cdot 10^6$		Differenz
	nach Formel von Debye	beobachtet	
5462,260	137,0	139.6	−2,6
4047,698	139 9	142,7	−2,8
2894,452	146,3	149,9	−3,6
1854,637	170,2	176,0	−5,8

Zusammenfassung.

1. Bestimmung des Absolutwertes des Brechungsexponenten von Wasserstoff für die grüne Hg-Linie

$$[(n-1) \cdot 10^6 = 139{,}65].$$

Die vierte Stelle ist als sicher anzusehen.

2. Messung der Dispersion bis 1854 Å.-E. Darstellung der Beobachtungen durch zwei Formeln mit guter Annäherung. Die Messungen stimmen mit den Kochschen Werten gut überein; bei Extrapolation der Kochschen Formel für die kleineren Wellenlängen ergeben sich Abweichungen.

3. Vergleich mit der Dispersionsformel von Debye ergibt einen steileren Verlauf der beobachteten Dispersionskurve als der der errechneten.

Vorliegende Arbeit wurde Ende Sommersemester 1919 begonnen und Anfang Sommersemester 1920 vollendet.

Hrn. Professor Paschen danke ich ehrfurchtvollst für seine vielfache Unterstützung.

Tübingen, Physikalisches Institut, Mai 1920.

(Eingegangen 18. Oktober 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1869

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen

und für wissenschaftliche Zwecke

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P. System Gaede, D.R.P. angemeldet

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neue Industrietypen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen. D.R.P. **Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.**

Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen.

Trockene Schieber-luftpumpen.

Quecksilberluftpumpen aller Systeme.

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrations-schaltung.

Alle Hebevorrichtungen.

Seite

1. [illegible] Gravitationsfeld in einer [illegible] Welt 577
2. [illegible] Über die [illegible] bei der spontanen Änderung der Magnetisierung 600
3. [illegible] Über die [illegible] magnetische Permeabilität. [illegible] Arbeit des Herrn Fritz Erhardt . 621
4. [illegible] Über die Trägererzeugung hochfrequenter Wellenstrahlung in abgeschlossenen Gasräumen 625
5. Karl [illegible] Zur kinetischen Theorie des osmotischen Druckes 648
6. [illegible] Temperaturen. (III. Teil.) 661
7. W. Hahnemann und M. Hecht. Entgegnung auf die Bemerkung von M. Wien zu unserer Arbeit: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons" 671

Die Redaktion der Annalen wird von den unseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 9 I.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bitte sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1921. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld in einer elektrizitätsfreien Welt*[1]); *von Ernst Reichenbächer.*

I. Ergänzung und Umbildung der Feldgleichungen.

In meiner Arbeit VI hatte ich auf S. 138 für den kugelsymmetrischen Fall im ganzen 6 Gleichungen A bis F mit 7 Unbekannten aufgestellt (wenn die Eichung gemäß der Gleichung 9 auf S. 117 getroffen worden ist) und hinzugefügt, daß ich eingehendere Lösungsversuche zurückstellen wollte, bis es mir gelänge, eine passende Hilfshypothese für die 7. Beziehung zwischen jenen Unbekannten zu wählen. Nun scheint mir diese durch die nachfolgende Überlegung gegeben zu sein, die allerdings die Annahme voraussetzt, daß der von mir zugrunde gelegte Faktor l oder $e^{\mathfrak{A}}$ der Gravitationsverzerrung sich auf eine Koordinate bezieht, die in der einen der beiden Parameterflächen des natürlichen elektromagnetischen Systems liegt, in denen allein Komponenten des Sechservektors auftreten[2]), und die überdies zeitartigen Charakter hat. Diese

1) Ich werde des öfteren meine früheren, sämtlich in den Annalen der Physik erschienenen, Arbeiten zu diesem Punkte unter den beigegebenen Nummern anführen:

I. Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation, nebst Nachtrag. 52. S. 134. 1917.

II. Das skalare Gravitationspotential. 61. S. 1. 1920.

III. Die Krümmung des Lichtstrahls infolge der Gravitation. 61. S. 21. 1920.

IV. Die Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde. 61. S. 25. 1920.

V. Über die Nichtintegrabilität der Streckenübertragung und die Weltfunktion in der Weylschen verallgemeinerten Relativitätstheorie. 63. S. 93. 1920.

VI. Die Feldgleichungen der Gravitation und der Elektrizität innerhalb der Materie 63. S. 115. 1920.

2) Vgl. VI, S. 122.

auch im allgemeinen Falle sehr wahrscheinliche Voraussetzung ist offenbar dann gegeben, wenn das Feld Kugelsymmetrie zeigt, die zeitliche der Verzerrung unterworfene Richtung also parallel der hier als Gerade auftretenden Weltlinie des Elektrons läuft, demnach überall in die einzige hier vorhandene, überdies ebene, Fläche des Sechservektors in jedem Punkte fällt.

Gilt diese von mir geforderte Annahme, so kann ich daher ein Koordinatensystem wählen, innerhalb dessen nur die Komponenten f_{01} und f_{23} des Sechservektors von 0 verschieden sind und in dem die Gravitationswirkung sich in einer Verzerrung der x^0-Linien äußert. Die anderen Koordinaten bleiben entweder völlig ungeändert oder sind nur solchen Abweichungen unterworfen, die die Feldgleichung $\mathfrak{R} = 2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A}$ zulassen, wenn man die elektrischen Wirkungen dabei nicht berücksichtigt.[1]) Nun kann ich in einem solchen Systeme das Eingehen des Gravitationsskalars $\mathfrak{A}$ in die Komponenten des Fundamentaltensors auch nach der Verzerrung verfolgen und brauche nicht wie in meiner Arbeit VI auf die unverzerrten Koordinaten zurückzugreifen. Er ist nämlich nur in $g_{00} = e^{2\mathfrak{A}} g_{00}'$ (also $g^{00} = e^{-2\mathfrak{A}} g^{00'}$) und daher auch in G (in derselben Weise, d. h. als Faktor $e^{2\mathfrak{A}}$) enthalten. Jetzt gehe ich wieder von dem Ansatz für die Weltfunktion[2]):

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{f}^2 + \frac{1}{\mathfrak{B}}\left[\mathfrak{B}\,\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\,\mathfrak{g}^2\right]^2$$

aus. Bei der Bildung der Variationen ist jetzt, also im verzerrten Systeme, zu beachten, daß $\sqrt{G}, \mathfrak{f}^2, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F}$[3]) nur von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{g}^2$ von $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}$ abhängen, und zwar ist

$$\begin{aligned}\sqrt{G}\,\mathfrak{f}^2 &= e^{\mathfrak{A}}\sqrt{G'}\,(e^{-2\mathfrak{A}} g^{00'} g^{11} f_{01}^{\ 2} + g^{22} g^{33} f_{23}^{\ 2}) \\ &= (e^{-\mathfrak{A}} g^{00'} g^{11} f_{01}^{\ 2} + e^{+\mathfrak{A}} g^{22} g^{33} f_{23}^{\ 2})\sqrt{G'},\end{aligned}$$

1) Vgl. hierzu II.

2) Vgl. hierzu VI, S. 115 u. 119.

3) Es ist doch wohl folgerichtiger, entgegen meiner früheren Festsetzung (I. S. 178. V, S. 108) $\mathfrak{F}$ wegen des im Nenner der Divergenz auftretenden Gliedes $\sqrt{G}$ als von $\mathfrak{A}$ abhängig anzusehen. Würde ich davon absehen und gleichzeitig $\sqrt{G}\,g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} f_{\varrho\sigma}$ als bei der Variation unveränderliche Quantitätsgröße behandeln, so ergäbe sich unmittelbar wieder Gleichung 18 in VI, S. 122.

$$\sqrt{G}\,\mathfrak{F} = -\sqrt{G}\,\mathfrak{R} - 3\,\frac{\partial \sqrt{G}\,\varphi^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{3}{2}\sqrt{G}\,(\varphi_\nu \varphi^\nu)$$

$$= -2\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu} - 3\,\frac{\partial \sqrt{G}\,\varphi^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{3}{2}\sqrt{G}\,(\varphi_\nu \varphi^\nu).$$

Bei der Variation will ich nun die „Quantitätsgrößen" $\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}$ und $\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\varphi_\mu$ unverändert lassen[1]); das kann ich aber nicht mit $\sqrt{G}\,g^{\mu\varrho}g^{\nu\sigma}f_{\varrho\sigma}$ tun, da die zur Intensitätsgröße $f_{\mu\nu}$ gehörige Quantitätsgröße nach Mie[2]) doch wohl mit $\sqrt{G}\,h^{\mu\nu}$ identisch ist, der Verschiebungsvektor $h^{\mu\nu}$ aber in die Weltfunktion als nicht eichinvariant nicht aufgenommen ist.

Dann erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^1\sqrt{G}}{\partial \mathfrak{A}} = (-e^{-\mathfrak{A}}\,g^{00'}g^{11}f_{01}^{\,2} + e^{\mathfrak{A}}\,g^{22}g^{33}f_{23}^{\,2})\,\sqrt{G'}$$

$$= -\sqrt{G}\,(f_{01}f^{01} - f_{23}f^{23})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^1\sqrt{G}}{\partial \mathfrak{A}} = -\sqrt{G}\,\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2},$$

$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{A}} = -\mathfrak{F}$, da $\frac{\partial \mathfrak{F}\sqrt{G}}{\partial \mathfrak{A}} = 0$ und $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{A}} = \sqrt{G}$ ist. Daher

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{A}}\,\frac{\sqrt{G}}{\mathfrak{B}}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\,\mathfrak{g}^2]^2 = \frac{\sqrt{G}}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}')[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]^2$$

$$+ \frac{2\sqrt{G}}{\mathfrak{B}}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\,\mathfrak{g}^2][-(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}')\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}'' - 2\mathfrak{B}')\,\mathfrak{g}^2].$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial \mathfrak{A}} = -\sqrt{G}\,\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} - \frac{\sqrt{G}}{\mathfrak{B}^2}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\,\mathfrak{g}^2]$$

$$[\mathfrak{B}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}')\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}(\mathfrak{B}'' - 2\mathfrak{B}')\,\mathfrak{g}^2 + (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}')\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2].$$

Wie in V. und VI. ist

$$\frac{\partial \mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}} = -\frac{2}{\mathfrak{B}}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\,\mathfrak{g}^2](\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\sqrt{G}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial \mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}} = -\frac{2}{\mathfrak{B}}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\,\mathfrak{g}^2](\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\sqrt{G}$$

$$\Big[\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A} - g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}}\,\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial \lg[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]}{\partial x^\mu}$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}'' - 2\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B}}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\Big].$$

1) Vgl. V. S. 108.

2) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys. 37. S. 518/9. 1912.

In der bei der Variation herauskommenden Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial \mathfrak{A}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}}$$

heben sich die unterstrichenen Glieder auf; die übrigen ergeben nach Division durch $\sqrt{G}$:

$$-\sqrt{\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} - \frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}^3}[\mathfrak{B}\mathfrak{F}-(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2][\mathfrak{B}\mathfrak{F}+(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]$$
$$= -\frac{2}{\mathfrak{B}}[\mathfrak{B}\mathfrak{F}-(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2][\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B}]\Big[\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} - g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}$$
$$+ g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg[\mathfrak{B}\mathfrak{F}-(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]}{\partial x^\mu}\Big].$$

Die rechte Seite ist nun nach VI, S. 122, Gleichung (18)

$$= \frac{1}{\mathfrak{B}}[\mathfrak{B}\mathfrak{F}-(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2][\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B}]\Big[\mathfrak{F}+\mathfrak{g}^2\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}}\Big].$$

Die Variation im verzerrten Systeme führt also zum gleichen Ergebnis wie die im unverzerrten, wenn

$$-\sqrt{\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} = \frac{1}{\mathfrak{B}^2}[\mathfrak{B}\mathfrak{F}-(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2][\mathfrak{B}(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}')\mathfrak{F}$$
$$+(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}')(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2+\mathfrak{B}(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{F}+(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2]$$
$$= -\frac{1}{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}\mathfrak{F}-(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]^2.$$

Es kann also nur Übereinstimmung zwischen beiden Verfahren herrschen, wenn

$$(1) \qquad [\mathfrak{B}\mathfrak{F}-(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]^2 = \mathfrak{B}\sqrt{\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}\ ^{1})$$

gesetzt wird. Diese Gleichung, die ebenfalls eich- und koordinateninvariant ist, will ich nun mit heranziehen, um im kugelsymmetrischen Falle die Unbestimmtheit des Problems zu beseitigen.

---

1) Es ist übrigens nach VI, S. 142, Gleichung (34)

$$\sqrt{\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} = \frac{2\mathfrak{T}_0{}^0}{\mathfrak{p}},$$

wo $\mathfrak{T}_0{}^0$ die Ruhenergie des elektromagnetischen Feldes und $\mathfrak{p}$ den Skalar in der Gleichung

$$h_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{p} + f^*_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{o}$$

zwischen Verschiebungsvektor h und Feldvektor f bedeutet. Man erhält also auch

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{F}-(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2] = \frac{2\mathfrak{B}}{\mathfrak{p}}\mathfrak{T}_0{}^0.$$

Die Wahl der von $\mathfrak{A}$ allein abhängigen Größe $\mathfrak{B}$, die bisher der größeren Allgemeinheit zuliebe offen gelassen war, ist nun in Übereinstimmung mit meinen Arbeiten V und VI dahin zu treffen, daß sie gleich der Weylschen Konstanten $-\frac{1}{\beta}$ gesetzt wird, damit die Feldgleichung (18) in VI in meine frühere (VI 5)

$$\mathfrak{R} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} \tag{2}$$

bei Abwesenheit der Elektrizität übergeht. Ich will aber dies gleich verallgemeinern, da die von mir in VI, S. 127, Gleichungen (16a) aufgestellten Beziehungen das restlose Verschwinden der elektromagnetischen Größen unmöglich machen, weil die Konstante $\varkappa$ von 0 verschieden gewählt werden muß (Gleichung (8) auf S. 126) und daher

$$\mathfrak{R} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{R}_0, \tag{2a}$$

worin $\mathfrak{R}_0$ die Krümmung der ursprünglichen, d. h. gravitationsfreien, Raumzeitmannigfaltigkeit bedeutet und im einfachsten Falle konstant anzunehmen ist $\left(-\frac{6}{R^2}\right.$ in der Zylinderwelt Einsteins, $-\frac{12}{R^2}$ in der de Sitterschen Welt konstanter Krümmung$\left.\right)$.

II. Die Bestimmung der Fundamentalkomponente g_{11}.

Während die soeben getroffene Erweiterung völlig in den Rahmen meiner Theorie des skalaren Gravitationspotentials hineinpaßt[1]), ist es eine andere Frage, ob es sich mit dieser verträgt, die Fundamentalkomponente g_{11} von 1 verschieden anzunehmen, was zu einer Verzerrung des Ruhraums des anziehenden Massenpunktes führt, wie sie z. B. Einstein annimmt, um sämtliche Komponenten $K_{\mu\nu}$ des verjüngten Krümmungstensors zum Verschwinden zu bringen. Ich hatte in meinen bisherigen Arbeiten von einer solchen Verzerrung abgesehen, aber wiederholt betont, daß das skalare Potential auch möglich ist, wenn man sie annimmt. In welchem Umfange das zutrifft, will ich nun untersuchen. Dabei will ich

1) Vgl. II, S. 17, Gleichung (1), worin $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}'$ durch $\mathfrak{R}$ zu ersetzen wäre.

mich aber, um im Rahmen der vorliegenden Arbeit zu bleiben, auf das Feld eines Massenpunktes beschränken; als unverzerrte Ausgangsmannigfaltigkeit nehme ich die Einsteinsche Zylinderwelt an, die für $R = \infty$ das Minkowskische Kontinuum mit umfaßt und auch, wie wir sehen werden, Gelegenheit gibt, den de Sitterschen Fall mit zu erledigen.

Dabei will ich mich der Gleichung (10) auf S. 11 meiner Arbeit II bedienen, die es ermöglicht, die lästigen Berechnungen der Krümmung aus den Christoffelschen und Riemannschen Symbolen zu vermeiden. Das Linienelementquadrat (L. E. Q.) der betrachteten Mannigfaltigkeit mit räumlicher Kugelsymmetrie sei

$$ds^2 = g_{00}\,dx^{0\,2} + g_{11}\,dr^2 + R^2 \sin^2\frac{r}{R}\,d\varphi^2 + R^2 \sin^2\frac{r}{R}\sin^2\varphi\,d\vartheta^2.$$

Dabei ist g_{00} beliebig, z. B. für die unverzerrte Zylinderwelt 1, für die Welt konstanter Krümmung $R^2 \sin^2\frac{r}{R}\sin^2\varphi\sin^2\vartheta$, g_{11} aber nur von r abhängig.

Für zwei Dimensionen ($dx^0 = d\vartheta = 0$) erhalte ich im Falle $g_{11} = 1$ aus der Gleichung 10, da $\mathfrak{k}$, die Krümmung einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit, verschwindet, und g_{22}, das hier die Stelle von g_{00} vertritt, gleich $R^2 \sin^2\frac{r}{R}$ ist:

$$\mathfrak{K} = 0 + \frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \lg g_{00}}{dr}\right)^2 = -\frac{2}{R^2 \sin^2\frac{r}{R}} + \frac{2}{R^2}\operatorname{ctg}^2\frac{r}{R} = -\frac{2}{R^2},$$

natürlich ein selbstverständliches Ergebnis, wenn man sich erinnert, daß das Riemannsche Krümmungsmaß bei Anwendung unserer Definition von $K_{\mu\nu}$ das negative Doppelte des Gaußschen ist. Ich möchte sogleich darauf hinweisen, daß bei dieser Berechnung die erste Klammer in Gleichung (10) wegfällt, da die Determinante g der Fundamentalkomponenten der Untermannigfaltigkeit von der neu hinzutretenden Koordinate unabhängig ist. Das wird der Fall sein, solange g_{11} gleich 1 gesetzt wird.

Für drei Ausdehnungen lehrt Gleichung 10, da $\mathfrak{k} = -\frac{2}{R^2}$, $g_{11} = 1$, $g_{22} = g = R^2 \sin^2\frac{r}{R}$, $g_{00}(g_{33}) = R^2 \sin^2\frac{r}{R}\sin^2\varphi$, $ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\frac{r}{R}\,d\varphi^2 + R^2 \sin^2\frac{r}{R}\sin^2\varphi\,d\vartheta^2$, daß

$$\mathfrak{R} = -\frac{2}{R^2} + \frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d \lg g_{00}}{dr}\frac{d \lg \sqrt{g}}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \lg g_{00}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{g_{22}}\left[\frac{d^2 \lg g_{00}}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \lg g_{00}}{d\varphi}\right)^2\right]$$

wird.

$$\mathfrak{R} = -\frac{2}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{2}{R^2}\operatorname{ctg}^2 \frac{r}{R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}}\left[-\frac{2}{\sin^2 \varphi} + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi\right] = -\frac{6}{R^2}.$$

Für vier Dimensionen liefert sie bei dem Einsteinschen L. E. Q.:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi \, d\vartheta^2 + dx^{02}$$

natürlich sofort $\mathfrak{R} = \mathfrak{k} = -\frac{6}{R^2}$. Ist aber im de Sitterschen Falle:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi \, d\vartheta^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta \, dx^{02},$$

so wird

$$\mathfrak{k} = -\frac{6}{R^2}, \; g_{11} = 1, \; g_{22} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}, \; g_{33} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi,$$

$$g = R^4 \sin^4 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi, \; g_{00} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta,$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{6}{R^2} + \frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d \lg g_{00}}{dr}\frac{d \lg \sqrt{g}}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \lg g_{00}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{g_{22}}\left[\frac{d^2 \lg g_{00}}{d\varphi^2} + \frac{d \lg g_{00}}{d\varphi}\frac{d \lg \sqrt{g}}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \lg g_{00}}{d\varphi}\right)^2\right] + \frac{1}{g_{33}}\left[\frac{d^2 \lg g_{00}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \lg g_{00}}{d\vartheta}\right)^2\right]$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{6}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{4}{R^2}\operatorname{ctg}^2 \frac{r}{R} + \frac{2}{R^2}\operatorname{ctg}^2 \frac{r}{R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}}\left[-\frac{2}{\sin^2 \varphi} + 2\operatorname{ctg}^2 \varphi + 2\operatorname{ctg}^2 \varphi\right] + \frac{1}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi}\left[-\frac{2}{\sin^2 \vartheta} + 2\operatorname{ctg}^2 \vartheta\right]$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{12}{R^2}.$$

Die Fortsetzung des Verfahrens liefert, wie leicht ersichtlich, für n Ausdehnungen

$$\mathfrak{K} = -\frac{n(n-1)}{R^2},$$

woraus die Gaußsche Krümmung sich, wie selbstverständlich, zu $\frac{n(n-1)}{2R^2}$ ergibt. Aus der Krümmung $K = -\frac{6}{R^2}$ der unverzerrten Zylinderwelt kann man nun nach Gleichung (1) auf S. 17 der Arbeit II die Krümmung $\mathfrak{K}'$ für den Fall berechnen, daß g_{00} von 1 verschieden (aber von x^0 unabhängig) ist, was man dann auch für die de Sitterwelt spezialisieren kann. Es ist aber dabei zu beachten, daß g_{00} in unserem Sinne gleich der Größe $\mathfrak{l}^2$ der angegebenen Gleichung ist, während das dortige $g_{00} = 1$ wird. Danach bekommt man für das L. E. Q.:

$$ds^2 = g_{00}\,dx^{0\,2} + dr^2 + R^2 \sin^2\frac{r}{R}\,d\varphi^2 + R^2 \sin^2\frac{r}{R}\sin^2\varphi\,d\vartheta^2$$

das Krümmungsmaß

$$\mathfrak{K} = -\frac{6}{R^2} + 2\,\mathrm{Div\ Grad\ lg}\sqrt{g_{00}}\,.$$

(Setzt man $g_{00} = R^2 \sin^2\frac{r}{R}\sin^2\varphi\sin^2\vartheta$ mit de Sitter, so wird $\mathrm{Div\ Grad\ lg}\sqrt{g_{00}} = -\frac{3}{R^2}$, also $\mathfrak{K} = -\frac{12}{R^2}$).

Will ich nun aber noch die nur von r abhängende Größe g_{11} anführen, so kann ich nicht die Gleichung (1) auf S. 17 benutzen, woran man wohl denken könnte, wenn man die Indizes 0 und 1 vertauscht; denn zu der Gültigkeit dieser Gleichung gehört die Voraussetzung (vgl. S. 15), daß der Verzerrungsfaktor $\mathfrak{l}$ von der betreffenden Koordinate x^0 (hier also r!) unabhängig ist. Hier ist ja aber gerade gefordert, daß das $\mathfrak{l}$ entsprechende $\sqrt{g_{11}}$ nur Funktion von x^1 oder r ist. Ich wende also wieder Gleichung (10) auf S. 11 an, in der ich ebenfalls die Indizes 0 und 1 vertausche. Setze ich dann zunächst $g_{11} = 1$, so erhalte ich die Krümmung $\mathfrak{k}$ der 023-Räume in der Welt mit dem L. E. Q.:

$$ds^2 = g_{00}\,dx^{0\,2} + dr^2 + R^2 \sin^2\frac{r}{R}\,d\varphi^2 + R^2 \sin^2\frac{r}{R}\sin^2\varphi\,d\vartheta^2$$

und

$$\mathfrak{K} = -\frac{6}{R^2} + 2\,\mathrm{Div\ Grad\ lg}\sqrt{g_{00}}\,.$$

Daher erhält man nach Gleichung (10) auf S. 11:

$$\mathfrak{k} = -\frac{6}{R^2} + 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\lg\sqrt{g_{00}} - \left\{\frac{d^2\lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d^2\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\lg g_{00}}{dr} + \frac{d\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{d\lg g_{00}}{dr}\right)^2 + 2\left(\frac{d\lg R^2\sin^2\frac{r}{R}}{dr}\right)^2\right]\right\}.$$

$$\mathfrak{k} = -\frac{6}{R^2} + 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\lg\sqrt{g_{00}} - \left[\frac{d^2\lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d^2\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\lg g_{00}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\lg g_{00}}{dr}\frac{d\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr} + \frac{3}{8}\left(\frac{d\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr}\right)^2\right]$$

$$\mathfrak{k} = -\frac{6}{R^2} + 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\lg\sqrt{g_{00}} - \left[\frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d^2\sqrt{g_{00}}}{dr^2} + \frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d\sqrt{g_{00}}}{dr}\frac{d\lg R^2\sin^2\frac{r}{R}}{dr} - \frac{4}{R^2\sin^2\frac{r}{R}} + \frac{6}{R^2}\,\mathrm{ctg}^2\frac{r}{R}\right]$$

$$\mathfrak{k} = -\frac{6}{R^2} + 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\lg\sqrt{g_{00}} - \left[\frac{2}{R^2\sin^2\frac{r}{R}\sqrt{g_{00}}}\frac{d}{dr}R^2\sin^2\frac{r}{R}\sqrt{g_{00}}\,\frac{d\lg\sqrt{g_{00}}}{dr} + \frac{2}{R^2\sin^2\frac{r}{R}} - \frac{6}{R^2}\right].^{1)}$$

---

1) Durch Auflösen der Divergenz erhält man die Gleichung:

$$\mathfrak{k} = -\frac{2}{R^2\sin^2\frac{r}{R}} + \frac{2}{\sin\varphi\sqrt{g_{00}}}\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\sqrt{g_{00}}}{g_{22}}\frac{d\lg\sqrt{g_{00}}}{d\varphi} + \frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d}{d\vartheta}\frac{\sqrt{g_{00}}}{g_{33}}\frac{d\lg\sqrt{g_{00}}}{d\vartheta}$$

Tritt nun aber zum L. E. Q. das Glied $g_{11}\,dr^2$ hinzu, so vergrößert sich wiederum nach Gleichung (10) auf S. 11 f um das Glied

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{k}=\frac{1}{g_{11}}\left[\frac{d^2\lg g_{00}}{dr^2}+\frac{d^2\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\lg g_{00}}{dr}\right)^2\right.$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{d\lg g_{00}}{dr}\,\frac{d\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr}+\frac{3}{8}\left(\frac{d\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr}\right)^2$$
$$\left.-\frac{1}{2}\,\frac{d\lg g_{11}}{dr}\left(\frac{d\lg g_{00}}{dr}+\frac{d\lg R^4\sin^4\frac{r}{R}}{dr}\right)\right]$$

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{k}=\frac{1}{g_{11}}\left[\frac{2}{R^2\sin^2\frac{r}{R}\sqrt{g_{00}}}\,\frac{d}{dr}\,R^2\sin^2\frac{r}{R}\sqrt{g_{00}}\,\frac{d\lg\sqrt{g_{00}}}{dr}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{R^2\sin^2\frac{r}{R}}-\frac{6}{R^2}-2\,\frac{d\lg\sqrt{g_{11}}}{dr}\,\frac{d\lg R^2\sin^2\frac{r}{R}\sqrt{g_{00}}}{dr}\right]$$

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{k}=\frac{2}{R^2\sin^2\frac{r}{R}\sqrt{g_{00}g_{11}}}\,\frac{d}{dr}\,R^2\sin^2\frac{r}{R}\sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}}\,\frac{d\lg\sqrt{g_{00}}}{dr}$$
$$+\frac{2}{g_{11}}\,\frac{d\lg\sqrt{g_{11}}}{dr}\,\frac{d\lg\sqrt{g_{00}}}{dr}+\frac{1}{g_{11}}\left(\frac{2}{R^2\sin^2\frac{r}{R}}-\frac{6}{R^2}\right)$$
$$-\frac{2}{g_{11}}\,\frac{d\lg\sqrt{g_{11}}}{dr}\,\frac{d\lg R^2\sin^2\frac{r}{R}\sqrt{g_{00}}}{dr}\,.$$

Ersetzt man hierin den Wert von $\mathfrak{k}$ (vgl. Anmerkung 1), so erhält man:

---

mit $g_{22}=R^2\sin^2\frac{r}{R}$, $g_{33}=R^2\sin^2\frac{r}{R}\sin^2\varphi$, die für ein nur von r abhängiges g_{00} den selbstverständlichen Wert $-\frac{2}{R^2\sin^2\frac{r}{R}}$, hingegen den ebenso trivialen Ausdruck $-\frac{6}{R^2\sin^2\frac{r}{R}}$ liefert, wenn in g_{00} noch die Faktoren $\sin^2\varphi\sin^2\vartheta$ hinzutreten.

$$\mathfrak{R} = -\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{2}{\sin\varphi \sqrt{g_{00}}} \frac{d}{d\varphi} \frac{\sin\varphi \sqrt{g_{00}}}{g_{22}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{d\varphi}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{d\vartheta} \frac{\sqrt{g_{00}}}{g_{22}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{d\vartheta} + \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00} g_{11}}}$$

$$\frac{d}{dr} R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{dr}$$

$$+ \frac{1}{g_{11}} \left(\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} - \frac{6}{R^2} \right) - \frac{4}{g_{11}} \frac{d \lg \sqrt{g_{11}}}{dr} \cdot \frac{1}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R}$$

$\mathfrak{R} = 2\,\mathrm{Div\ Grad} \lg \sqrt{g_{00}}$ im neuen System

$$+ \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \cos \frac{r}{R}} \frac{d}{dr} \left[R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R} \left(\frac{1}{g_{11}} - 1 \right) \right] - \frac{6}{R^2} .$$

Ist nun

$$\frac{1}{g_{11}} = 1 + \frac{b}{R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R}}, \tag{3}$$

so erhält man sofort

$$\mathfrak{R} = 2\,\mathrm{Div\ Grad} \lg \sqrt{g_{00}} - \frac{6}{R^2},$$

d. h. die Gleichung 2a mit $\mathfrak{A} = \lg \sqrt{g_{00}}$ und $\mathfrak{R}_0 = -\frac{6}{R^2}$. Damit also die Krümmung durch die doppelte Divergenz des Gradianten der Größe $\lg \sqrt{g_{00}}$ in der erweiterten Gestalt 2a wiedergegeben werden kann, ist es nötig, $\frac{1}{g_{11}}$ in der Form (3) anzusetzen. Selbstverständlich gilt diese auch für unendliche und imaginäre Werte von R $(= iQ)$ und geht dann über in

$$\frac{1}{g_{11}} = 1 + \frac{b}{r} \tag{3a}$$

$$\frac{1}{g_{11}} = 1 + \frac{8b}{Q} \left(e^{\frac{r}{Q}} - e^{-\frac{r}{Q}} \right)^{-1} \left(e^{\frac{r}{Q}} + e^{-\frac{r}{Q}} \right)^{-2}. \tag{3b}$$

Würde man dagegen, um die Konstante $-\frac{6}{R^2}$ zum Wegfall zu bringen, ansetzen

$$\frac{1}{g_{11}} = 1 + \frac{b + R \sin^2 \frac{r}{R}}{R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R}}, \quad g_{11} = \cos^2 \frac{r}{R} \left(1 + \frac{b}{R \sin \frac{r}{R}} \right)^{-},$$

so erhält man genau das gleiche Ergebnis, wie im Falle (3a).

Noch in einem anderem Falle ist es möglich, die Gültigkeit der Gleichung (2a) aufrechtzuerhalten, wenn man nämlich

$$g_{11} = \frac{\cos^2 \frac{r}{R}}{g_{00}}$$

setzt. Dann wird nämlich das Zusatzglied

$$\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \cos \frac{r}{R}} \frac{d}{dr} \left[R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R} \left(\frac{1}{g_{11}} - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00} g_{11}}} \frac{d}{dr} R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}} \cdot \frac{\cos \frac{r}{R}}{R \sin \frac{r}{R}} (1 - g_{11})$$

$$= 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \int \frac{dr}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} (1 - g_{11}).$$

In diesem Falle müßte aber

$$\mathfrak{A} = \lg \sqrt{g_{00}} + \int \frac{dr}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} (1 - g_{11})$$

gesetzt werden, was für $R = \infty$ in

$$\mathfrak{A} = \lg \sqrt{g_{00}} + \int \frac{1 - g_{11}}{r} dr$$

übergehen, d. h. die Formel X in I, S. 177 liefern würde. Aber mir scheint die Annahme einer von $\lg \sqrt{g_{00}}$ verschiedenen Größe für $\mathfrak{A}$ mit dessen Deutung als Gravitationspotential unverträglich, wie aus der Untersuchung der Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde hervorgeht (vgl. hierzu I, S. 155 f. u. IV).

Für den Einsteinschen Ansatz

$$g_{00} = 1 - \frac{\alpha}{r}, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

decken sich die beiden Fälle; dann könnte man auch

$$g_{11} = e^{-2\mathfrak{A}}$$

(vgl. VI, S. 138) setzen. Das trifft aber nicht allgemein zu, für die angesetzten L. E. Q. gilt vielmehr die Gleichung (3).

III. Die Feldgleichungen.

Ich will jetzt die so ergänzten und umgebildeten Feldgleichungen aufstellen, wobei ich gleich die für das Folgende nicht mehr nötige Größe $\mathfrak{R}$ eliminieren und nach $\mathfrak{F}$ (VI, S. 138) $\mathfrak{g}^2$ durch $g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2$ ersetze. Ferner ist zu beachten, daß

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{\beta},\ \mathfrak{B}' = 0,\ \mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\,\mathfrak{g}^2 = \sqrt{\frac{1}{\beta}\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\beta}\mathfrak{f}^2} = \sqrt{\frac{1}{\beta}}\sqrt{g^{00}g^{11}}\,\frac{d\varphi_0}{dr} = \sqrt{\frac{g^{11}}{\beta}}\,e^{-\mathfrak{A}}\,\frac{d\varphi_0}{dr}$$

ist.[1]) So erhält man denn

$$(A')\quad \begin{cases} -\mathfrak{F} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} + 2g^{\mu\nu}\,\dfrac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\,\dfrac{\partial \lg(\mathfrak{F}+2\mathfrak{g}^2)}{dx^\mu} \\ = \dfrac{2}{\sqrt{G}}\,\dfrac{d}{dr}\sqrt{G}\,g^{11}\,\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr} + 2g^{11}\,\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr}\,\dfrac{d}{dr}\lg\left[\mathfrak{F} + 2g^{11}\left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)^2\right], \end{cases}$$

$$(B')\quad \begin{cases} \mathrm{Div}_0 f = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\,\dfrac{d}{dr}\sqrt{G}\,e^{-2\mathfrak{A}}\,g^{11}\,\dfrac{d\varphi_0}{dr} \\ \qquad = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{g^{11}}{\beta}}\,e^{-\mathfrak{A}}\,\dfrac{d\varphi_0}{dr}\cdot e^{-2\mathfrak{A}}\varphi_0, \end{cases}$$

$$(C')\quad \begin{cases} \mathrm{Div}_1 f = 0 = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{g^{11}}{\beta}}\,e^{-\mathfrak{A}}\,\dfrac{d\varphi_0}{dr}\,g^{11} \\ \qquad \left\{\varphi_1 - \dfrac{d}{dr}\lg\left[\mathfrak{F} + 2g^{11}\left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)^2\right]\right\}; \\ \text{also}\ \ \varphi_1 = \dfrac{d}{dr}\lg\left[\mathfrak{F} + 2g^{11}\left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)^2\right], \end{cases}$$

$$(D')\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{d}{dr}\sqrt{G}\,g^{11}\varphi_1 + e^{-2\mathfrak{A}}\varphi_0^{\,2} + g^{11}\varphi_1^{\,2} = \frac{\varkappa}{s},$$

$$(E')\quad \mathfrak{F} + 2\mathfrak{g}^2 = +\sqrt{g^{11}\beta}\,e^{-\mathfrak{A}}\,\frac{d\varphi_0}{dr} = \mathfrak{F} + 2g^{11}\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)^2.$$

Hierzu kommt noch die Festlegung der Eichung nach der erweiterten Gleichung (9, VI, S. 117)

$$(F')\quad \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{G}}\,\dfrac{d}{dr}\sqrt{G}\,g^{11}\varphi_1 + \dfrac{3}{2}\,(e^{-2\mathfrak{A}}\varphi_0^{\,2} + g^{11}\varphi_1^{\,2}) \\ \qquad = 2\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr}\,g^{11}\,\dfrac{d}{dr}\lg\left[\mathfrak{F} + 2g^{11}\left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)^2\right] + \mathfrak{K}_0 \\ \qquad = 2g^{11}\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr}\varphi_1 + \mathfrak{K}_0, \end{cases}$$

und es ist nach (3)

$$g^{11} = 1 + \frac{b}{R\sin\dfrac{r}{R}\cos^2\dfrac{r}{R}},$$

---

1) Bei dieser Gelegenheit will ich gleich zwei Flüchtigkeiten auf S. 138 der Arbeit VI berichtigen. Es fehlt in Gleichung (A) der Faktor g^{11}, in (B) aber g^{00}, jedesmal hinter $\frac{d}{dr}\sqrt{G}$.

ferner

$$\sqrt{G} = e^{\mathfrak{A}} \sqrt{g_{11}} \cdot R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin \varphi$$

zu setzen.

Aus (A') und (E') ist $\mathfrak{F}$ leicht zu eliminieren:

$$\text{(A'')} \quad \begin{cases} -\sqrt{g^{11}\beta}\, e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr} = \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G}\, g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr}. \\ + 2\, g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \frac{d}{dr} \lg \left(\sqrt{g^{11}}\, e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr} \right) - 2\, g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2. \end{cases}$$

Diese Gleichung enthält nun ebenso wie (B') nur noch die beiden Unbekannten $\mathfrak{A}$ und φ_0.

Durch Umformung erhält man:

$$\text{(A'')} \quad -\frac{e^{-\mathfrak{A}} \sqrt{\beta} \frac{d\varphi_0}{dr}}{2\sqrt{g^{11}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr}} = \frac{d}{dr} \lg \left[\sqrt{G (g^{11})^3} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \frac{d\varphi_0}{dr} \cdot e^{-2\mathfrak{A}} \right]$$

$$\text{(B')} \quad \frac{d}{dr} \lg \left[\sqrt{G}\, e^{-2\mathfrak{A}}\, g^{11} \frac{d\varphi_0}{dr} \right] = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{\beta g^{11}}}\, e^{-\mathfrak{A}} \varphi_0$$

und hieraus durch Addition und Multiplikation mit $2\sqrt{g^{11}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr}$:

$$\text{(B'')} \quad -e^{-\mathfrak{A}} \sqrt{\beta} \frac{d\varphi_0}{dr} = 2 \frac{d}{dr} \sqrt{g^{11}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} - 3 \sqrt{\frac{1}{\beta}}\, e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \cdot \varphi_0.$$

Diese Gleichung würde für die Wahl $\beta = 3$ ein erstes Integral in geschlossener Gestalt zulassen, worauf dann $e^{\mathfrak{A}}$ durch eine Gleichung 2. Ordnung und aus $\mathfrak{A}\varphi_0$ durch eine solche 1. Ordnung sich ergibt.

Allgemein aber will ich zwei neue Veränderliche einführen:

$$\text{(A''')} \quad e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr} = u \sqrt{g_{11}} \cdot R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R}, \quad e^{-\mathfrak{A}} \cdot \varphi_0 = v,$$

woraus folgt

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dr} = \frac{1}{v} \left[u \sqrt{g_{11}}\, R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} - \frac{dv}{dr} \right].$$

$$\text{(B'')} \quad \begin{cases} -\sqrt{\beta g_{11}}\, u R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} = 2 \frac{d}{dr} \left[\frac{u}{v} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} - \frac{1}{v\sqrt{g_{11}}} \frac{dv}{dr} \right] \\ \qquad - 3 \sqrt{\frac{1}{\beta}} \left[u \sqrt{g_{11}}\, R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} - \frac{dv}{dr} \right]. \end{cases}$$

$$\text{(B')} \quad \frac{d}{dr} \lg u = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{g_{11}}{\beta}}\, v.$$

Setzt man hiernach

$$v = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\beta}{g_{11}}}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dr}$$

in (B″) ein, so erhält man für u die Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$\frac{\beta}{3}\sqrt{g_{11}}\,u\,R^{-2}\sin^{-2}\frac{r}{R} = \frac{d}{dr}\left\{\left[u^2\sqrt{g_{11}}\,R^{-2}\sin^{-2}\frac{r}{R}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{3}\sqrt{\beta}\,u\,\frac{d}{dr}\frac{\frac{du}{dr}}{u\sqrt{g_{11}}}\right]:\frac{du}{dr}\right\} + u\sqrt{g_{11}}\,R^{-2}\sin^{-2}\frac{r}{R} + \frac{2}{3}\sqrt{\beta}\frac{d}{dr}\frac{\frac{du}{dr}}{u\sqrt{g_{11}}}$$

$$\text{(B‴)}\quad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{\beta}{3}-1\right)\sqrt{g_{11}}\,u R^{-2}\sin^{-2}\frac{r}{R} &= \frac{d}{dr}\left\{\left[u^2\sqrt{g_{11}}\,R^{-2}\sin^{-2}\frac{r}{R}\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{2}{3}\sqrt{\beta}\,u\,\frac{d}{dr}\frac{\frac{du}{dr}}{u\sqrt{g_{11}}}\right]:\frac{du}{dr}+\frac{2}{3}\sqrt{\beta}\,\frac{\frac{du}{dr}}{u\sqrt{g_{11}}}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ist diese Gleichung gelöst, so bestimme man v nach (B′) und hieraus dann $\mathfrak{A}$ und φ_0 aus den Gleichungen (A‴), wobei noch eine Quadratur auszuführen ist.[1])

Ich erhalte also wie Weyl[2]) ein Problem 3. Ordnung, will mich aber hier nicht auf seine Lösung einlassen, sondern mich dem Falle zuwenden, daß alle elektrischen Größen verschwinden. Das ist zwar wegen des Bestehens der Gleichung (D′) in der Natur genau nicht möglich, da die Konstante $\varkappa$ wegen der Gleichung (8) in VI, S. 126 von 0 verschieden sein muß, wenn man überhaupt die elektrischen Vektoren deuten will. Aber es wird doch angenähert zutreffen, wo die Gravitation überwiegt, wie in der Planetenbewegung.

IV. Die Gleichungen des elektrizitätsfreien Gravitationsfeldes.

Setzt man also sämtliche elektrischen Größen gleich 0, so hat wegen der Unbestimmtheit in den Differentialquotienten des Logarithmus einer verschwindenden Größe eine etwas abweichende Behandlung der Grundgleichungen Platz zu greifen.

---

1) Natürlich sind nun noch die übrigen Größen φ_1, ε, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{g}^2$ und die Eichung aus ihren Gleichungen zu bestimmen.

2) H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 59. S. 130. 1919.

In der 1. Feldgleichung (C') der Elektrizität war aus dem identischen Verschwinden der $\mathrm{Div}_1 f$ gefolgert worden, daß

$$\varphi_1 = \frac{d}{dr} \lg \left[\mathfrak{F} + 2 g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2 \right]$$

sei. Natürlich hätte auch $\frac{d\varphi_0}{dr} = 0$ gesetzt werden können, um (C') zu genügen; dann wäre aber auch im allgemeinen Fall $\mathrm{Div}_0 f = 0$ geworden, also ein Auftreten elektromagnetischer Vektoren unmöglich gemacht worden. Es ist also für den allgemeinen Fall die Lösung $\frac{d\varphi_0}{dr} = 0$ zu verwerfen und statt dessen wie geschehen,

$$\varphi_1 = \frac{d}{dr} \lg \left[\mathfrak{F} + 2 g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2 \right]$$

zu setzen. Dann kann ich dies aber auch in (A') einsetzen und erhalte so

$$(4) \qquad -\mathfrak{F} = \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} + 2 g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \varphi_1 .$$ [1])

Um $-\mathfrak{F}$ zu eliminieren, addiere ich $-2 g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2$, wodurch die linke Seite zu $\sqrt{g^{11} \cdot \beta}\, e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr}$ wird (vgl. E') [2]):

$$(5) \qquad -\sqrt{g^{11} \cdot \beta}\, e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr} = \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} - 2 g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2 + 2 g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \varphi_1 .$$

---

1) Vgl. VI. S. 116, Gl. (8).

2) Diese Gleichung (E') liefert daher im elektrizitätsfreien Falle die Beziehung $\mathfrak{F} + 2\mathfrak{g}^2 = 0$. Definiert man nun die Massendichte $\mathfrak{d}$, wie ich es VI, S. 117 Gl. 10) getan habe, durch $\mathfrak{d} = -\frac{\mathfrak{F}}{8\pi\varkappa}$, was in eben diesem Falle mit meiner früheren Gleichung $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{R}}{8\pi\varkappa}$ (I, S. 163, Gl. (60) zusammenfällt, so erhält man die Beziehung $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{g}^2}{4\pi\varkappa}$ — wobei $\varkappa$ immer die Gravitationskonstante in Anlehnung an die Poissonsche Formel bedeutet —, d. h. die Folgerung, daß das Quadrat des Gravitationsvektors $\mathfrak{g}$ der Massendichte $\mathfrak{d}$ proportional ist. Die Größe $\frac{\mathfrak{g}^2}{4\pi\varkappa}$ repräsentiert ja aber auch den von mir als kinetisch bezeichneten Teil der Energiedichte des Gravitationsfeldes (I, S. 171, Gl. 85); der sogenannte potentielle Teil fällt hier fort, da er nur auftritt, wenn eine zweite Masse sich im Felde der ersten befindet. Es wäre also die Massendichte der Energiedichte der Gravitation gleich, eine Folgerung, die recht viel für sich hat. Auch Mie vertritt diesen Gedanken, wenn er auch bei seiner Auffassung der

In einer elektrizitätsfreien Welt ($\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$; übrigens würde auch $\varphi_0 = c$, $\varphi_1 = 0$ genügen) wird man also auf die Gleichung geführt:

$$\frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} = 2 g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)^2 . \quad [1] \tag{6}$$

Da man durch Division erhält:

$$\frac{d}{dr}\left[\lg\left(\sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)\right] = \frac{d\mathfrak{A}}{dr},$$

kann man sofort einmal integrieren:

$$\sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} = c_1 \cdot e^{\mathfrak{A}} . \tag{7}$$

Die Integrationskonstante c_1 steht in enger Beziehung zur anziehenden Masse, die als Differentialquotient der Invariante

$$\int\int\int\int \sqrt{G}\, \mathfrak{d} \cdot dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$$

nach der Zeit dx^0, d. h. durch

$$M = \int\int\int \sqrt{G}\, \mathfrak{d} \cdot dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{8}$$

definiert werden kann. Für die Ruhmasse erhält man dann, da $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \vartheta$ ist:

$$M = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}\, \mathfrak{d} \cdot dr .$$

Nun ist $\mathfrak{d}$ (vgl. die Anmerkung auf der vorigen Seite) gleich $\frac{\mathfrak{g}^2}{4\pi\varkappa}$, d. h. $\frac{g^{11}}{4\pi\varkappa}\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)^2$, also nach

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{4\pi\varkappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} \cdot g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr}, \tag{6}$$

Masse als eines Pseudotensors zu anderen, nämlich den Einsteinschen, Ergebnissen kommt. (Vgl. G. Mie, Die Einführung eines Koordinatensystems usw. Ann. d. Phys. 62. S. 68. 1920.) Würde man dagegen den Pseudotensor zum vollen Tensor, nämlich dem der Riemannschen Krümmung, ergänzen, wie es ja wohl im Sinne der ursprünglichen Materiedefinition Einsteins liegt, so werden die Folgerungen ganz anders.

1) Hierin besteht also eine Abweichung gegen meine bisherigen Arbeiten (I u. II), wo ich Div Grad $\mathfrak{A}$ im Außenraum 0, im Innern aber $\frac{3}{\varrho^2}$ setzte, d. h. die Dichte $\mathfrak{d}$, von dem Innenraum des Elektrons abgesehen, überall genau gleich 0 annahm.

es wird also

$$M = \frac{1}{\varkappa}\left|\frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}\, g^{11}\frac{d\mathfrak{A}}{dr}\right|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\varkappa}\left|\frac{c_1}{\sin\varphi}\, e^{\mathfrak{A}}\right|_{r_1}^{r_2} \quad \text{und}$$

$$c_1 = \varkappa M \sin\varphi : \left|e^{\mathfrak{A}}\right|_{r_1}^{r_2}. \tag{9}$$

Lassen sich zwei Radien r_1 und r_2 finden, daß für den ersteren $\mathfrak{A}$ gleich $-\infty$, für den letzteren aber 0 wird, so ist

$$c_1 = \varkappa M \sin\varphi\,.$$ [1])

Die Gleichung (7) läßt sich nun nach den von uns gemachten Annahmen für G und g^{11} leicht weiter behandeln, wobei ich mich auf den Fall beschränken will, daß der Weltradius R unendlich groß sei; für die anderen Fälle ist das Verfahren ähnlich. Ich setze also

$$g^{11} = 1 + \frac{b}{r} \text{ (Gl. 3a)},$$

daher

$$\sqrt{G} = e^{\mathfrak{A}}\left(1 + \frac{b}{r}\right)^{-1/2} r^2 \sin\varphi$$

und bekomme

$$\left\{\begin{array}{l} r^2\sqrt{1+\frac{b}{r}}\,\frac{d\mathfrak{A}}{dr} = c_1 \text{ [2])}, \quad \mathfrak{A} = -\frac{2c_1}{b}\left(\sqrt{1+\frac{b}{r}} - 1\right) \\ = -\frac{c_1}{r} + \frac{b c_1}{4r^2}\cdots, \quad \frac{1}{g_{00}} = e^{-2\mathfrak{A}} = 1 + \frac{2c_1}{r} - \frac{b c_1 - 4c_1^2}{2r^2}\cdots, \end{array}\right. \tag{10}$$

wenn man annimmt, daß das Potential $\mathfrak{A}$ für unendliches r verschwindet. Zum Vergleich will ich die Formeln anführen, die man erhält, wenn man, wie ich es früher getan hatte, die Dichte $\mathfrak{d}$ gleich 0 setzt, während alle anderen Voraussetzungen dieselben bleiben. Dann fehlt offenbar in Gl. (7) der Faktor $e^{\mathfrak{A}}$ der rechten Seite, was zur Folge hat, daß in Gl. (10) $\mathfrak{A} + 1$ nun wieder durch $e^{\mathfrak{A}}\,(= \sqrt{g_{00}})$ ersetzt werden muß. Nimmt man außerdem $b = 0$ an, erhält man meine bisherigen Formeln (vgl. I und III), für $b = -2c_1$ dagegen die Einsteinschen.

Es wäre nun zu untersuchen, was sich aus der Gl. (10) für Wirkungen in der Krümmung des Lichtstrahls und der Vorrückung des Perihels ergeben. Hierzu ist es nötig, von

1) Der Faktor $\sin\varphi$ ist unwesentlich und nur der Genauigkeit halber beigefügt.

2) Unter Unterdrückung des unwesentlichen Faktors $\sin\varphi$.

der Gleichung der geodätischen Linie auszugehen, die für das L. E. Q.

$$ds^2 = g_{00}\,dx^{02} + g_{11}\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\,d\vartheta^2$$

lautet:

$$1 = -B^2 g_{11}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 - B^2\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{c_0^2}{g_{00}}, \tag{11}$$

worin

$$B = -ir^2\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{und} \quad c_0 = g_{00}\frac{dx^0}{ds}$$

die Integrationskonstanten in den sofort zu integrierenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung der geodätischen Linien für die Koordinaten x^0 und x^2 oder φ (bei der Annahme $dx^3 = 0$) bedeuten.[1]) Für den Lichtstrahl ist dann $ds = 0$, weshalb dann sowohl B^2 wie c_0^2 unendlich werden, aber so, daß ihr Quotient $\frac{c_0^2}{B^2} = m$ endlich bleibt. Daher erhält man aus (11) die Gleichung des Lichtstrahls:

$$0 = -g_{11}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{m}{g_{00}}\right) \tag{12}$$

oder

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{m}{g_{00}}g^{11} - \left(\frac{1}{r}\right)^2 g^{11}. \tag{12a}$$

Die Durchrechnung dieser Gleichung lehrt nun, daß es nur nötig ist, Glieder erster Ordnung zu berücksichtigen, weshalb ich $\frac{1}{g_{00}}$ durch $1 + \frac{2c_1}{r}$, g^{11} durch $1 + \frac{b}{r}$ ersetze. Man erhält dann

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 = m\left(1 + \frac{b + 2c_1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2\left(1 + \frac{b}{r}\right),$$

also auf der rechten Seite einen Ausdruck 3. Grades, den ich in

$$-\left(\frac{b}{r} + k\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1-\varepsilon)}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)}\right)$$

zerlege. In erster Annäherung ist dann zu erwarten, daß $k = 1$ wird, während a und ε reelle Halbachse und Exzentri-

1) Vgl. auch I, S. 176.

zität der Hyperbel bedeuten, die nach Keplers Gesetz der Lichtstrahl darstellt; denn die Gleichung (12) ist ja nur ein besonderer Fall der Planetenbahngleichung (11).[1]) Durch Koeffizientenvergleichung erhält man dann drei Beziehungen:

$$\text{(I)}\quad k - \frac{2b}{a(1-\varepsilon^2)} = 1, \quad \text{(II)}\quad -\frac{2k}{a(1-\varepsilon^2)} + \frac{b}{a^2(1-\varepsilon^2)} = -(b+2c_1)m,$$

$$\text{(III)}\quad \frac{k}{a^2(1-\varepsilon^2)} = -m.$$

Aus I (und III) ergibt sich wieder sehr nahe (bis auf Glieder mindestens 2. Ordnung) $k = 1$, da b und a klein, ε groß von 1. Ordnung ist. Dividiert man nun II durch III, so erhält man

$$-2ak + b = bk + 2kc_1,$$

woraus wegen I wieder sehr nahe $-2a = 2c_1$ folgt. Bedeutet r_0 den kleinsten (oder größten) Abstand vom Zentrum, so ist $-a = \frac{r_0}{\varepsilon - 1}$, und man hat $\frac{1}{\varepsilon - 1} = \frac{c_1}{r_0}$. Wegen der Größe von ε kann man auch $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{c_1}{r_0}$ sagen. Zu derselben Gleichung wird man auch geführt, wenn man in III um eine Ordnung schärfer rechnet. Nun war

$$d\varphi = d\left(\frac{1}{r}\right)\left[\left(1+\frac{b}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)}\right)\left(\frac{1}{a(1-\varepsilon)} - \frac{1}{r}\right)\right]^{-1/2}.$$

Ich setze hierin

$$\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos\psi}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\varepsilon\sin\psi\, d\psi}{a(1-\varepsilon^2)},$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon(1+\cos\psi)}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad \frac{1}{a(1-\varepsilon)} - \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon(1-\cos\psi)}{a(1-\varepsilon^2)},$$

also

$$d\varphi = \mp\frac{\varepsilon\sin\psi\, d\psi}{a(1-\varepsilon^2)}\left[\left(1+\frac{b(1+\varepsilon\cos\psi)}{a(1-\varepsilon^2)}\right)\frac{\varepsilon^2(1-\cos^2\psi)}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}\right]^{-1/2}$$

$$= \mp d\psi\left(1 - \frac{b(1+\varepsilon\cos\psi)}{2a(1-\varepsilon^2)}\right),$$

$$\varphi = \mp\psi\left(1-\frac{b}{2a(1-\varepsilon^2)}\right) \pm \frac{\varepsilon b\sin\psi}{2a(1-\varepsilon^2)} = \mp\psi\left(1-\frac{b}{2r_0(1+\varepsilon)}\right)$$

$$\pm\frac{\varepsilon b\sin\psi}{2r_0(1+\varepsilon)} = \mp\psi \pm \frac{b\sin\psi}{2r_0}.$$

---

1) Vgl. die Eddingtonsche Annahme, Naturwissenschaften VII. Heft 20, S. 368. 1919.

Läuft nun der Lichtstrahl von einer Unendlichkeit in die andere, so wird $\cos\psi$ sich von $-\frac{1}{\varepsilon}$ über 1 wieder bis $-\frac{1}{\varepsilon}$ ändern; es wächst also ψ von

$$-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\varepsilon} \text{ bis } +\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\varepsilon},$$

$\sin\psi$ von -1 bis $+1$ und φ von

$$-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{2}{2r_0} \text{ bis } +\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\varepsilon}-\frac{b}{2r_0}$$

(oder umgekehrt), ändert sich also um $\pi+\frac{2}{\varepsilon}-\frac{b}{r_0}$ oder, da $\frac{1}{\varepsilon}=\frac{c_1}{r_0}$ war, um $\pi+\frac{2c_1-b}{r_0}$. Die Abweichung des Lichtstrahls von der Geraden ist demnach durch den Wert $\frac{2c_1-b}{r_0}$ gegeben. Setzt man hierin $b=0$, so erhält man den von mir angegebenen Wert der Krümmung des Lichtstrahls[1]), für $b=-2c_1$ dagegen den Einsteinschen, der natürlich dann doppelt so groß wird.

Da sich die Berücksichtigung höherer Glieder als von der 1. Ordnung bei dieser Ableitung erübrigt, hat also die Annahme einer von 0 verschiedenen Dichte $\mathfrak{d}$ im Weltraum keinen unmittelbaren Einfluß auf die Krümmung des Lichtstrahls. Es ist hierbei aber das zu beachten, was ich im nächsten Abschnitt dieser Arbeit zu diesem Punkte zu sagen habe.

Dagegen muß bei der Berechnung der Perihelwanderung um eine Ordnung genauer gerechnet und

$$\frac{1}{g_{00}}=1+\frac{2c_1}{r}-\frac{bc_1-4c_1^2}{2r^2}$$

nach (10) gesetzt werden. Aus (11) ergibt sich dann, wie (12a) aus (12):

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2=\frac{g^{11}}{B^2}\left(\frac{c_0^2}{g_{00}}-1\right)-\frac{g^{11}}{r^2}, \tag{11a}$$

also

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2=\frac{c_0^2-1}{B^2}+\frac{2c_1c_0^2+b(c_0^2-1)}{B^2}\cdot\frac{1}{r}+\left(c_0^2\cdot\frac{4c_1^2+3bc_1}{2B^2}-1\right)\cdot\frac{1}{r^2}-\frac{b}{r^3}\cdot$$

1) Vgl. III. S. 23f.

Für die rechte Seite setze ich wieder wie früher

$$-\left(k+\frac{b}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a(1-\varepsilon)}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a(1+\varepsilon)}\right)$$

und erhalte durch Koeffizientenvergleichung

$$\text{(I)}\quad k-\frac{2b}{a(1-\varepsilon^2)}=1-c_0{}^2\cdot\frac{4c_1{}^2+3bc_1}{2B^2},$$

$$\text{(II)}\quad \frac{2k}{a(1-\varepsilon^2)}-\frac{b}{a^2(1-\varepsilon^2)}=\frac{2c_1c_0{}^2+b(c_0{}^2-1)}{B^2},\quad \text{(III)}\quad \frac{-k}{a^2(1-\varepsilon^2)}=\frac{c_0{}^2-1}{B^2}.$$

Nun ist, wie ich das in (I) S. 160, Gl. (49)[1]) gezeigt habe, die Flächenkonstante

$$B=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{cT}\quad\text{und}\quad c_1=\varkappa M=\frac{4\pi^2a^3}{c^2T^2};$$

also ergibt sich aus (III)

$$c_0{}^2=1-\frac{4\pi^2a^3k}{c^2T^2}.$$

Die Gleichung (II) bestätigt bei Unterdrückung der Glieder höherer Ordnung den Ansatz für c_1, und (I) liefert dann den Wert von

$$k=1+\frac{2b}{a(1-\varepsilon^2)}-\frac{c^2T^2-4\pi^2a^2k}{8\pi^2a^4(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{4\pi^2a^3}{c^2T^2}\cdot\left(\frac{16\pi^2a^3}{c^2T^2}+3b\right).$$

Da $4\pi^2a^2k$ gegen c^2T^2 verschwindet, bekommt man also

$$k=1+\frac{2b}{a(1-\varepsilon^2)}-\frac{8\pi^2a^2}{c^2T^2(1-\varepsilon^2)}-\frac{3b}{2a(1-\varepsilon^2)}$$
$$=1+\frac{b}{2a(1-\varepsilon^2)}-\frac{8\pi^2a^2}{c^2T^2(1-\varepsilon^2)}.$$

Nun sei

$$b=-2c_1\cdot\beta=-\frac{8\pi^2a^3\beta}{c^2T^2},$$

also

$$k=1-\frac{4\pi^2a^2}{c^2T^2(1-\varepsilon^2)}(\beta+2).$$

Aus Gleichung (11a) ergibt sich nun wieder

$$d\varphi=d\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left[\left(k+\frac{b}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a(1+\varepsilon)}\right)\left(\frac{1}{a(1-\varepsilon)}-\frac{1}{r}\right)\right]^{-1/2}.$$

Hieraus aber folgt ähnlich wie bei der Lichtkurve, wenn

$$\frac{1}{r}=\frac{1+\varepsilon\cos\psi}{a(1-\varepsilon^2)}$$

ist:

$$\varphi=\mp\psi\left[k^{-1/2}-\frac{b}{2a(1-\varepsilon^2)}\right]\pm\frac{\varepsilon b\sin\psi}{2a(1-\varepsilon^2)}.$$

1) Das dortige A ist gleich $2B/c$; c ist die normale Lichtgeschwindigkeit, T die Umlaufszeit.

Von einem Perihel zum nächsten ändert sich ψ von $h \cdot 2\pi$ bis $(h+1) \cdot 2\pi$, also φ um

$$2\pi \left[h^{-1/2} - \frac{b}{2a(1-\varepsilon^2)} \right],$$

d. h. um

$$2\pi \left[1 + \frac{2\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)} (\beta + 2) + \frac{4\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)} \cdot \beta \right]$$
$$= 2\pi \left[1 + \frac{2\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)} (3\beta + 2) \right],$$

woraus dann eine Vorrückung der Sonnennähe um

$$\frac{4\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)} \cdot (3\beta + 2)$$

folgt.

Im Falle des unverzerrten Ruhraumes, den ich für den einfachsten halte, wird $\beta = 0$; die Perihelwanderung sinkt also bei Berücksichtigung der Energiedichte der Gravitation von der bisher errechneten Hälfte des Einsteinwertes auf $^1/_3$. Bei Einsteins eigenem Ansatz für das L. E. Q. ist $\beta = 1$, und die Perihelvorrückung ergibt sich nun zu $^5/_6$.

Auch hier ist es interessant, die Ergebnisse mit denen zu vergleichen, die bei der Annahme der Dichte $\mathfrak{d} = 0$ herauskommen. Da nun nach Gl. (10)

$$e^{\mathfrak{A}} = \sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{c_1}{r} + \frac{b c_1}{4r^2} \cdots,$$

also

$$\frac{1}{g_{00}} = 1 + \frac{2c_1}{r} + \frac{6c_1^2 - b c_1}{2r^2} \cdots$$

wird, bleibt sonst alles dasselbe bis auf den Summanden 2, der in der Formel für die Perihelwanderung zu 3β hinzugefügt wird. Dieser muß dann durch eine 3 ersetzt werden, wodurch dann die schon bekannten Ergebnisse im Einsteinschen und in meinem Koordinatensystem sich wieder einstellen.

Ich will diesen Abschnitt nicht schließen, ohne zu bemerken, daß in dem von mir bevorzugten Ansatz des unverzerrten Ruhraumes, wenn also $b = \beta = 0$ wird, die Formel (10) für das Gravitationspotential genau den Wert

$$-\frac{c_1}{r} \quad \text{oder} \quad -\frac{\varkappa M}{r},$$

d. h. den Newtonschen Ausdruck ohne jede Korrektion, liefert. Für andere Werte von b gilt dies nur in erster Näherung.

Insbesondere ergibt sich für negative b die Unmöglichkeit, bis ins Zentrum hineinzugehen, da für $r < -b$ die Quadratwurzel $\sqrt{1+\frac{b}{r}}$ imaginär wird; für die Grenze, d. h. $r = -b$ nimmt dann das Potential $\mathfrak{A}$ den Wert $\frac{2c_1}{b}$ und g_{00} den Wert $e^{\frac{4c_1}{b}}$ an (wobei zu beachten ist, daß b negativ ist), während g_{11} unendlich wird. Diese Überlegungen sind aber höchst problematischer Natur, da jedenfalls in so großer Nähe des Mittelpunktes die elektromagnetischen Größen nicht unberücksichtigt bleiben dürfen.

V. Der Einfluß des widerstehenden Mittels.

Es drängt sich aber hier die Frage auf, inwiefern die Erfüllung des gesamten Weltenraums mit Materie — bei der grundsätzlichen Gleichsetzung von Materie und Energie — von der Dichte der Gravitationsenergie nicht ebenfalls ihre Wirkungen in dem angegebenen Sinne auf die Krümmung des Lichtstrahls und die Veränderung der Planetenbahnen ausübt.

Was die erste angeht, so ist sie von der Annahme des Brechungsexponenten dieser Materie, d. h. von Dielektrizität ε und Permeabilität λ abhängig, kann also erst dann erfaßt werden, wenn man auch die elektromagnetischen Größen in den Kreis der Betrachtung zieht. Grundsätzlich ist aber zu bemerken, daß die Werte von ε und λ sich nirgends im ganzen Weltenraum genau konstant verhalten werden, also schon aus diesem Grunde eine Krümmung des Lichtstrahls erwartet werden muß, die weder Einstein noch ich noch sonst irgend jemand bisher erfaßt hat, so daß also in diesem Punkte nicht nur experimentelle, sondern auch theoretische Schwierigkeiten noch zu überwinden sind. Selbstverständlich ist anzunehmen, daß wegen der nach dem Mittelpunkte hin zunehmenden Dichte dieser Energiematerie die Krümmung des Lichtes im gleichen Sinne wie bei Einstein, Eddington und mir erfolgen muß. In diesem Zusammenhange möchte ich auf die Beobachtungen Courvoisiers[1]) hinweisen, die eine derartige Wirkung wahrscheinlich machen, wenn auch das von ihm

1) Vgl. hierzu: Guthnick, Neue Untersuchungen über die jährliche Refraktion, Naturwissenschaften VIII. Heft 26. 1920.

empirisch gefolgerte Gesetz gerade in der Nähe der Sonne zu versagen scheint, so daß es noch verbesserungsbedürftig ist. Immerhin scheint es mir auch aus diesem Grunde verfrüht, schon jetzt die Bestätigung irgendeiner Theorie durch die Erfahrung als sicher anzunehmen. Die Lichtstrahlkrümmung in der Nähe der Sonne scheint vielmehr sowohl in der Erfahrung wie in der Theorie eine recht verwickelt zusammengesetzte Wirkung zu sein, und wir fangen jetzt erst an, die Schwierigkeiten in ihrer Erfassung zu erkennen.

Günstiger dagegen scheint mir der Fall der Planetenbewegung für die Theorie zu liegen. Die Energiematerie von der Dichte

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{4\pi\varkappa} g^{11} \left(\frac{d\,\mathfrak{N}}{dr}\right)^2$$

wird auf die in ihr sich bewegenden Planeten einen Widerstand ausüben. Ich setze diesen in Übereinstimmung mit der landläufigen Annahme proportional dem Quadrat v^2 der Geschwindigkeit, dem Querschnitt $\pi\varrho^2$ des Planeten und der Dichte $\mathfrak{d}$, die, wie bekannt, durch das Quadrat c^2 der Lichtgeschwindigkeit dividiert werden muß. Dann wird die auf einen Planeten von der Masse $\frac{4}{3}\pi\varrho^3 d$ ausgeübte Gegenkraft

$$\frac{v^2\cdot\pi\varrho^2\cdot\mathfrak{d}}{c^2} = \frac{v^2\cdot\pi\varrho^2\cdot\left(\frac{\varkappa M}{r^2}\right)^2}{c^2\cdot 4\pi\varkappa} \overset{1)}{=} \frac{v^2\cdot\pi\varrho^2\cdot\varkappa M^2}{c^2\cdot r^4\cdot 4\pi},$$

d. h. er erfährt die Verzögerung

$$\frac{v^2\cdot\pi\varrho^2\cdot\varkappa M^2}{c^2\cdot r^4\cdot 4\pi\cdot\frac{4}{3}\pi\varrho^3 d} = \frac{v^2\cdot\varkappa M^2}{c^2\cdot r^4\cdot 4\pi\cdot\frac{4}{3}\varrho d};$$

hierin kann nach dem 3. Keplerschen Gesetz $\varkappa M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ gesetzt werden (a große Halbachse, T Umlaufszeit), wenn von der kleinen Abweichung von diesem Gesetz infolge des Einflusses der Planetenmasse abgesehen wird. So erhält man die Verzögerung

$$\frac{v^2\cdot 3\pi\, Ma^3}{c^2 r^4\cdot 4\, T^2\varrho d}.$$

---

1) $\mathfrak{d}$ ist hier nach der Annahme $g^{11} = 1$ ($b = 0$) angesetzt; für andere Fälle sind die Abweichungen gering.

Es wird zweckmäßig sein, sogleich durch die 3. Potenz des Parameters $p = a\,(1 - \varepsilon^2)$ der Bahnellipse zu dividieren; man bekommt dann

$$\frac{v^2 \cdot 3\pi M}{c^2 r^4 \cdot 4 T^2 \varrho d (1-\varepsilon^2)^3}.$$

Hieraus geht hervor, daß die Wirkung ähnlich wie die relativistischen vom Quadrat $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ abhängt, ferner aber außer $\frac{v^2}{r^4}$ nur konstante Glieder enthält. Ich setze also die Verzögerung gleich $\frac{\alpha v^2}{r^4}$; dann ist

$$\frac{\alpha}{p^3} = \frac{3\pi M}{4 c^2 T^2 \varrho d \cdot (1-\varepsilon^2)^3}.$$

Da sie in der Richtung der Geschwindigkeit wirkt, lauten die Grundgleichungen für die Planetenbewegung, wobei ich mich übrigens des klassischen Ansatzes bediene, um den Einfluß des widerstehenden Mittels rein zu erhalten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varkappa M x}{\sqrt{x^2+y^2}^3} - \frac{\alpha\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{dx}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\varkappa M y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} - \frac{\alpha\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{dy}{dt}.$$

Eine Integration dieser Gleichungen in geschlossener Gestalt ist nicht möglich; der Flächensatz liefert bei Einführung von Polarkoordinaten:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\varkappa M p}\; e^{-\alpha\int r^{-4}\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt}$$

und der Energiesatz:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{\varkappa M(1-\varepsilon^2)}{p} + \frac{2\varkappa M}{r} - 2\alpha\int r^{-4}\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}^3\,dt.$$

Die Elimination von t ergibt:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = \left[-\frac{\varkappa M(1-\varepsilon^2)}{p} + \frac{2\varkappa M}{r} - 2\alpha\int r^{-8}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}^3 \cdot \varkappa M p\, e^{-2\alpha\int r^{-4}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2}\,d\varphi}\,d\varphi\right] \frac{e^{2\alpha\int r^{-4}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2}\,d\varphi}}{\varkappa M p} \cdot r^4.$$

Ich vernachlässige von nun an stets die höheren Potenzen von α außer der ersten und erhalte für $1/r$:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \left[-\frac{1-\varepsilon^2}{p^2} + \frac{2}{pr}\right] e^{2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\,d\varphi}$$
$$- 2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2}^3\,d\varphi\,.$$

Nun sei

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\, e^{2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\,d\varphi} + u,$$

dann ist

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} = \frac{1}{p}\, e^{2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\,d\varphi}$$
$$\cdot\, 2\alpha\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{du}{d\varphi},$$

also wegen der oben eingeführten Abkürzung

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} = \frac{2}{p}\alpha\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{du}{d\varphi}$$

und

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{4}{p}\alpha\frac{du}{d\varphi}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2}\,.$$

Dies setze man oben ein und erhält:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{4}{p}\alpha\frac{du}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2}$$
$$- u^2 + \frac{1}{p^2}\, e^{4\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\,d\varphi}$$
$$- \frac{1-\varepsilon^2}{p^2}\, e^{2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+r^2}\,d\varphi}$$
$$- 2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2}^3\,d\varphi\,.$$

Jetzt setze ich weiter

$$u = -\cos\varphi' \cdot$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2}e^{2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}d\varphi}+\frac{1}{p^2}\left[e^{4\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}d\varphi}-e^{2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}d\varphi}\right]-2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}d\varphi},$$

und unter Beobachtung obiger Abkürzungsmöglichkeit

$$u = -\cos\varphi' \cdot$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2}+\frac{\varepsilon^2+1}{p^2}\cdot 2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}d\varphi-2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}^3 d\varphi}.$$

Da ε im Vergleich zu α/p^3 stets hinreichend groß sein wird, kann man hierfür setzen:

$$u = -\cos\varphi'\left[\frac{\varepsilon}{p}+\frac{\varepsilon^2+1}{p\varepsilon}\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}d\varphi-\frac{\alpha p}{\varepsilon}\int\left(\frac{1}{r}\right)^3\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}^3 d\varphi\right].$$

Dann wird

$$\frac{du}{d\varphi} = \sin\varphi'\,\frac{d\varphi'}{d\varphi}\left[\frac{\varepsilon}{p}+\frac{\varepsilon^2+1}{p\varepsilon}\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}d\varphi-\frac{\alpha p}{\varepsilon}\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}^3 d\varphi\right]-\cos\varphi'\left[\frac{\varepsilon^2+1}{p\varepsilon}\alpha\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}-\frac{\alpha p}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}^3\right].$$

Diese Größen sind in die Differentialgleichung einzusetzen, wobei wieder höhere Potenzen von α als die erste weggelassen werden:

$$\sin^2\varphi'\left(\frac{d\varphi'}{d\varphi}\right)^2\left[\frac{\varepsilon^2}{p^2}+\frac{\varepsilon^2+1}{p^2}\cdot 2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\,d\varphi\right.$$
$$\left.-2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}^3\,d\varphi\right]$$
$$-2\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{d\varphi'}{d\varphi}\left[\frac{\varepsilon^2+1}{p^2}\alpha\left(\frac{1}{r}\right)^3\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\right.$$
$$\left.-\alpha\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}^3\right]$$
$$=-\frac{4\varepsilon}{p^2}\alpha\sin\varphi'\frac{d\varphi'}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)^3\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}$$
$$+\sin^2\varphi'\left[\frac{\varepsilon^2}{p^2}+\frac{\varepsilon^2+1}{p^2}\cdot 2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\,d\varphi\right.$$
$$\left.-2\alpha\int\left(\frac{1}{r}\right)^3\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\,d\varphi\right].$$

Man dividiere durch $\sin^2\varphi'$ und den Ausdruck in der ersten eckigen Klammer und kürze wie oben ab:

$$\left(\frac{d\varphi'}{d\varphi}\right)^2=1+\frac{2\alpha}{\sin\varphi'}\frac{d\varphi'}{d\varphi}\cdot\frac{p^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{r}\right)^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2}$$
$$\cdot\left\{\left[\frac{\varepsilon^2+1}{p^2}-\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2-\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]\cos\varphi'-\frac{2\varepsilon}{p^2}\right\}.$$

Da wir von höheren Potenzen von α absehen, können wir in den mit α behafteten Gliedern die Werte der Veränderlichen einsetzen, die sie für $\alpha=0$ annehmen, d. h.

$$\varphi'=\varphi,\ \frac{1}{r}=\frac{1-\varepsilon\cos\varphi}{p},\ \text{also}\ \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2=\frac{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}{p^2}$$

setzen; dann erhalten wir

$$\left(\frac{d\varphi'}{d\varphi}\right)^2 = 1 + \frac{2\alpha}{\sin\varphi}\,\frac{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}}{p\,\varepsilon^2}\left[\frac{2\varepsilon\cos^2\varphi}{p^2} - \frac{2\varepsilon}{p^3}\right],$$

$$\left(\frac{d\varphi'}{d\varphi}\right)^2 = 1 - \frac{4\alpha}{p^3\varepsilon}\sin\varphi\,(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2},$$

$$d\varphi' = d\varphi\left[1 - \frac{2\alpha}{p^3\varepsilon}\sin\varphi\,(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}\right],$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{2\alpha}{p^3\varepsilon}\int_0^{\varphi}\sin\varphi\,(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}\,d\varphi,$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\alpha}{2p^3\varepsilon^2}\left[\frac{(1-\varepsilon^2)^3}{3}\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^3 + \frac{2(1-\varepsilon^2)}{5}\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^5 + \frac{1}{7}\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^7 - \frac{92}{105}\sqrt{1-\varepsilon^2}^7\right].$$

Insgesamt erhält man daher die Lösung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\,e^{\frac{2\alpha}{p^3}\int(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}\,d\varphi} - \left[\frac{\varepsilon}{p} + \frac{2\alpha}{p^4}\int\cos\varphi\,(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}\,d\varphi\right]$$

$$\cdot\cos\left\{\varphi - \frac{\alpha}{2p^3\varepsilon^2}\left[\frac{(1-\varepsilon^2)^3}{3}\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^3 + \frac{2(1-\varepsilon^2)}{5}\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^5 + \frac{1}{7}\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^7 - \frac{92}{105}\sqrt{1-\varepsilon^2}^7\right]\right\},$$

oder $r = \dfrac{p'}{1-\varepsilon'\cos\varphi'}$ mit obigem Werte von φ' und

$$p' = p\,e^{-\frac{2\alpha}{p^3}\int(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}\,d\varphi}$$

und

$$\varepsilon' = \left[\varepsilon + \frac{2\alpha}{p^3}\int\cos\varphi\,(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}\,d\varphi\right] \cdot e^{-\frac{2\alpha}{p^3}\int(1-\varepsilon\cos\varphi)^2\sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}\,d\varphi}$$

und

$$\frac{\alpha}{p^3} = \frac{3\pi M}{4c^2T^2\varrho\,d\cdot(1-\varepsilon^2)^3}.$$

Es findet also keine Perihelwanderung, sondern nur eine äußerst geringfügige Abweichung der Apsidenlinie vom Brennpunkte statt, ferner aber, wie zu erwarten, eine mit der Zeit zunehmende Verengerung der Bahn und auch eine ent-

sprechende Abnahme der Exzentrizität. (Die noch übrig bleibenden Integrale sind elliptische, die ihren Wert proportional der Zahl der Umläufe vermehren.) Die Wirkung ist nur klein; sie verhält sich zur Einsteinschen Perihelwanderung wie

$$\frac{8\pi M}{2c^2 T^2 \varrho\, d\cdot(1-\varepsilon^2)^3} : \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)} = M : 16\pi^2 a^3 \varrho\, d\cdot(1-\varepsilon^2)^2 .$$

An der Größe des Produktes $a^2 \varrho\, d$ gegenüber der Sonnenmasse $\frac{4}{3}\pi P^3 D$ kann man die Geringfügigkeit der Wirkung ermessen. Immerhin ist die Neigung zur Verringerung der Exzentrizität bemerkenswert, da sie für alle Planeten erfolgen muß und im Laufe der ungezählten Jahrmillionen doch vielleicht zu dem jetzigen Zustand einen Beitrag geliefert hat.[1])

Zusammenfassung.

Durch eine Abänderung der Variationsbedingungen in der Weltfunktion gelange ich zur Aufstellung einer weiteren ebenfalls eich- und koordinateninvarianten Gleichung

$$(1) \qquad (\mathfrak{F} + 2\mathfrak{g}^2)^2 = \beta \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}$$

zwischen den Größen des Gravitations- und elektromagnetischen Feldes.

Es werden dann die Bedingungen untersucht, unter denen sich die Annahme einer Verzerrung des Ruhraumes der anziehenden Elektronen sich mit der Theorie des skalaren Gravitationspotentials verträgt, wenn man dies als Lichtgeschwindigkeit deutet, und insbesondere der Einstein-Schwarzschildsche Ansatz für das Koordinatensystem im kugelsymmetrischen Gravitationsfeld als mit dieser Theorie vereinbar gefunden.

---

1) Soeben nach Fertigstellung dieser Arbeit bekam ich den Artikel von E. Freundlich: „Der Bericht der englischen Sonnenfinsternisexpedition über die Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfeld der Sonne“ in den Naturwissenschaften VIII. Heft 34. S. 667ff. 1920 zu Gesicht, der sich insbesondere auch mit der von Courvoisier entdeckten jährlichen Refraktion beschäftigt. Auch nach Kenntnisnahme dieser Abhandlung kann ich leider nicht sagen, daß wir einer Deutung dieser Erscheinung näher gekommen sind.

Es wird sodann für das Feld eines einzigen Elektrons eine Diff.-Gl. 3. O.

$$(B''') \quad \begin{cases} \left(\frac{\beta}{3} - 1\right)\sqrt{g_{11}}\, u \cdot R^{-2} \sin^{-2}\frac{r}{R} \\ = \frac{d}{dr}\left\{\left[u^2\sqrt{g_{11}}\, R^{-2}\sin^{-2}\frac{r}{R} + \frac{2}{3}\sqrt{\beta}\, u\, \frac{d}{dr}\frac{\frac{du}{dr}}{u\sqrt{g_{11}}}\right] : \frac{du}{dr}\right. \\ \qquad \left. + \frac{2}{3}\sqrt{\beta}\,\frac{\frac{du}{dr}}{u\sqrt{g_{11}}}\right\} \end{cases}$$

gewonnen, aus der sich sämtliche Größen dieses Feldes, zum Teil durch Quadraturen, ableiten lassen.

Für die zwar nicht genau, aber im Fall der Planetenbewegung mit sehr großer Annäherung erfüllte Annahme, daß das elektromagnetische Feld verschwindet, wird das Problem sehr viel einfacher und führt zu der Folgerung, daß die Massendichte mit der der Gravitationsenergie übereinstimmt. Daraus werden die Ansätze für das Koordinatensystem im kugelsymmetrischen Gravitationsfelde abgeleitet, die mit den früheren Ansätzen von Einstein und von mir in Gliedern zweiter und höherer Ordnung abweichen, da diese die Massendichte im Felde gleich 0 setzten.

Es werden dann die sich daraus ergebenden Folgerungen für die Krümmung des Lichtstrahls und die Wanderung des Perihels untersucht. Nur im zweiten Fall wird eine Abweichung festgestellt, und zwar sinkt der Wert der Perihelwanderung für den Einsteinschen Ansatz auf $\frac{5}{6}$, für den meinigen von der Hälfte des Einsteinwertes auf $\frac{1}{3}$. Es wird dann noch geprüft, inwiefern die Annahme einer den Weltenraum erfüllenden Materie von der Dichte der Gravitationsenergie eine Hemmung auf den Planetenlauf ausübt und die Wirkung als sehr gering erkannt. Dagegen läßt sich noch nicht absehen, welchen Einfluß diese Energiematerie auf die Krümmung des Lichtstrahls ausübt, da hierzu die elektromagnetischen Größen eingeführt werden müssen, und ob insbesondere die jährliche Refraktion Courvoisiers hiermit zusammenhängt.

Wilhelmshaven, den 7. September 1920.

(Eingegangen 10. September 1920.)

2. *Über die Wirbelströme bei der spotanen Änderung der Magnetisierung;* von *B. Wwedensky.*

Beim Studium sämtlicher Prozesse, in denen ein Ferromagnetikum, z. B. Eisen, der Wirkung eines periodisch bzw. aperiodisch veränderlichen magnetischen Feldes unterworfen wird, hat man es unbedingt mit der Wirkung der Wirbelströme zu tun, die sich im Eisen entfalten und die die Schnelligkeit seines Ummagnetisierens zu mindern suchen. Wenn auch Wirbelströme bei *periodischen* Vorgängen schon vielseitig, wie experimentell, so auch theoretisch, untersucht worden sind, so fehlt doch eine Theorie der *aperiodischen* Prozesse gänzlich, für den Fall wenigstens, wenn die untersuchten Eisenproben kreiszylindrische Drähte sind. Doch spielen solche Prozesse eine wichtige Rolle, wo es sich um experimentelle Bestimmung der sogenannten magnetischen Viskosität (auch Nachwirkung genannt) handelt.[1])

Im folgenden wird eine Theorie der Wirbelströme in einem kreisrunden Eisenzylinder, dessen Magnetisierung sich aperiodisch ändert, entwickelt. Die Resultate, die mit der

1) Hier sind besonders diejenigen Arbeiten gemeint, die sich mit der Verzögerung der spontanen Änderung der Magnetisierung in ihrem Anfangsstadium beschäftigen (Untersuchungen von J. Klemenčič, Wied. Ann. **62.** S. 68. 1897 und M. Gildemeister, Ann. d. Phys. **23.** S. 401. 1907). Man könnte die Ursache dieser Erscheinung nach Vorschlag von W. Arkadiew als „magnetische Viskosität" bezeichnen. Dagegen schlägt er vor, unter der „magnetischen Nachwirkung" derartige Änderungen des Magnetismus zu nennen, die sich in kleinen nachbleibenden Änderungen der Magnetisierung äußern (Untersuchungen von J. A. Ewing, Phil. Trans. **176.** S. 589. 1885; Lord Rayleigh, Phil. Mag. **23.** S. 225. 1887 u. a.). Da die ersteren Vorgänge gewöhnlich sehr schnell verlaufen (etwa 10^{-6} Sek.), die letzteren dagegen viel langsamer (volle Sekunden, sogar Minuten), so findet die Viskosität bei sehr schnellen Vorgängen statt, die Nachwirkung aber nur bei sehr langsamen.

Erfahrung befriedigend stimmen, könnten wohl eine allgemeinere Anwendung finden, z. B. bei der Konstruktion schnellarbeitender Elektromagnete mit massiven oder unterteilten Kernen; auch sind die Ausgangsgleichungen dieselben, wie sie in der Theorie der Wärmeleitung, Diffusion u. a. Anwendung finden.[1])

Bezeichnungen.

H_ϱ und B_ϱ = Feldintensität und Induktion in der Entfernung ϱ von der Zylinderachse.

H_0 und B_0 = Anfangswerte dieser Größen (für $t = 0$).

$$\Phi_\varrho = \int_0^\varrho 2\pi\varrho \cdot B_\varrho \cdot d\varrho .$$

$$N_\varrho = \int_0^\varrho 2\pi\varrho \cdot H_\varrho \cdot d\varrho .$$

σ = elektrische Leitfähigkeit (elektromagnetische CGS.-Einheiten).

μ = Permeabilität.

j_ϱ = Wirbelstromdichte in der Entfernung ϱ von der Zylinderachse.

t = Zeit.

$a = 4\pi\mu\sigma$.

r = Halbmesser eines unendlichen Zylinders oder Ringes.

$$\xi = \frac{t}{a r^2} = \frac{t}{4\pi\mu\sigma r^2} .$$

$J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_0'(x)$ und $J_1'(x)$ = Besselsche Funktionen vom Argumente x erster Art von Ordnung Null und Eins und ihre Derivierten nach x.

1. Es werde ein runder Eisenzylinder vom Radius r der Wirkung eines longitudinal gerichteten magnetischen Feldes H unterworfen, das für $t < 0$ eine konstante Intensität H_0 besitzt, bei $t = 0$ aber diese Intensität *sprungweise* ändert; also z. B. augenblicklich die Intensität Null bekommt. Dann ist für alle Momente $t > 0$ im Eisen bloß das Feld H_ϱ wirksam, das von Wirbelströmen bedingt ist und dessen Intensität für gegebenes t bloß von der Entfernung ϱ von der Zylinderachse abhängt. Dann gelten bekanntlich[2]) die Beziehungen:

1) Vgl. Fourier, Theorie anal. de la chaleur; auch der Artike von E. W. Hobson und H. Diesselhorst in Teubners Enz. math. Wiss. 5. Nr. 4.

2) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 9. S. 497. 1902.

$$(1) \qquad H_\varrho = 4\pi \int_\varrho^r j_o \, d\varrho ,$$

$$(2) \qquad j_\varrho = -\frac{\sigma}{4\pi\varrho} \cdot \frac{\partial \Phi_\varrho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{4\pi\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\varrho 2\pi\varrho \cdot B_\varrho \cdot d\varrho .$$

Nach zweifacher Differenzierung nach ϱ bekommt man daraus die Differentialgleichungen, die als Spezialisierung der Maxwellschen aufgefaßt werden können:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 H_\varrho}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_\varrho}{\partial \varrho} = 4\pi\varrho \frac{\partial}{\partial t} B_\varrho ,$$

$$(4) \qquad -\frac{\partial^2 j_\varrho}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial j_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{j_\varrho}{\varrho^2} = \sigma \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varrho} B_\varrho ,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial^3 N}{\partial \varrho^3} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 N}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial N}{\partial \varrho} = 4\pi\sigma \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial t} \Phi_o .$$

Diese Gleichungen haben eine allgemeine Bedeutung; doch selbst bei der Kenntnis der Funktion $B = B(H)$ sind sie nur schwerlich zu behandeln. Wenn wir aber uns mit den Prozessen im oberen Teile der Hysteresisschleife begnügen, wo man, *unter B_ϱ bloß den verschwindenden Teil der sämtlichen Induktion verstanden*, setzen kann[1])

$$B_\varrho = \mu \cdot H_\varrho ; \; \mu = \text{const},$$

so vereinfachen sich unsere Gleichungen zu:

$$(3') \qquad \frac{\partial^2 B_\varrho}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial B_\varrho}{\partial \varrho} = a \frac{\partial}{\partial t} B_\varrho .$$

$$(4') \qquad \frac{\partial^2 j_\varrho}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial j_\varrho}{\partial \varrho} - \frac{j_\varrho}{\varrho^2} = a \frac{\partial}{\partial t} j_o .$$

$$(5') \qquad \frac{\partial^3 \Phi_\varrho}{\partial \varrho^3} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 \Phi_\varrho}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial \Phi_\varrho}{\partial \varrho} = a \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varrho} \Phi_\varrho .$$

Zenneck[2]), der die Gleichung (3') zum erstenmal auf diesem Gebiete angewandt hat, hat auch ihre Lösung für den *periodischen* Fall ermittelt; wir wollen hier eine Lösung finden, die sich auf den Fall der *spontanen* Magnetisierungsänderung bezieht.

---

1) Vgl. W. Luthe, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. S. 458. 1913.
2) A. a. O.

2. Betrachten wir also zuerst die Gleichung (3'). Für den aperiodischen Vorgang lautet das partikuläre Integral dieser Gleichung:

$$(B_\varrho)_1 = A \cdot e^{-\frac{a^2}{a} t} \cdot J_0(a\,\varrho),$$

wo A und a^2 vorläufig noch unbestimmte Konstanten sind ($a^2 > 0$). Das vollständige Integral wird durch die Reihe gegeben:

$$B_\varrho = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \cdot e^{-\frac{a_\nu^2}{a} t} J_0(a_\nu \varrho). \tag{6}$$

Nun haben wir A_ν und a_ν^2 so zu wählen, daß die Grenzbedingungen erfüllt werden:

1. Für $t = 0$ ist $B_\varrho = B_0$ überall bei $0 \leqslant \varrho \leqslant r$.
2. Für $t > 0$ ist $B_\varrho = 0$ für $\varrho = r$.

Wir setzen, wie es aus der Theorie der Besselschen Funktionen folgt:[1])

1. $a_\nu r = \lambda_\nu$,

wobei λ_ν die ν-te Wurzel der Gleichung $J_0(\lambda) = 0$ bedeutet, und

$$2.\quad A_\nu = \frac{2 \int_0^r B_0 J_0\left(\lambda_\nu \frac{\varrho}{r}\right) \varrho\, d\varrho}{r^2 J'(\lambda_\nu)^2} = \frac{2 B_0}{\lambda_\nu J_1(\lambda_\nu)}.$$

Setzt man diese Werte von a_ν und A_ν in (6), so bekommt man für B_ϱ die Formel:

$$\frac{B_\varrho}{B_0} = \beta_\varrho = 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\lambda_\nu^2 \xi} \frac{J_0\left(\lambda_\nu \frac{\varrho}{r}\right)}{\lambda_\nu J_1(\lambda_\nu)}, \tag{7}$$

wobei

$$\xi = \frac{t}{4\pi\mu\sigma r^2}$$

gesetzt ist, und der ganze Ausdruck die Anfangs- und Grenzbedingungen erfüllt.

Wie man sieht, kommt die Veränderliche ϱ in dieser Formel nur in der Verbindung $\varrho/r = x$ vor, so daß man schreiben könnte $\beta_\varrho = \beta_x$; $x = \varrho/r$.

1) Z. B. A. Gray und G. Matthews, Treatise on Bessel Functions, Kap. VI.

Die Größen β_x und ξ spielen nun die Rolle der „reduzierten" Koordinaten; die Größe x können wir dabei als Parameter betrachten. Setzen wir in (7) für λ_ν und $J_1(\lambda_\nu)$ ihre Zahlenwerte[1]) ein, so erhalten wir:

$$\beta_x = 1{,}60 \cdot e^{-5{,}78\,\xi} J_0\left(2{,}40\,\frac{\varrho}{r}\right) - 1{,}07\, e^{-30{,}47\,\xi} \cdot J_0\left(5{,}52\,\frac{\varrho}{r}\right)$$
$$+ 0{,}85 \cdot e^{-74\,\xi} J_0\left(8{,}65 \cdot \frac{\varrho}{r}\right) - 0{,}73 \cdot e^{-139\,\xi} J_0\left(11{,}79\,\frac{\varrho}{r}\right)$$
$$+ 0{,}65 \cdot e^{-229\,\xi} J_0\left(14{,}93\,\frac{\varrho}{r}\right) - 0{,}58 \cdot e^{-326\,\xi} J_0\left(18{,}07\,\frac{\varrho}{r}\right) \ldots,$$

eine Reihe, die freilich nur bei nicht allzu kleinen ξ ($\xi \geqslant 0{,}01$) hinlänglich rasch konvergiert. Fig. 1 stellt eine Kurvenschar dar, die die Verteilung von β_x im Zylinder für verschiedene ξ

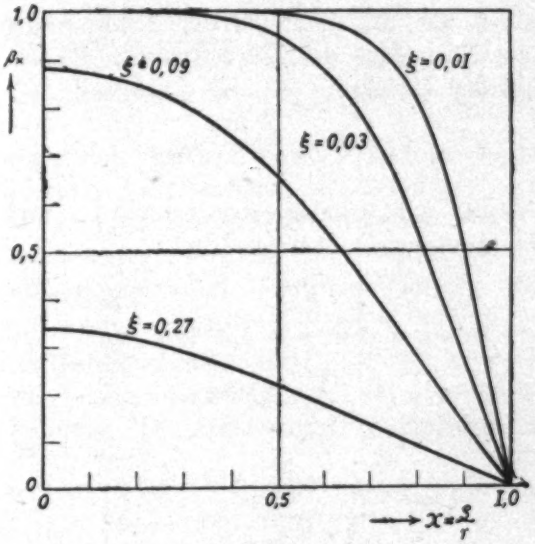


Fig. 1.

(also z. B. verschiedene Momente) ergibt. Das Diagramm ist mit Hilfe der Tab. I aufgezeichnet, bei deren Ermittlung Jahnke-Emdesche[1]) und Grunersche[2]) Tabellen gebraucht wurden.

---

1) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln.
2) P. Gruner, Jahrb. d. Radioakt. **3**. S. 120. 1906.

Tabelle I.

Werte für $\beta_\varrho(\xi)$.

ϱ/r / ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
0,01	1,0	1,0	1,0	0,98	0,81	0,49	0
0,03	1,00	1,00	0,977	0,866	0,534	0,280	0
0,09	0,885	0,850	0,737	0,541	0,279	0,137	0
0,27	0,337	0,318	0,263	0,183	0,090	0,044	0
0,81	0,0149	0,0140	0,0116	0,0081	0,0040	0,0019	0

Der Entmagnetisierungsprozeß beginnt an der Oberfläche des Zylinders und verbreitet sich allmählich in sein Inneres. Je dicker der Zylinder, je größer seine Permeabilität und seine Leitfähigkeit, desto länger ist die Dauer des Prozesses, analog dem Fall der Wärmeleitung oder der Diffusion.

4. Wenden wir uns jetzt zu der Bestimmung des Verlaufs und der Verteilung der Wirbelströme. Es ist leicht einzusehen, daß der Gleichung (4′) der Ausdruck

$$j_\varrho = \Sigma A_1 e^{-a^2 t} J_1(a\varrho) \tag{8}$$

genügt. Um die willkürlichen Konstanten A_1 und a zu bestimmen, betrachten wir den Ausdruck:

$$j_\varrho = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial H_\varrho}{\partial \varrho} = -\frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial B_\varrho}{\partial \varrho}, \tag{8′}$$

der unmittelbar aus (1) folgt. Setzen wir hier die Reihe B_ϱ aus (7) ein, so erhalten wir:

$$j_\varrho = \frac{B_\varrho}{4\pi\mu r}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\lambda_\nu^2 \xi}\frac{J_1\left(\lambda_\nu \frac{\varrho}{r}\right)}{J_1(\lambda_\nu)}, \tag{8″}$$

wobei ξ und $\lambda_\cdot$ die vorige Bedeutung haben. Da dieser Ausdruck bis auf die beiden willkürlichen Konstanten mit (8) identisch ist, genügt er auch der Gleichung (4′), was die Richtigkeit der bei Bildung von (8″) angewandten Differentiation der unendlichen Reihe *a posteriori* beweist.

Mit anderen Worten, *der Ausdruck (8″) stellt wirklich den gesuchten Verlauf und die Verteilung der Wirbelstromdichte dar.* Die Zahlenformel lautet nun:

$$\frac{4\pi\mu r}{B_0} j_\varrho = 1{,}93 \cdot e^{-5{,}78\xi} J_1\left(2{,}40\frac{\varrho}{r}\right) - 2{,}94 \cdot e^{-30{,}47\xi} J_1\left(5{,}52 \cdot \frac{\varrho}{r}\right)$$
$$+ 3{,}68 \cdot e^{-74{,}88\xi} J_1\left(8{,}65 \cdot \frac{\varrho}{r}\right) - 4{,}30 \cdot e^{-139\xi} J_1\left(11{,}79 \cdot \frac{\varrho}{r}\right)$$
$$+ 4{,}84 \cdot e^{-223\xi} J_1\left(14{,}93\frac{\varrho}{r}\right) - 5{,}32 \cdot e^{-326\xi} J_1\left(18{,}07\frac{\varrho}{r}\right) + \cdots$$

Mit Hilfe dieser Formel wurde die Tab. II zusammengestellt.

Tabelle II.

Verteilung der Funktion $\frac{4\pi\mu r}{B_0} j_\varrho$ für verschiedene ξ.

ξ \ ϱ/r	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	0	0,0	0,0	0,0	0,32	0,72	1,29	2,54
0,03	0	0,016	0,106	0,499	0,828	1,16	1,37	1,37
0,09	0	0,161	0,385	0,584	0,662	0,704	0,704	0,660
0,27	0	0,095	0,173	0,221	0,234	0,235	0,227	0,210
0,81	0	0,004	0,008	0,010	0,011	0,011	0,011	0,005

Wie aus der Fig. 2 ersichtlich ist, ist anfangs der ganze Wirbelstrom an der Oberfläche des Zylinders kondensiert, und für $t = 0$ ist $j_{\varrho=r}$ theoretisch unendlich groß.[1]) Allmählich dringt der Strom auch in das Innere des Zylinders ein, wobei aber das Dichtemaximum *nicht* immer an der Oberfläche liegt.

5. Die beiden Größen B_ϱ und j_ϱ entgehen der experimentellen Untersuchung. Das, was wir messen können, ist ausschließlich nur die Größe Φ_r — der Induktionsfluß im ganzen Zylinder. Die Gleichung (5′) hat das Integral von der Form:

$$\Phi_\varrho = \varrho r \sum A_2 e^{-\alpha^2\xi} J_1(\alpha\varrho). \tag{9}$$

Wenn wir nun, analog wie oben, den Ausdruck gebrauchen

$$\Phi_\varrho = \int_0^\varrho B_\varrho \cdot 2\pi\varrho \cdot d\varrho, \tag{9′}$$

so erhalten wir:

1) Praktisch ist das selbstverständlich nicht der Fall, erstens, weil das äußere Feld nicht momentan verschwindet und zweitens, weil das Eisen die magnetische Viskosität besitzt.

$$\Phi_\varrho = 4\pi B_0 r \varrho \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\lambda_\nu^2 \xi} \frac{J_1\left(\lambda_\nu \frac{\varrho}{r}\right)}{\lambda_\nu^2 J_1(\lambda_\nu)}, \tag{10}$$

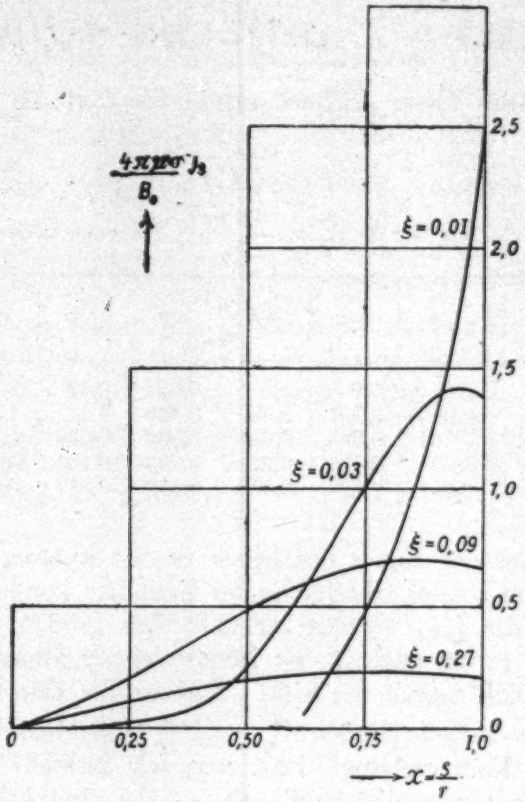


Fig. 2.

welcher Ausdruck der Gleichung (5′) genügt. Setzen wir nun $\varrho = r$ und führen die Größe

$$\varphi = \frac{\Phi_r}{\pi r^2 B_0},$$

die „reduzierte mittlere Induktion" ein, so erhalten wir:

$$\varphi = 4 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{e^{-\lambda_\nu^2 \xi}}{\lambda_\nu^2}, \tag{11}$$

wobei also φ eine Funktion einer einzigen Variabeln ξ ist. Die dazu bezügliche Zahlenformel lautet:

$$\varphi = 0{,}69167 \cdot e^{-5{,}783\,\xi} + 0{,}13120 \cdot e^{-30{,}472\,\xi} + 0{,}05346 \cdot e^{-74{,}83\,\xi} +$$
$$+ 0{,}02773 \cdot e^{-139\,\xi} + 0{,}01794 \cdot e^{-228\,\xi} + 0{,}0122 \cdot e^{-326\,\xi} + \ldots$$

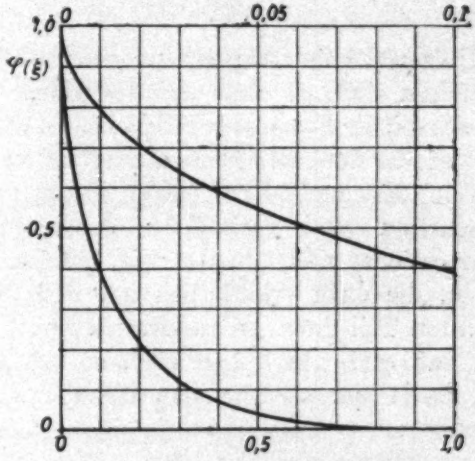
Die Reihe konvergiert ziemlich rasch (besonders bei nicht allzu kleinen ξ) und ist für die Rechnungen gut geeignet. Die Tab. III stellt die daraus berechneten Werte von φ dar.

Tabelle III.

Die reduzierte mittlere Induktion $\varphi(\xi)$.

ξ	$\varphi(\xi)$	ξ	$\varphi(\xi)$	ξ	$\varphi(\xi)$
0,01	0,7841	0,10	0,3855	0,40	0,0685
0,02	0,7016	0,15	0,2920	0,45	0,0513
0,03	0,6405	0,20	0,2180	0,50	0,0384
0,04	0,5905	0,25	0,1631	0,60	0,0216
0,06	0,5105	0,30	0,1221	0,70	0,0121
0,08	0,4473	0,35	0,0893	0,80	0,0068
				1,00	0,0021

Werte von ξ für die obere Kurve.



Werte von ξ für die untere Kurve.

Fig. 3.

Mit Hilfe dieser Tabelle und besonders mit Hilfe der Fig. 3 wird es nun leicht, den Bruchteil des Anfangswertes der mittleren temporären Induktion zu bestimmen, die nach Verlauf von t Sekunden im Zylinder von beliebiger Dicke, Leitfähigkeit und Permeabilität noch besteht.

6. Die hier für den Fall des verschwindenden Feldes abgeleiteten Gleichungen (7), (8″) und (11) können wir nun leicht

auch für den Fall eines spontan *entstehenden* Feldes gebrauchen, indem wir den in diesem Falle gültigen Bedingungen, nämlich

1. für $t = 0$: $B_\varrho = 0$ für $0 \leqslant \varrho < r$,
   $B_\varrho = \text{const}$ für $\varrho = r$,
2. für $t = \infty$: $B_\varrho = \text{const}$ für $0 \leqslant \varrho \leqslant r$,

gemäß, die Gleichungen folgendermaßen umgestalten: statt Gleichung (7):

$$\beta_\varrho = 1 - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\lambda_\nu^2 \xi} \frac{J_0\left(\lambda_\nu \frac{\varrho}{r}\right)}{\lambda_\nu J_1(\lambda_\nu)}; \tag{7'}$$

statt Gleichung (8''):

$$j_\varrho = -\frac{B_0}{4\pi\mu r} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\lambda_\nu^2 \xi} \frac{J_1\left(\lambda_\nu \frac{\varrho}{r}\right)}{J_1(\lambda_\nu)} \tag{8'''}$$

und endlich statt Gleichung (11):

$$\varphi = 1 - 4\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{e^{-\lambda_\nu^2 \xi}}{\lambda_\nu^2}. \tag{11'}$$

Wie dieser Umgestaltung entsprechend die Tabellen und die Kurven zu ändern sind, ist ohne weiteres klar.

7. *Vergleich mit der Erfahrung.* Hopkinson und Wilson,[1]) die den Verlauf der Magnetisierungsänderung in sehr dicken (bis etwa 10 cm) Eisenzylindern maßen, haben gefunden, daß die Änderungszeiten *ceteris paribus* der Querschnittsfläche des Zylinders proportional sind. In der Tat, gesetzt, daß wir die Zeit θ messen, die dazu erforderlich ist, daß die Induktion bis auf den $\varkappa$-ten Teil ihres Anfangswertes sinkt, oder, anders ausgedrückt, daß $\varphi(\xi)$ gleich $1/\varkappa$ wird, so erhalten wir, daß die Größe ξ, die ja hier *nur* von dem Werte $1/\varkappa$ abhängt, der Gleichung genügt:

$$\xi_{1/\varkappa} = \frac{1}{4\mu\sigma} \cdot \frac{\theta_{1/\varkappa}}{(\pi r^2)},$$

oder daß $\theta_{1/\varkappa}$ wirklich dem Zylinderquerschnitt proportional sein muß.

Klemenčič[2]) und Gildemeister[3]), die die Viskosität in Eisendrähten maßen, geben den Verlauf der Änderung

1) J. Hopkinson und E. Wilson, Proc. Roy. Soc. London **56**. S. 108. 1894.
2) J. Klemenčič, a. a. O.
3) M. Gildemeister, a. a. O.

der temporären Induktion (im willkürlichen Maße) als Funktion der Zeit an. Um ihre Zahlen zur Prüfung unserer Formel gebrauchen zu können, bedürfen wir nun der Kenntnis der beiden Größen σ und μ, wofür uns genaue Angaben gänzlich fehlen, zumal da die „Permeabilität μ" vermutlich keineswegs mit der „gewöhnlichen Permeabilität" übereinstimmt: erstens, weil wir uns bei den in Rede stehenden Beobachtungen auf demjenigen oberen Teile der Hysteresisschleife befinden, der der Änderung des temporären Magnetismus entspricht, und zweitens, weil bei der äußersten Schnelligkeit, mit welcher die Prozesse verlaufen, die statischen Werte der Permeabilität ihre Gültigkeit verlieren können. Von vornherein könnte man mit guten Gründen behaupten, daß unsere Größe μ entschieden kleiner als die „gewöhnliche Permeabilität" zu schätzen ist. Wir können also nicht umhin, daß wir die Größe μ als gewissermaßen willkürliche Konstante der Formel (11) betrachten und sie so wählen, daß die Erfahrung mit der Formel möglichst gut übereinstimmt. Dabei ergeben sich für mittlere Werte μ sehr plausible Zahlen, nämlich etwa 400, 200 und 100, was aus der folgenden Tabelle zu sehen ist.

Tabelle IV.

Die mittleren Werte der Permeabilität.

Drahtstärke mm	6,0	1,74	0,50	0,36	0,185	0,161
Maximale Feldstärke, Gauss	0,047	5,1	10	8,3	ca. 1	10
Permeabilität μ	(470)	145	116	180	(178)	360
Produkt $\mu\sigma$ (el.-magn.) . . .	0,047	—	—	—	0,0178	—

Haben wir nun auf irgendwelche Weise μ (wenn die Angaben über σ fehlen, auch das ganze Produkt $\mu\sigma$) geschätzt, so können wir jede experimentelle Kurve zur „reduzierten" Form $\varphi(\xi)$ bringen. Der Grad der Übereinstimmung einer solchen Kurve mit der nach Gleichung (11) konstruierten, kann nun als Maß der Richtigkeit unserer Schlüsse dienen. Fig. 4 faßt in einem Diagramm sechs experimentelle Kurven zusammen, von denen vier einer noch nicht veröffentlichten Arbeit des Verfassers entnommen sind. Wie man sieht, schmiegen im allgemeinen die Beobachtungspunkte der theoretischen Kurve befriedigend an, was auch die Gültigkeit der abgeleiteten Formel zu beweisen scheint.

Die Übereinstimmung hört erst auf, wenn die Drähte

dünner als 0,1 mm geworden sind. In der Tat stellt sich dabei eine Verzögerung des Prozesses ein, die zu groß ist, als daß sie der Wirkung der Wirbelströme zugeschrieben werden könnte; die Induktion fällt nämlich bis zur Hälfte ihres Anfangswertes in etwa 10^{-6} Sek. ab, während nach der Theorie sie dazu bloß 10^{-7} Sek. gebrauchen müßte. Ferner ist diese Verzögerung

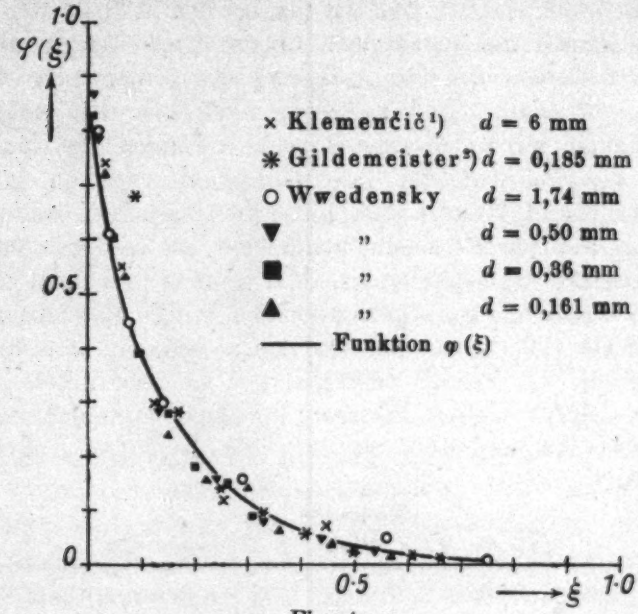


Fig. 4.

ceteris paribus um so bedeutender, je größer der Anfangswert der Magnetisierung ist. Der Grund der Verzögerung ist die magnetische Viskosität, die den Verlauf der spontanen Änderung der Magnetisierung in ihren Anfangsstadien regelt, und die mir vor kurzem (1918) experimentell vielseitig zu untersuchen gelungen ist. Ich beabsichtige darüber in möglichst kurzer Zeit zu sprechen.

Ich möchte nun auch an dieser Stelle dem Hrn. Prof. W. Arkadiew für die Anregung und Unterstützung bei der Erfüllung der Arbeit meinen verbindlichsten Dank aussagen.

Moskau, August 1919.

1) A. a. O., Mittel aus den Versuchsreihen.
2) A. a. O., Versuch *h* (korrigiert auf den „Leerspiralenausschlag").

(Eingegangen 18. August 1920.)

3. *Über die reversible magnetische Permeabilität. Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Fritz Erhardt; von Richard Gans.*

Herr Erhardt hat in seiner Königsberger Dissertation[1]) die Abhängigkeit der reversiblen Permeabilität von der Schwingungszahl studiert und bei dieser Gelegenheit eine Abweichung von den Ergebnissen meiner Messungen[2]) gefunden. Hätte er Recht, so würde der von mir aufgestellte Satz, daß die reversible Permeabilität μ_r in großer Näherung eine eindeutige, von der Vorgeschichte unabhängige Funktion der Magneti-

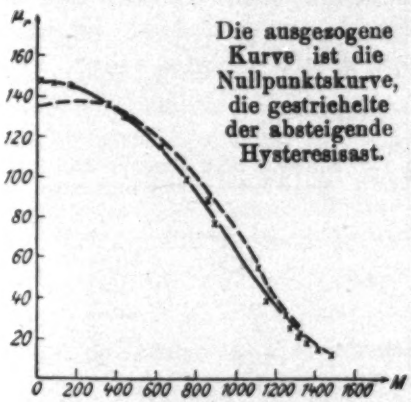


Fig. 1.

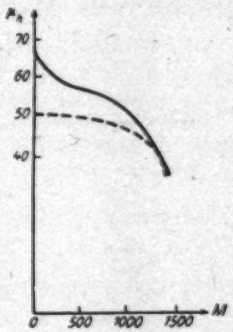


Fig. 2.

sierung $\mathfrak{M}$ ist, nicht gültig sein. Deshalb sei es mir erlaubt, auf diesen Punkt kurz zurückzukommen. Daß ich es erst heute tue, hat seinen Grund darin, daß ich die Annalen der Physik der letzten Jahre erst kürzlich erhalten habe.

Während ich früher Kurven des Typus der Fig. 1 erhalten habe, entsprechen die Resultate des Hrn. Erhardt der Kurve Fig. 2, d. h. die reversible Permeabilität auf der Nullpunkts-

1) Fritz Erhardt, Ann. d. Phys. **54**. S. 41. 1918; vgl. auch W. Kaufmann, Physik. Zeitschr. **17**. S. 552. 1916.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **33**. S. 1065. 1910.

kurve verhält sich nach ihm ganz anders. Sie beginnt mit einem hohen Anfangswerte und nimmt bis zur höchsten Magnetisierung ständig ab. Erhardt glaubt, die Abweichung durch unvollkommene Entmagnetisierung meiner Eisenzylinder (muß heißen: Ellipsoide) erklären zu können.

Trotzdem ich auf Grund meines Beobachtungsmaterials überzeugt war, ihm nicht beistimmen zu können, zumal ich bei meinen neueren Untersuchungen[1]), die ihm allerdings nicht bekannt sein konnten, nach einer wesentlich besseren Methode (Entmagnetisierungsapparat nach Gumlich und Rogowski) entmagnetisierte und die gleichen Resultate wie früher erhielt, trotzdem die alten Untersuchungen Lord Rayleighs[2]) und neuere von Hoffmann[3]) (vgl. z. B. seine Diagramme Figg. 8 und 10) zu den gleichen Resultaten führten, wie meine Messungen, habe ich doch noch einige Kontrollmessungen für kleine Magnetisierungen angestellt, um die Entmagnetisierung mit größerer Genauigkeit zu prüfen und sicher zu sein, daß mein Gesetz nicht etwa durch eine mir und anderen entgangene Unstetigkeit in der Nähe von $\mathfrak{M} = 0$ ungültig würde.

Die Ergebnisse waren folgende:

Weicher Stahl.

$\mathfrak{M}$	μ_r
0,9	89,82
45	92,58
90	91,22
150	91,03
43,9	92,68
0,6	91,35

für $\Delta \mathfrak{H} = 0{,}0223$ Gauss
Die Messung für $\mathfrak{M} = 43{,}9$ entspricht einer absichtlich erzeugten Remanenz.

Gehärteter Remy-Stahl.

$\mathfrak{M}$	μ_r
0,23	40,33
78	41,98
150	42,35
215	42,09
23,3	42,68

für $\Delta \mathfrak{H} = 0{,}0358$ Gauss
Die Messung für $\mathfrak{M} = 215$ entspricht einer absichtlich erzeugten Remanenz, die für $\mathfrak{M} = 23{,}3$ einer absichtlich schlechten Entmagnetisierung

1) R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias. Univ. de La Plata **2.** S. 145. 1918; Ann. d. Phys. **61.** S. 379. 1920.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **23.** S. 225. 1887 (mir unzugänglich).

3) Heinrich Hoffmann, Zyklische Magnetisierungen, die einer konstanten Magnetisierung überlagert sind, nebst Anwendungen auf das Telephon. Dissert. d. Univ. Jena 1913.

Die Resultate sind graphisch in den Figg. 3 und 4 dargestellt. Man sieht, daß die Ergebnisse mit dem Typus meiner früheren Kurven (vgl. Fig. 1) und nicht mit dem der Erhardtschen Kurven (vgl. Fig. 2) übereinstimmen.

Selbstverständlich müssen die Zusatzfelder $\Delta \mathfrak{H}$ praktisch unendlich klein sein, d. h. eine weitere Verkleinerung darf

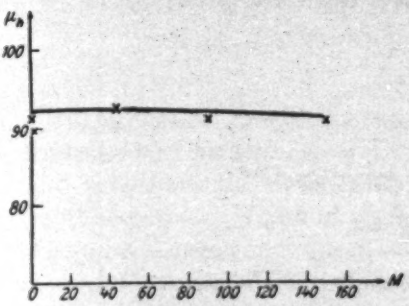


Fig. 3. Weicher Stahl.

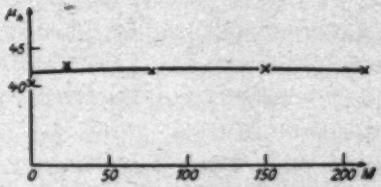


Fig. 4. Harter Remy-Stahl.

keinen Einfluß auf μ_r mehr haben. Die obere Grenze hängt von der Genauigkeit, die man erreichen will, ab, zweitens vom Material, insofern als bei magnetisch harten Stoffen $\Delta \mathfrak{H}$ viel größer gewählt werden darf (vgl. z. B. die Resultate der Arbeit von Gumlich und Rogowski über die Anfangspermeabilität[1]), und schließlich von der Magnetisierung, denn ein $\Delta \mathfrak{H}$, welches für große $\mathfrak{M}$ als unendlich klein gelten kann, kann für kleine $\mathfrak{M}$ diesen Anspruch nicht ohne Weiteres erheben.

Meine diesbezüglichen Messungen ergaben:

Weicher Stahl.		Gehärteter Remy-Stahl.	
$\Delta \mathfrak{H}$ in Gauss	μ	$\Delta \mathfrak{H}$ in Gauss	μ
0,00847	87,83	0,0240	40,51
0,0168	89,58	0,0358	40,34
0,0223	90,31	0,0710	40,58
0,0333	91,70	0,101	40,55
0,0470	94,59		
0,0544	96,64		

1) E. Gumlich u. W. Rogowski, Ann. d. Phys. **34.** S. 254. 1911.

Während beim gehärteten Remy-Stahl Zusatzfelder von 0,1 Gauss noch als unendlich klein gelten können, zeigt die

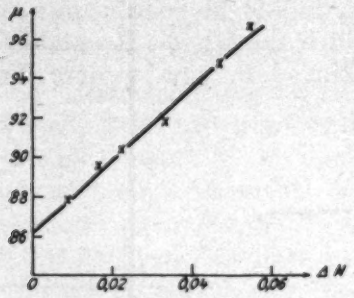


Fig. 5.

auf die weiche Stahlsorte bezügliche Meßreihe, welche in Fig. 5 graphisch dargestellt ist, den linearen Verlauf

$$\mu = a + b\,\Delta\mathfrak{H},$$

der für die Anfangspermeabilität bei etwas größeren Feldern charakteristisch ist.

Aus dieser graphischen Darstellung ersehen wir, daß unsere Messungen an weichem Stahl, die zwecks größerer Empfindlichkeit mit Zusatzfeldern $\Delta\,\mathfrak{H} = 0{,}0223$ Gauss ausgeführt worden sind, bei diesem Material in der Tat noch auf unendlich kleine Felder reduziert werden müssen und dann um einige Prozente kleinere Werte liefern. Diese Korrektion ändert aber nichts am Verlaufe der Kurve.

La Plata, 6. November 1920.
Instituto de Física.

(Eingegangen 10. Dezember 1920.)

4. *Über die Trägererzeugung hochfrequenter Wellenstrahlung in abgeschlossenen Gasräumen;* *von A. Becker und H. Holthusen.*

Durchsetzt hochfrequente Wellenstrahlung einen abgeschlossenen Gasraum, so werden sowohl die getroffenen Wände als die Moleküle des Gases längs des Strahlweges infolge lichtelektrischer Wirkung zu Emissionszentren von Elektronen, die beim Durchgang durch das Gas unter Geschwindigkeitsverlust Elektrizitätsträger erzeugen[1]), deren Anzahl durch den sogenannten Sättigungsstrom gemessen wird. Daß dieser Vorgang der Elektronenemission im betrachteten Fall die ausschließliche Ursache der (indirekten) Trägerbildung ist, wird nicht nur durch eine Reihe älterer[2]) und eigener[3]) neuer Versuche, sondern auch durch die quantentheoretische Betrachtung der Erscheinung wahrscheinlich gemacht.

Die Trägerbildung ist also nicht an den Weg des Wellenstrahles, sondern an denjenigen der emittierten Elektronen gebunden. Die Anzahl der von ihnen erzeugten Elektrizitätsträger hängt einerseits von ihrer Geschwindigkeit, die Funktion der absorbierten Wellenlänge ist, andererseits von ihrer Ausnutzung im Gasraum, die durch die geometrischen Verhältnisse mitbestimmt wird, ab. Soll aus der Trägerzahl allgemein auf deren Ursache geschlossen werden, so bedarf es darnach vor allem ausreichender Kenntnis des Umfanges der Wirkungsausnutzung im Gas und der damit zusammenhängenden quantitativen Unterscheidung zwischen Wand- und Gaswirkung.

1) Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten; Heidelberg 1918, bei C. Winter.

2) Unter diesen ist als besonders beweisend die Wilsonsche Veranschaulichung der Trägerbildung (Proc. Roy. Soc. A. 85. S. 285. 1911) hervorzuheben.

3) H. Holthusen, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstr. 26. S. 215. 1919; außerdem im Folgenden unter B. 10.

Für das Experiment sowohl als für die Theorie besonders einfache Verhältnisse liefert der Fall einer von zwei planparallelen (theoretisch) unendlich ausgedehnten Wänden begrenzten Gasschicht, die normal von einem parallelen Wellenstrahlbündel durchsetzt wird. Er ist, worauf der eine von uns[1]) bereits hingewiesen hat, praktisch realisiert durch einen von einem schmalen Parallelstrahlenbündel axial durchsetzten Zylinderkondensator[2]), dessen Radius den Wirkungsbereich[3]) der auftretenden Elektronen übersteigt. Ein Einfluß seitlicher Wandteile auf die Trägererzeugung ist dann ausgeschlossen, und es bleibt nur der Einfluß der beiden vom Wellenstrahl bei seinem Ein- und Austritt durchsetzten Wände. Dieser ist im wesentlichen[4]) zweierlei Art:

1. Die Wände beeinträchtigen mehr oder weniger erheblich die Trägererzeugung bei allen denjenigen Emissionszentren im Gas, deren Wandabstand innerhalb des Wirkungsbereiches ihrer Elektronen liegt (*Wirkungsausfall*).

2. Die Wände tragen ihrerseits zur Trägerbildung bei, indem sie selbst Elektronen in den Gasraum schicken, die entweder durch die hindurchtretende Wellenstrahlung oder durch auftreffende Elektronen aus dem Gas oder der Gegenplatte (infolge Rückdiffusion oder sekundärer Emission)[5]) ausgelöst werden (*Wandwirkungsbeitrag*). Auch diese Strahlung kann einen „Wirkungsausfall" erleiden.

Diese beiden Wandeinflüsse machen sich in entgegengesetztem Sinn geltend und können sich in geeigneten Fällen auch kompensieren. Für Zwecke der Strahlintensitätsmessung

---

1) H. Holthusen, a. a. O.

2) Ein Parallelplattenkondensator würde als elektrisch nicht abgeschlossenes System nicht ohne weiteres in Betracht kommen können.

3) Unter dem Wirkungsbereich eines Emissionszentrums bzw. seiner Elektronen verstehen wir denjenigen Raum, innerhalb dessen die Anzahl der letzteren infolge Absorption soweit (auf mindestens 1 Proz.) herabgesetzt wird, daß mit einer Strahlwirkung außerhalb dieses Bereichs praktisch nicht mehr gerechnet werden muß.

4) Von Streuung der hindurchtretenden Wellenstrahlung, die bei geeigneter Wahl von Stoff und Dicke der Wand vernachlässigt werden kann, abgesehen.

5) Eine Eigenstrahlung der benutzten Stoffe, die durch die Wahl der letzteren praktisch eliminierbar ist, sei im Gegenwärtigen außer Betracht gelassen.

ist eine solche Kompensation, d. h. eine *praktische Ausschaltung aller Wandwirkungen*, von besonderem Wert. Für die Untersuchung des lichtelektrischen Effekts an festen Medien ist der „Wandeinfluß" dagegen Untersuchungsobjekt.

Die hieraus ersichtliche, für jede Auswertung einer Leitfähigkeitsmessung erhebliche Wichtigkeit einer quantitativen Beherrschung der genannten Verhältnisse hat uns veranlaßt, dieselben näherer theoretischer und experimenteller Untersuchung zu unterwerfen[1]), über deren Ergebnis hier berichtet sei.

A. Theoretisches.

Eine von zwei unendlich ausgedehnten parallelen Wänden begrenzte Gasschicht werde normal von einer Hochfrequenzstrahlung durchsetzt. Wir können dann jedes Volumenelement auf dem Strahlweg als Emissionszentrum einer Kathodenstrahlung auffassen, deren räumliche Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung wir allseitig gleichförmig voraussetzen.[2])

Für die Intensität der an jeder Raumstelle erregten Kathodenstrahlung ist die räumliche Verteilung der Wellenenergie über den gesamten Strahlweg maßgebend. Diese wird durch die beiden Erscheinungen der Diffusion und der Absorption bestimmt, welche im Falle eng begrenzter Parallelstrahlenbündel voneinander getrennt verfolgbar sind[3]), bei unbegrenzten breiten Strahlenbündeln dagegen untrennbar zusammenwirken.[4]) Welche räumliche Energieverteilung beim Durchgang einer Wellenstrahlung durch ein Medium resultiert, richtet sich dementsprechend außer nach der durchstrahlten Masse (Dicke × spezifisches Gewicht) des Mediums insbesondere auch nach den geometrischen Verhältnissen, unter denen der Vorgang abläuft.

Die Anzahl der in jedem Volumenelement des Gases erzeugten Elektrizitätsträger (jedes Vorzeichens) setzen wir der

1) Die erstere wurde von dem einen von uns (B.) im Radiolog. Institut, die letztere von dem anderen (H.) in der Medizinischen Klinik der Universität durchgeführt.

2) Die nähere Begründung siehe Strahlentherapie 12. 1921.

3) Vgl. H. Holthusen, Physik. Zeitschr. 20. S. 5. 1919.

4) Vgl. die analogen Erscheinungen bei Kathodenstrahlen bei P. Lenard, a. a. O., wo dieselben zum erstenmal einer umfassenden strengen Behandlung unterworfen sind.

Anzahl der das Volumen durchlaufenden Elektronen und dem elementaren Strahlweg proportional voraus, wobei wir die Elektronengeschwindigkeit sowohl bezüglich der Trägerbildung als für die Berechnung der Strahldichte der einfacheren Behandlung wegen zunächst als konstant annehmen. An späterer Stelle (A 7 u. 8) zeigen wir direkt, daß auch eine strengere Behandlung[1]) des Gegenstandes, insbesondere die Berücksichtigung des tatsächlich vorhandenen (für die gesamte Trägerbildung verantwortlichen) Geschwindigkeitsverlustes und einer Geschwindigkeitsverteilung[2]) der lichtelektrischen Elektronen die wesentlichen Ergebnisse der einfachen Herleitung in erster Näherung nicht verändert.

Um die Trägerbildung im Einzelnen zu verfolgen, kann der gesamte durchstrahlte Gasraum im allgemeinen in 8 Teile zerlegt werden, nämlich zwei nach außen durch dessen Endflächen begrenzte Abschnitte von der Höhe des Radius des Wirkungsbereichs der Elektronen (R) und den bleibenden Zwischenabschnitt.

Der letztere ist dadurch ausgezeichnet, daß alle längs des Wellenstrahles in ihm ausgelösten Elektronen in ihrer Ausbreitung allseitig praktisch unbeschränkt sind und zur Trägerbildung also voll ausgenutzt werden. Es ist dies das Gebiet der reinen Gaswirkung. In den beiden Endabschnitten dagegen tritt einerseits ein Wirkungsausfall ein für alle innerhalb derselben liegenden Emissionszentren, während andererseits in vollem Umfang (einseitig) ein Wandwirkungsbeitrag hinzutritt. Nimmt die Länge des gesamten durchstrahlten Gasraums ab, so kann der Zwischenabschnitt verschwinden und Wirkungsausfall auch für den Wandwirkungsbeitrag eintreten.

Der Betrachtung dieser Fälle legen wir zunächst Homogenität der Wellenstrahlung zugrunde und gehen danach auf den Einfluß einer Veränderung der Wellenlänge ein (A 7).

1. Wirkungsausfall bei einseitiger Begrenzung.

Ist das durchstrahlte Gas einseitig durch eine zum Wellenstrahl normal stehende ebene Wand begrenzt, so tritt hinsichtlich der Trägererzeugung ein Wirkungsausfall ein für alle Elek-

1) Soweit diese beim gegenwärtigen Stand der hierhergehörigen Kenntnis möglich ist.

2) Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393. 1919.

tronenemissionszentren, welche im Gas innerhalb eines Wandabstands vom Radius R ihres Wirkungsbereichs erzeugt werden.

Um den relativen Durchschnittswert für die Trägerbildung innerhalb R zu ermitteln, seien auf dem Strahlweg der Länge R im Gas n äquidistante Elementarvolumina als Emissionszentren einer allseitig sich kugelförmig ausbreitenden Kathodenstrahlung angenommen. Deren relative Ausnutzung zur Trägerbildung kann als Summe von zwei Teilen betrachtet werden, von denen der eine von rein geometrischen Beziehungen abhängt, während der andere von der Art des physikalischen Vorganges mitbestimmt wird.

Der Betrag des ersten Teils läßt sich darstellen durch den Prozentsatz der Elektronen, der infolge bestimmter Emissionsrichtung überhaupt keinen Wirkungsausfall erleidet. Man findet für ihn den Wert

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]_{n=\infty}=\left[\frac{3n-1}{4n}\right]_{n=\infty}=\frac{3}{4}\,.$$

Einen Wirkungsausfall erleiden nur diejenigen Elektronen des Gases, deren Bahn innerhalb eines zu jedem Emissionszentrum gehörigen bestimmten Kugelsektors (vom halben Öffnungswinkel φ) verläuft, und er ist die Folge davon, daß das Volumen jedes solchen Sektors durch die ebene Begrenzung um einen Kugelabschnitt verringert wird, so daß sich die Trägerbildung auf den zugehörigen *Kegel* beschränkt.

Greifen wir wieder auf dem Strahlweg der Länge R im Gas n äquidistante Emissionszentren heraus und bezeichnen die Anzahl der von jedem Zentrum ausgehenden Elektronen mit i_0, so ist der Beitrag jedes Zentrums zur Elektronendichte im Abstand r von ihm

$$\frac{i_0}{4\pi}\,\frac{1}{r^2}\cdot e^{-ar},$$

wo a den *praktischen* Absorptionskoeffizienten der Kathodenstrahlen für das Gas bezeichnet.

Die innerhalb eines ein Emissionszentrum umgebenden Kugelraums vom Radius R erzeugte Trägerzahl ergibt sich hieraus zu

$$T_0 \frac{i_0}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} e^{-ar} \sin\varphi \cdot dr\, d\vartheta\, d\varphi = T_0 \frac{i_0}{a} (1 - e^{-aR})$$

$$\sim T_0 \frac{i_0}{a},$$

da e^{-aR} der Definition von R gemäß praktisch nicht in Betracht kommt. Der hier als konstant betrachtete Proportionalitätsfaktor T_0 hat die Dimension einer reziproken Länge und bezeichnet diejenige Trägerzahl, die von einem Elektron auf der Längeneinheit seines Weges erzeugt wird.[1])

Mit dieser Trägerzahl ist diejenige zu vergleichen, welche jeweils in einem Kegelraum erzeugt wird, dessen Grundfläche die begrenzende Wand ist und dessen Spitze im betrachteten Emissionszentrum liegt. Schließlich ist der arithmetische Mittelwert dieses „relativen Kegelbeitrags" für alle innerhalb des Wandabstands R angenommenen n Emissionszentren zu bilden und der erhaltene Wert nach Übergang zu großem n mit dem oben aus rein geometrischen Betrachtungen erhaltenen zu vereinigen. Man findet auf diese Weise für den *gesamten Wirkungsausfall innerhalb des betrachteten Abschnittes von der Höhe des Wirkungsbereichs der auftretenden Elektronen, gemessen in Teilen der ohne Begrenzung möglichen Vollwirkung*, den Ausdruck

$$\frac{1}{2aR} - \frac{aR}{4} \mathfrak{Ei}(-aR)$$
$$+ \frac{aR}{2n^2} \left\{ \mathfrak{Ei}\left(-a\frac{R}{n}\right) + \ldots + (n-1)\,\mathfrak{Ei}\left(-(n-1)\frac{aR}{n}\right) \right\}_{n\ \text{groß}}^{2}),$$

wo $\mathfrak{Ei}$ das Exponentialintegral bezeichnet.

Man erkennt, daß dessen Wert nur von dem feststehenden Produkt aR bestimmt wird und daß die Natur des Gases und die Geschwindigkeit der Elektronen nur insofern Einfluß gewinnen, als sie den Radius R des Wirkungsbereiches festlegen,

---

1) Er hat nach Hrn. Lenard, a. a. O. S. 141, die Bedeutung der „differentialen Sekundärstrahlung", die, sofern tertiäre und weitere Strahlung mit einbezogen wird, als „summarische" aufzufassen ist.

2) Für $aR = 5$ und wachsende Werte von n ist der Betrag der Integralreihe

n	10	20	50
	0,0449	0,0479	0,0491;

derselbe nähert sich also 0,05, d. i. die Hälfte von $\frac{1}{2aR}$.

der diesem Produkt zugehört. Bezieht man die Aussagen auf R als Längeneinheit für den Strahlweg, so fällt auch dieser Einfluß weg.

2. Wirkungsausfall bei zweiseitiger Begrenzung.

Ist die Gasschicht von zwei zum hindurchtretenden Wellenstrahl normalen ebenen Wänden im gegenseitigen Abstand L begrenzt, so sind 3 Fälle zu unterscheiden:

a) $L > 2R$. Man kann in diesem Falle die Gasschicht in die früher erwähnten 3 Abschnitte zerlegen. Allen im Zwischenabschnitt der Länge $L - 2R$ auftretenden Emissionszentren kommt Vollwirkung zu, während die beiden Grenzabschnitte einen Wirkungsausfall liefern, der im Ganzen durch Verdoppelung des oben (A 1) berechneten Wertes erhalten wird.

b) $L \leqq \frac{2R}{R}$. Keinem Emissionszentrum im Gas kommt jetzt noch Vollwirkung zu. *Der gesamte Wirkungsausfall beträgt jetzt, in Teilen derjenigen Trägerzahl, die bei voller Ausnutzung aller im Gas erzeugten Elektronen zu erwarten wäre,*

$$\frac{1}{\alpha L} - \frac{\alpha R^2}{2L} \cdot \mathfrak{Ei}(-\alpha R) + \frac{\alpha R^2}{n^2 L} \cdot \left\{ \mathfrak{Ei}\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) + \ldots + (n-1)\,\mathfrak{Ei}\left(-(n-1)\frac{\alpha R}{n}\right) \right\}_{\alpha \text{ groß}}.$$

c) $L < R$. Dieser Fall wird stets bei Verwendung von γ-Strahlen vorliegen. *Der gesamte Wirkungsausfall wird*, im oben benutzten Maß,

$$\frac{1 - e^{-\alpha L}}{\alpha L} - \frac{\alpha L}{2}\,\mathfrak{Ei}(-\alpha R) + \frac{\alpha R^2}{n^2 L} \cdot \left\{ \mathfrak{Ei}\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) + \ldots + \frac{L}{R}\,\mathfrak{Ei}(-\alpha L) \right\}_{\alpha \text{ groß}}.$$

Die folgende Tabelle enthält ein numerisches Beispiel. Sie gibt den Wirkungsausfall in Teilen der Vollwirkung an für Wandabstände von 1—100 cm und den Absorptionskoeffizienten $\alpha = 0{,}5\ \text{cm}^{-1}$, wie er in Luft Kathodenstrahlen von etwa 0,5 Lichtgeschwindigkeit zukäme.[1])

1) Vgl. P. Lenard, a. a. O., Tafel III. Für andere Werte von α wären nur die zu den Angaben der Tabelle gehörigen L-Werte im umgekehrten Verhältnis der α abzuändern.

Tabelle 1.

$\alpha = 0{,}5\ \mathrm{cm}^{-1}$ $\alpha R = 5$

L cm	1	2	4	10	20	50	100
Wirkungsausfall / Vollwirkung	0,55	0,39	0,23	0,11	0,052	0,021	0,010

Bei geringen Gasstrecken (verglichen mit R) macht sich der Wirkungsausfall sehr stark bemerkbar; mit zunehmendem Strahlweg tritt sein Einfluß mehr und mehr zurück und kann schließlich nahe vernachlässigt werden.

3. Wandstrahlung.

Wenn, wie wir annehmen, Eigenstrahlung des Wandmaterials nicht wesentlich ist, so handelt es sich nur noch um die vom hindurchtretenden Wellenstrahl ausgelöste lichtelektrische Kathodenstrahlung. Wir dürfen bei ihr voraussetzen, daß ihre Eigenschaften mit denjenigen der im Gas erregten Kathodenstrahlen völlig identisch sind. Wir setzen auch jetzt gleichförmige räumliche Verteilung der Elektronen rings um ihr Emissionszentrum voraus, berücksichtigen aber, daß für die Trägererzeugung im abgeschlossenen Gasraum bei der einen Wand die Austrittsstrahlung (die die Wand *in* Richtung der austretenden Wellenstrahlung verläßt), bei der anderen die Eintrittsstrahlung (die rückläufig ist) in Betracht kommt.[1])

Alle zur Berechnung erforderlichen auf die Wand bezüglichen Bestimmungsstücke seien mit den gleichen, zur Unterscheidung gestrichenen, Bezeichnungen wie für den Gasraum eingeführt. Es sei also für die Wände μ_0' der wahre Absorptionskoeffizient der Hochfrequenzstrahlung, α' der praktische Absorptionskoeffizient der Kathodenstrahlen und L' die Wanddicke.

a) *Austrittsstrahlung.* — Durchsetzt ein schmales Wellenstrahlenbündel die planparallele Wand in der Normalenrichtung, ist J_0 die eintretende Energie, so wird die gesamte unter dem Winkel φ gegen die Normale austretende Kathodenstrahlintensität

$$di_\varphi = \tfrac{1}{2} k' \cdot J_0 \, \frac{\mu_0'}{\alpha'} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left\{ e^{-\mu_0' L'} - e^{-\frac{\alpha' L'}{\cos\varphi}} \right\} \cdot d\varphi ,$$

1) Über weitere Voraussetzungen vgl. Strahlentherapie 12. 1921.

wo k' die Elektronenzahl angibt, welche der Einheit der verschwindenden Wellenenergie zukommt (Emissivitätskoeffizient). Die Ausstrahlung der Wand erfolgt also bei nicht zu geringen Dicken (falls die zweite Exponentialgröße praktisch verschwindet) nach dem Kosinusgesetz.

Für die Gesamtintensität der Austrittsstrahlung findet sich nach Integration der Wert

$$i_a = \tfrac{1}{4} k' J_0 \frac{\mu_0'}{\alpha'} \cdot \{e^{-\mu_0' L'} + (\alpha' L' - 1) \cdot e^{-\alpha' L'} + \alpha'^2 \cdot L'^2 \cdot \mathfrak{Ei}(-\alpha' L')\}.$$

Derselbe wächst mit der Dicke von Null an bis zu einem Maximum und fällt dann mit der Energie der Wellenstrahlung ab. Dies tritt ein, sobald die Dicke L' den Radius des Wirkungsbereiches der Elektronen in der Wand erreicht oder überschreitet.

b) *Eintrittsstrahlung.* — Die räumliche Dichte der die Wand unter dem Winkel φ rückläufig verlassenden Elektronen ist

$$\frac{1}{4\pi} k' J_0 \frac{\mu_0' \cos\varphi}{\alpha'} \left\{1 - e^{-L'\left(\mu_0' + \frac{\alpha'}{\cos\varphi}\right)}\right\};$$

es liegt also auch hier naturgemäß das Kosinusgesetz vor. Die Gesamtzahl aller rückläufig aus der Wand austretenden Elektronen wird danach

$$i_e = \tfrac{1}{4} k' J_0 \frac{\mu_0'}{\alpha'} \{1 + e^{-\mu_0' L'} \cdot [(\alpha' L' - 1) \cdot e^{-\alpha' L'} + \alpha'^2 L'^2 \cdot \mathfrak{Ei}(-\alpha' L')]\}.$$

Für kleinere Dicken, bei denen $e^{-\mu_0' L'}$ noch nicht merklich von der Einheit verschieden ist, sind i_e und i_a praktisch identisch. Ein Unterschied macht sich erst bei größeren Dicken bemerkbar, indem i_e einem konstanten Wert zustrebt, während i_a, wie oben erwähnt, abnimmt.

4. Wirkungsbeitrag der Wandstrahlung.

Da wir von großen Wanddicken an der Durchgangsstelle des Wellenstrahls der Vermeidung merklicher Diffusion wegen absehen, darf der geringfügige Unterschied des analytischen Ausdrucks für die Ein- und Austrittsstrahlung mit völlig ausreichender Annäherung an die Wirklichkeit unberücksichtigt bleiben und zwar um so mehr, als in unserem Fall die für die

Erregung dieser beiden Strahlungen maßgebenden Wellenstrahlenergien sich nur um den auf der Gasstrecke absorbierten als geringfügig anzusehenden Betrag unterscheiden.

Die Wandstrahlung erzeugt hiernach innerhalb eines Sektors mit dem Radius R und dem halben Öffnungswinkel φ die Trägerzahl

$$\tfrac{1}{4} k' J_0 T_0 \frac{\mu_0'}{\alpha' a} \Big\{ e^{-\mu_0' L'} \cdot \sin^2 \varphi + e^{-\frac{\alpha' L'}{\cos \varphi}} \cdot \cos \varphi (\cos \varphi - \alpha' L') + e^{-\alpha' L'} \cdot (\alpha' L' - 1) + \alpha'^2 L'^2 \cdot \Big[\mathfrak{Ei}(-\alpha' L') - \mathfrak{Ei}\Big(-\frac{\alpha' L'}{\cos \varphi}\Big) \Big] \Big\}.$$

Hinsichtlich der Ausnutzung der Wandstrahlung im Gas sind nun 2 Fälle zu unterscheiden:

a) $L \geqq R$. Die Ausnutzung der Strahlung beider Wände ist eine (einseitig) vollständige. Die erzeugte Trägerzahl wird nach Vorstehendem (für beide Wände zusammen)

$$\tfrac{1}{4} k' J_0 T_0 \frac{\mu_0'}{\alpha' \cdot a} \{ e^{-\mu_0' L'} + e^{-\alpha' L'} \cdot (\alpha' L' - 1) + \alpha'^2 L'^2 \cdot \mathfrak{Ei}(-\alpha' L') \};$$

mit wachsender Wanddicke L' nimmt der Einfluß der beiden letzten Summanden rasch ab und verschwindet schließlich.

b) $L < R$. Jetzt unterliegt auch die Wandstrahlung dem Wirkungsausfall. Die erzeugte Trägerzahl setzt sich aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine der Beitrag eines Kegels von der Höhe $R \cdot \cos \varphi$ ist, der andere der Beitrag eines den zugehörigen Sektor zur Halbkugel ergänzenden Sektorringes mit dem halben Winkelbereich φ bis $\pi/2$.

Der *relative Wirkungsausfall*, d. i. der Wirkungsausfall bezogen auf die maximal mögliche Wandstrahlenwirkung (Fall a), ergibt sich demnach zu

$$\frac{e^{-\alpha L} \cdot (1 - \alpha L) + e^{-(\alpha L + \alpha' L')} \cdot (\alpha L + \alpha' L' - 1) - \alpha^3 L^3 \mathfrak{Ei}(-\alpha L) + e^{\mu_0' L'} \cdot (\alpha L + \alpha' L')^3 \cdot \mathfrak{Ei}(-\alpha L - \alpha' L')}{1 + e^{-\alpha' L'} \cdot (\alpha' L' - 1) + \alpha'^2 L'^2 \cdot e^{\mu_0' L'} \cdot \mathfrak{Ei}(-\alpha' L')}.$$

Derselbe ist, wie erforderlich, für $L = 0$ gleich 1 und nähert sich mit wachsendem L der Null. Mit zunehmender Wanddicke erfolgt Annäherung an den von weiterer Dickensteigerung unabhängigen Wert

$$e^{-\alpha L} \cdot (1 - \alpha L) - \alpha^3 L^3 \cdot \mathfrak{Ei}(-\alpha L).$$

Der hierdurch gegebene Gang mit dem Wandabstand L ist für den früher (Tab. 1) betrachteten Fall der folgende:

Tabelle 2.

$\alpha = 0{,}5\ \mathrm{cm}^{-1}$ — Große Wanddicke

L cm	0,5	1	2	4	10
Wandwirkungsausfall / Vollwirkung	0,65	0,44	0,22	0,06	0,0007

5. Gas- und Wandstrahlung.

Zur Beurteilung der in unserem Gasraum beobachtbaren Gesamtträgererzeugung bedarf es jetzt noch eines Vergleichs der *Absolutwerte der Trägerzahl*, welche den beiden verschiedenen Elektronenquellen, dem Gas und den Wänden, zugehören.

Im Gas hat die Anzahl der an der Stelle x *auf der Längeneinheit* emittierten Elektronen den Wert

$$\frac{d\,i_x}{dx} = k\,\mu_0 \cdot J_0 \cdot e^{-\mu_0 x},$$

worin die Exponentialgröße im allgemeinen praktisch $= 1$ gesetzt werden kann. Diesem entspricht bei voller Ausnutzung aller Elektronen im Gas eine Trägerzahl

$$\frac{T_0}{\alpha} \cdot k \cdot \mu_0 \cdot J_0 \quad \text{nach (A 1)}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$G = \alpha L - 1 + e^{-\alpha L} + \frac{\alpha^2 L^2}{2}\,\mathfrak{Ei}(-\alpha R) - \frac{\alpha^2 R^2}{n^2}\left\{\mathfrak{Ei}\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) + \ldots + \frac{L}{R}\,n\,\mathfrak{Ei}(-\alpha L)\right\}_{n\ \text{groß}}$$

für $L < R$

$$\text{bzw.} = \alpha L - 1 + \frac{\alpha^2 R^2}{2}\,\mathfrak{Ei}(-\alpha R) - \frac{\alpha^2 R^2}{n^2}\left\{\mathfrak{Ei}\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) + \ldots + n\,\mathfrak{Ei}(-\alpha R)\right\}_{n\ \text{groß}}$$

für $L \gtrsim \frac{R}{2R}$,

$$W = 1 + e^{-\alpha L} \cdot (\alpha L - 1) + \alpha^2 L^2 \cdot \mathfrak{Ei}(-\alpha L),$$

so ist bei einem Wandabstand von L cm und ausreichender Wanddicke[1]) *die von der Gasstrahlung erzeugte Trägerzahl*

$$\Sigma_G = \frac{T_0}{a^3}\, k\mu_0 \cdot J_0 \cdot G,$$

die von der Wandstrahlung erzeugte Trägerzahl

$$\Sigma_W = \frac{T_0}{2a\,a'} \cdot k' \cdot \mu_0' \cdot J_0 \cdot W,$$

das Ausnutzungsverhältnis der im Gas erzeugten Elektronen

$$\frac{G}{aL}.$$

Setzen wir schließlich $a' = \text{prop. } a$, was jedenfalls mit großer Annäherung für alle in Betracht kommenden a zulässig sein wird, und führen wir noch die von L unabhängige Konstante

$$A = 2 \cdot \text{prop.}\, \frac{k\mu_0}{k'\mu_0'}$$

ein, so wird *der Absolutwert der Gesamtträgerzahl*

$$\Sigma = \Sigma_G + \Sigma_W = \frac{T_0}{a^3}\, k\mu_0 \cdot J_0 \cdot \left(G + \frac{W}{A}\right)$$

und *das Verhältnis der Trägerzahlen von Wand und Gasstrahlung*

$$\frac{W}{AG}.$$

Einen Einblick in die vorliegenden Verhältnisse möge die folgende Tabelle geben, die eine Ergänzung des früher betrachteten Beispiels ($a = 0{,}5\ \text{cm}^{-1}$) darstellt. Sie enthält für verschiedene Wandabstände L (bzw. verschiedene Werte von aL allgemein) zunächst die entsprechenden Werte von G und W und dann den Gang der Gesamtträgerzahl Σ (der Faktor $\frac{T_0}{a^3}\, k\mu_0 \cdot J_0 = 1$ gesetzt) für die beiden Werte $A = 1$ und $A = 2$, letzterer geringerem, ersterer größerem Wandeinfluß entsprechend.

Die auf die Längeneinheit bezogene Trägerzahl Σ/L zeigt im Falle $A = 1$ einen erheblichen Gang nach abnehmenden Werten, während ein solcher im Falle $A = 2$ nahezu völlig beseitigt ist. Für größere Werte von A, noch geringerer Wandstrahlung entsprechend, würde Σ/L mit zunehmendem L an-

1) Für welche $e^{-a'L'}$ praktisch Null ist.

steigen. In jedem Fall erfolgt Annäherung von Σ/L mit wachsendem L an den der Vollwirkung der Gasstrahlung entsprechenden Wert.

Tabelle 3.

$a = 0{,}5\ \mathrm{cm}^{-1}$. Große Wanddicke

L cm		1	2	3	5	10	20
G		0,232	0,617	1,060	2,013	4,483	9,477
W		0,557	0,781	0,886	0,967	1,000	1,000
$A = 1$	Σ	0,789	1,398	1,946	2,980	5,483	10,477
	Σ/L	0,789	0,699	0,649	0,596	0,548	0,524
$A = 2$	Σ	0,511	1,007	1,503	2,497	4,983	9,977
	Σ/L	0,511	0,503	0,501	0,499	0,498	0,499

6. Kompensation des Wirkungsausfalls durch den Wandwirkungsbeitrag.

Wenn bei dem Wandabstand L der Wirkungsausfall der Gasstrahlung durch den Wirkungsbeitrag der Wandstrahlung kompensiert werden soll, so muß

$$a L - G = \frac{W}{A}$$

sein[1]), so daß (nach 5)

$$\Sigma = \frac{T_0}{a} \cdot k \mu_0 \cdot J_0 \cdot L,$$

die Gesamtträgerzahl also einfach der Länge L proportional wird. Man erkennt, daß eine solche Kompensation, wenn sie für einen bestimmten Wert von L erreicht ist, gleichzeitig bei allen L-Werten bestehen bleibt.

Die Herstellung dieser Kompensation durch geeignetes Wandmaterial hat also den besonderen Wert, daß der Meßraum als nicht von Wänden begrenzt und daß das Meßergebnis daher als reine Gaswirkung angesehen werden kann,

Die Ermittelung der für die Kompensation maßgebenden Größe A ergibt für sie mit großer Annäherung den Wert $A = 2$ (vgl. hiermit Tab. 3).

Es ist noch von Interesse, mit diesem Wert das Verhältnis der Trägerzahlen von Wand- und Gasstrahlung W/AG (vgl. 5) für verschiedene Werte von aL zu berechnen. Das Ergebnis zeigt Tab. 4.

1) Wir betrachten hier vorzugsweise den Fall großer Wanddicke.

Tabelle 4.

Vergleich von Wand- und Gaswirkung im Kompensationsfall.

aL	W/AG	aL	W/AG
0,5	1,155	4	0,146
1	0,621	5	0,115
2	0,306	10	0,055
3	0,198		

W/AG ist aL nahe umgekehrt proportional. Dies Ergebnis würde auch für jeden beliebigen A-Wert Geltung behalten.

7. Einfluß der Elektronengeschwindigkeit.

Für die Größe der Elektronengeschwindigkeit sind außer den Absorptionskoeffizienten a und a' die Konstanten T_0, k und k' charakteristisch. Da die Ausdrücke für G und W nur Funktionen der Produkte aL, $a'L'$ bzw. aR sind, so sind sie auf beliebige Elektronengeschwindigkeiten anwendbar, sofern nur den durch sie festgelegten verschiedenen a-Werten entsprechend veränderte L- oder R-Werte zugeordnet werden. Besonders wichtig ist die folgende Feststellung:

Da im Falle der oben betrachteten Kompensation die Größe A für alle Werte von aL (sehr nahe) den gleichen Wert behält, so bleibt die etwa für eine bestimmte Elektronengeschwindigkeit hergestellte Kompensation für jede beliebige andere Geschwindigkeit unverändert erhalten, sofern nur die Größe A selbst durch diese unbeeinflußt bleibt.

Dies ist für das Experiment insofern bedeutungsvoll, als beim lichtelektrischen Effekt auch bei Verwendung homogener Wellenstrahlung niemals eine einheitliche Elektronengeschwindigkeit, sondern immer eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung[1]) auftritt. Es ist also auch in diesem Falle unter der erwähnten Bedingung eine Kompensation gleichzeitig für alle Elektronen erreichbar und damit die beobachtbare Trägerbildung als reine Vollwirkung im Gas aufzufassen.

Da das Verhältnis, in dem die Wand- und die Gasstrahlung an der beobachtbaren Trägerbildung beteiligt sind, wie wir zeigten, von aL abhängt, so muß es bei festgehaltenem L

1) Vgl. C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 45. S. 1121. 1914; A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393. 1919.

mit der Elektronengeschwindigkeit nach Maßgabe ihres Absorptionskoeffizienten a und daher auch mit der Wellenlänge der Hochfrequenzstrahlung sich ändern. Da a der zugehörigen Wirkungsweite R umgekehrt proportional ist, so folgt (aus 6) bei konstantem A sehr nahe Proportionalität dieses Verhältnisses mit der Wirkungsweite der Elektronen, wie der eine von uns[1]) bereits vermutet und durch entsprechende Versuche es belegt hat.

8. Geschwindigkeitsverlust der Elektronen.

Die vorstehenden Entwicklungen beruhen auf der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen beim Durchgang durch die Materie konstant sei. Tatsächlich erfolgt aber ein Geschwindigkeitsverlust, wodurch einerseits die Absorption, andererseits die Trägererzeugung jedes einzelnen Elektrons eine Änderung erfahren.[2]) Die bisherigen Betrachtungen sind daher nur als Annäherungen an die Wirklichkeit aufzufassen, und es bedarf einer besonderen Untersuchung des Grades dieser Annäherung. Diese muß sich beim Stand unserer gegenwärtigen Kenntnis auf eine Überschlagsbetrachtung beschränken.

Infolge des Geschwindigkeitsverlustes erfolgt die Abnahme der Kathodenstrahlintensität (Elektronenzahl) mit dem Abstand von der Erzeugungsstelle rascher, als wir oben angesetzt haben, indem an die Stelle der Exponentialfunktion mit konstantem Absorptionskoeffizienten eine solche mit wachsendem Koeffizienten tritt. Da aber gleichzeitig mit abnehmender Geschwindigkeit die Sekundärstrahlerregung im Gas zunimmt, so vermögen beide Erscheinungen zusammen ihren Einzeleinfluß bis zu einem gewissen Grade zu kompensieren und damit den Einfluß des Geschwindigkeitsverlustes auf die nachweisbare Trägererzeugung sowohl der Gas- als der Wandstrahlung wesentlich zu verringern.

Verfolgt man die Verhältnisse quantitativ[3]), so zeigt sich, daß die Veränderungen, die das Ergebnis unseres Annäherungs-

---

1) H. Holthusen, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstr. 26. S. 223. 1919; die hierin die „Wandstrahlung" betreffenden Aussagen beziehen sich naturgemäß auf die *Wandstrahlenwirkung* im Meßraum.

2) Vgl. P. Lenard, Quantitatives ... Spezieller Teil III und V.

3) Vgl. A. Becker u. H. Holthusen, Strahlentherapie 12. 1921.

verfahrens durch eine strengere Rechnung erleiden würde, tatsächlich als geringfügig zu bezeichnen sind und dies um so mehr, wenn man dem Geschwindigkeitsverlust etwa dadurch in einfachster Weise genügend Rechnung trägt, daß man den Absorptionskoeffizient der Kathodenstrahlung mit einem etwas erhöhten bzw. den Radius des Wirkungsbereiches mit einem entsprechend verringerten Betrag einsetzt.

9. Elektronenrückdiffusion und Sekundärstrahlerregung an den Wänden.

Wir haben bisher angenommen, daß alle die Wände treffenden Kathodenstrahlen für die Trägererzeugung nicht mehr in Betracht kommen. Das trifft aus zwei Gründen nicht streng zu. Erstens wird ein bestimmter Bruchteil der auftreffenden Strahlen in den Gasraum mit verringerter Geschwindigkeit rückdiffundiert[1]), und zweitens werden sekundäre Kathodenstrahlen mit relativ erheblich viel kleinerer Geschwindigkeit an den Wänden neu erzeugt.[2]) Beide Erscheinungen wirken in dem Sinne einer vermehrten Wandstrahlung. Sie können daher in gewissem Grade die durch Geschwindigkeitsverlust verursachte gesteigerte Absorption der Wandstrahlung, soweit sie durch vermehrte Sekundärstrahlung im Gas nicht völlig ausgeglichen wird, noch kompensieren. Die Sekundärstrahlung der Wände wird hierbei meist, soweit ihre Geschwindigkeit in der Nähe der 11 Voltgrenze bleibt, für die Trägerbildung nicht erheblich sein. Wie weit dann die Rückdiffusion sich noch in einer Überkompensation der obengenannten Einflüsse geltend machen könnte, ist durch den Versuch zu entscheiden; wir kommen hierauf im Nachfolgenden zurück.

B. Experimentelles.

Die mitzuteilenden Versuche sollen zunächst den älteren Beweisen für die indirekte Trägerbildung der Hochfrequenzstrahlen einen weiteren hinzufügen und dann die Ergebnisse der vorstehenden theoretischen Betrachtungen näherer Prüfung unterwerfen.

Die benutzte Versuchsanordnung ist im wesentlichen die früher beschriebene. Zur Verwendung kommt ein durch scharfe

1) Vgl. P. Lenard, a. a. O. S. 194f.
2) Vgl. P. Lenard, a. a. O. S. 133f.

Ausblendung erhaltenes schmales Bündel der durch Vorfilterung angenähert homogen[1]) gemachten Hochfrequenzstrahlung einer Glühkathodenröhre.

10. Nachweis der Erzeugung rascher lichtelektrischer Kathodenstrahlung in Luft.

Während der eine von uns diesen Nachweis früher indirekt durch die Beobachtung erbrachte, daß die Trägererzeugung in einem Zylinderkondensator durch stark durchdringende paraxiale Wellenstrahlung mit dem Durchmesser des Kondensators wächst, fügen wir jetzt einen direkten Nachweis der Kathodenstrahlerzeugung hinzu.

Wir benutzten einen Zylinderkondensator aus 0,5 mm dickem Aluminiumblech von 8 cm Durchmesser und 12 cm Länge, welcher in der Zylinderwand ein achsenparalleles rechteckiges Fenster von 10 cm Länge und 1 cm Breite trug. Diesem parallel lief in 2,2 cm Abstand außerhalb des Kondensators ein Wellenstrahlbündel von rechteckigem Querschnitt. Wurde das Fenster mit einem 0,3 mm dicken Aluminiumblech verschlossen, so konnte die vorhandene Luftleitfähigkeit im Kondensator nur durch gestreute Wellenstrahlung hervorgerufen sein. Diese war stets vorhanden und machte sich um so stärker bemerkbar, je härter die Strahlung war.

Eine Zunahme der Leitfähigkeit nach Vertauschung des dicken Fensters durch eine Aluminiumfolie von 0,008 mm Dicke könnte entweder durch eine stark absorbierbare Wellenstrahlung oder durch lichtelektrisch erzeugte Kathodenstrahlen hervorgerufen sein. Da die erstere in den Versuchen nicht in Betracht kommen konnte, trifft nur das letztere zu.

Bei einer mit 0,25 mm Kupfer gefilterten Strahlung der mittleren Wellenlänge 0,28 A. E. ergab die Entladung eines mit dem Meßkondensator verbundenen Elektrometers die folgenden Werte:

mit 0,3 mm Aluminiumfenster	mit 0,008 mm Aluminiumfenster
4,5	7,7
5,6	7,2
6,1	7,9
4,1	7,9
Mittel 5,1 Sk/Min.	Mittel 7,7 Sk/Min.

Zunahme 2,6 Sk/Min.

1) Zu schließen aus Absorptionsbeobachtungen.

Dieser Gang ist bei Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Verhältnisse des Versuchs mit dem zu erwartenden Wert in befriedigender Übereinstimmung.

11. Wand- und Gaswirkung.

Nach unserer mitgeteilten Theorie (A 5) ist das Verhältnis der Anzahl der von der Wand- und der Gasstrahlung erzeugten Träger bei festgehaltenem aL und ausreichender Wanddicke der Größe A umgekehrt proportional. Da diese wiederum bei Variation des Wandmaterials — falls der Emissivitätskoeffizient k vom Material unabhängig ist, was wir versuchsweise annehmen — dem jeweiligen Massenabsorptionskoeffizienten für die Wellenstrahlung umgekehrt proportional gesetzt werden kann, so läuft das Wirkungsverhältnis von Wand- und Luftstrahlung bei variiertem Wandmaterial einfach der Massenabsorption des letzteren parallel.

Die folgende Tabelle enthält in ihrer zweiten Kolonne zunächst die für einige Stoffe mit Hilfe der Glockerschen Absorptionsformel[1]) berechneten relativen Massenabsorptionswerte. Benutzen wir nun das Ergebnis einer früheren Messung des einen von uns[2]), nach dem die Wandstrahlenwirkung von Aluminium 0,71 der Wirkung der Luftstrahlung auf der Länge des Wirkungsbereiches $R = 10\,\text{cm}$ betrug, so kann dieses Wirkungsverhältnis für alle angegebenen Stoffe absolut berechnet werden. Das Resultat zeigt Kolonne 3.

Tabelle 5.

Wandsubstanz	Relative Massenabsorption für Wellenstrahlung	Wirkungsverhältnis von Wand- u. Luftstrahlung innerhalb d. Wirkungsbereichs
Aluminium . .	516	0,71
Papier	100	0,14
Kohle	65	0,09
Paraffin . . .	56	0,08

Die Wandwirkung nimmt danach beim Übergang von Aluminium zu Paraffin sehr erheblich ab. Wie weit hiermit

1) Nach freundlicher brieflicher Mitteilung von Hrn. Glocker an den einen von uns (H.) ist μ_0'/D prop. $\frac{Z^{3,12}}{A}$, wo Z die Ordnungszahl und A das Atomgewicht des betreffenden Elementes ist.

2) H. Holthusen, a. a. O. S. 223 u. Tab. 4.

ein richtiges Bild der tatsächlichen Verhältnisse gewonnen ist, vermag die Untersuchung der Abhängigkeit der Trägererzeugung von der Länge der Maßkammer bei variierter Wandsubstanz, insbesondere die Festlegung der Bedingungen für die unter A 6 betrachtete Wirkungskompensation zu entscheiden.

Nach unserer Theorie findet diese Kompensation nämlich dann statt, wenn das Wirkungsverhältnis von Wand- und Luftstrahlung innerhalb des Wirkungsbereiches den Wert 0,115 annimmt (vgl. Tab. 4). Es wäre darnach, falls die Voraussetzungen unserer Betrachtung zuträfen, zu erwarten, daß der Versuch eine nahe Kompensation mit Papier- oder Kohlewänden angibt, während Aluminiumwände (ausreichender Dicke) deutliches Überwiegen der Wandstrahlung zeigen müßten.

12. Abhängigkeit der Trägerzahl von der Strahllänge bei variiertem Wandmaterial.

Als Meßkammer benutzten wir den bereits früher[1]) beschriebenen Zylinderkondensator mit axial hindurchtretendem Wellenbündel, dessen Länge durch einen einschiebbaren Deckel verändert werden konnte, während gleichzeitig die stabförmige Innenelektrode ausgewechselt wurde. Die Kammer befand sich in 1,5 m Entfernung von der Antikathode der Erzeugungsröhre, ihr Durchmesser betrug 20 cm, und die Länge wurde im allgemeinen zwischen 2,4 und 10 cm verändert. Variiert wurden außerdem in getrennten Versuchsreihen die vom Wellenstrahl durchsetzten Wände und die Strahlhärte. Ein relatives Maß für die erzeugte Trägerzahl Σ ist die jeweilige Angabe des mit der Innenelektrode verbundenen Elektrometers. Das Ergebnis der Beobachtungen enthält die umstehende Tab. 6.

Bei der weichsten Wellenstrahlung ist die auf die Längeneinheit des Strahlweges bezogene Trägerzahl in allen Fällen von L nahe unabhängig. Da hier die benutzten Wandabstände alle erheblich größer sind als der mittlere Radius des Wirkungsbereiches der auftretenden Kathodenstrahlen, so ist dies Ergebnis auch nach unserer Theorie (vgl. A. 5 und besonders Tab. 8) zu erwarten.

---

1) H. Holthusen, a. a. O.

Tabelle 6.

Wände: Alumin. 0,1 mm dick			Papier[1]) 1 mm dick			Paraffin[1]) 2 mm dick		
Länge L cm	Rel. Trägerzahl[2]) Σ	Σ/L	L cm	Σ	Σ/L	L cm	Σ	Σ/L
1. Strahlfilter 0,5 mm Aluminium, mittlere Wellenlänge 0,74 Å.E., mittlere Wirkungsweite in Luft $R = 0{,}83$ cm.								
2,7	3,42	1,13	2,4	2,70	1,13	2,8	3,63	1,30
4,3	5,50	1,27	8,8	9,83	1,12	8,8	11,10	1,27
10,1	12,31	1,21						
2. Strahlfilter 0,4 mm Kupfer, $\lambda_{Mittel} = 0{,}3$ Å.E., $R_{Mittel} = 3{,}5$ cm.								
2,7	1,75	0,65	2,4	0,98	0,40	2,8	1,34	0,48
4,3	2,71	0,63	8,8	3,35	0,38	8,8	4,21	0,48
10,1	4,44	0,44						
3. Strahlfilter 1 mm Kupfer, $\lambda_{Mittel} = 0{,}21$ Å.E., $R_{Mittel} = 9{,}7$ cm.								
2,7	2,12	0,78	2,4	1,18	0,49	2,8	1,59	0,57
4,3	3,14	0,73	8,8	3,87	0,44	8,8	4,90	0,56
10,1	5,22	0,52						

Bei den härteren Wellenstrahlen nimmt Σ/L für Aluminiumwände mit wachsendem L erheblich ab, wie es auch die Theorie für den Fall beträchtlicher Wandstrahlung fordert. Daß diese Abnahme allerdings anfänglich relativ wenig und dann stärker in die Erscheinung tritt, könnte vielleicht im Sinne eines späteren Zurücktretens einer anfänglich relativ wirksameren Rückdiffusion gedeutet werden.

Bei Papier tritt der Gang von Σ/L sehr stark zurück, und bei Paraffin ist er vollständig beseitigt. Hier zeigt sich also die Kompensation zwischen Wandwirkungsbeitrag und Gaswirkungsausfall und zwar ist diese, wie der Versuch zeigt, von der Härte der Wellenstrahlung, d. h. auch von der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlung, unabhängig, wie dies

1) Papier und Paraffin wurden zur Beseitigung ihrer Oberflächenisolation, die die Trägermessung hätte fälschen können, mit einer dünnen, als Strahlenquelle selbst kaum in Betracht kommenden Graphitschicht bedeckt.

2) Die hierunter mitgeteilten Zahlenwerte sind nur innerhalb jeder zusammenhängenden Versuchsreihe miteinander vergleichbar, da die äußeren Bedingungen der verschiedenen Versuchsreihen nicht immer konstant gehalten waren.

auch die Theorie anzeigte für den Fall, daß die Größe A von der Strahlgeschwindigkeit unabhängig bleibt.

Daß die Kompensation bei Paraffin auftritt, ist ebenfalls in befriedigendem Einklang[1]) mit der Theorie, nach welcher sie auf Grund der Tab. 5 von einer bezüglich ihrer Massenabsorption zwischen Papier und Paraffin liegenden Substanz zu erwarten war.

Die experimentelle Prüfung der theoretischen Entwicklungen zeigt darnach, daß deren vereinfachende Voraussetzungen zweifellos zu Ergebnissen von weitgehender Annäherung an die Wirklichkeit führen. Von weitergeführten Versuchen dieser Art wird man eine weitere Auswertung der theoretischen Beziehungen[2]) und damit einen tieferen Einblick in das behandelte Erscheinungsgebiet erwarten dürfen. Abgesehen davon halten wir die Berücksichtigung der bis jetzt im Obigen erbrachten Kenntnis für eine einwandsfreie Auswertung jeder Leitfähigkeitsmessung in von Wellenstrahlung durchsetzten Gasräumen als unerläßlich.

Heidelberg, 18. September 1920.

---

1) Bei der geringen Homogenität dieser Stoffe ist eine exaktere Übereinstimmung zwischen theoretischer Voraussicht und Versuch überhaupt nicht zu erwarten.

2) Wichtig bleibt insbesondere die nähere Ermittelung der Materialkonstanten A.

(Eingegangen 9. Oktober 1920.)

5. *Zur kinetischen Theorie des osmotischen Druckes;*
von Karl F. Herzfeld.

Die kinetische Theorie des osmotischen Druckes ist schon oft behandelt worden, besonders die Arbeiten von Lorentz[1]) und Jäger[2]) haben die wichtigsten Punkte aufgeklärt. Doch ist die ganze Frage, wie ich glaube, noch komplizierter als es nach diesen Arbeiten scheinen möchte und daher eine eingehende Erörterung vielleicht nützlich. Die kinetische Theorie hat nämlich zwei Fragen zu beantworten:

1. Warum beträgt der osmotische Druck, d. h. der Über-, druck, der auf eine Lösung ausgeübt werden muß, damit sie durch eine halbdurchlässige Membran hindurch mit dem reinen Lösungsmittel im Gleichgewicht steht, $\pi = \frac{RT}{V}$?

Diese Frage ist von Jäger ausführlich beantwortet. Dagegen soll hier besonders die zweite Frage besprochen werden, welche lautet:

2. Welches ist der Mechanismus, der das Lösungsmittel in die Lösung treibt, wenn beide unter gleichem Drucke stehen?

§ 1. Der Druck in einer reinen Flüssigkeit.

Wir wollen zuerst im Anschluß an Jäger den thermischen Druck auf eine beliebige Fläche definieren; wir verstehen darunter jene Bewegungsgröße, welche von den Molekülen, die mit dieser Fläche zusammenstoßen, in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchgetragen wird. Ein Stoß eines Moleküles auf die Fläche tritt dann ein, wenn der Mittelpunkt

1) H. A. Lorentz, Arch. necrl. **25**. S. 107. 1892; Ges. Abh. Leipzig 1904. S. 175 ff.

2) G. Jäger, Zeitschr. f. phys. Chem. **93**. S. 257. 1919; Ann. d. Phys. **54**. S. 463. 1914; vgl. ferner O. Stern, Zeitschr. f. phys. Chem. **81**. S. 441. 1912.

des Moleküles eine um den Molekularhalbmesser von der gestoßenen Fläche abstehende Referenzfläche passiert. Wenn die Fläche keinerlei Kräfte auf die Moleküle ausübt, was wir vorderhand annehmen wollen, ist dieser thermische Druck die einzige Kraft, die die Fläche von der einen Seite her erfährt. Im Inneren der Flüssigkeit[1]) ist dieser thermische Druck überall gleich. Gegen die Oberfläche zu nimmt er ab. Infolge der van der Waalschen Kräfte ist ja die Flüssigkeit von einer Kapillarschicht umgeben, innerhalb deren die Dichte von dem Wert im Inneren zu dem Wert im Dampf abnimmt. Entsprechend nimmt auch der thermische Druck innerhalb der Kapillarschicht ab; wir wollen den thermischen Druck, der auf die Oberfläche ausgeübt wird, als thermischen Grenzdruck bezeichnen. Für die Art, wie sich der thermische Druck mit den Kräften, die auf die Flüssigkeit ausgeübt werden, ändert, gilt folgendes: Wir denken uns ein Volumelement dv von unendlich dünnen starren Wänden umschlossen. Dann seien die Kräfte in der x-Richtung auf die Flüssigkeit in diesem Volumelement $\varrho X dv$. Die Kraft, die der thermische Druck in der x-Richtung auf die Oberfläche des Elementes ausübt, ist

$$+\frac{\partial p}{\partial x} dv,$$

wie man ganz in der gleichen Weise sieht, in welcher die hydrodynamischen Grundgleichungen gewöhnlich abgeleitet werden.[2]) Es gilt also für den thermischen Druck

$$+\frac{\partial p}{\partial x} = X\varrho. \tag{1}$$

Diese Gleichung ist mit der gewöhnlichen hydrodynamischen Bewegungsgleichung identisch, nur bedeutet p hier den inneren thermischen Druck und nicht den hydrostatischen Druck. Es sei nun die van der Waalsche Kraft, durch welche eine unendlich große Schicht von der Dicke dr und der Dichte ϱ_1 ein

1) Wir bezeichnen im folgenden alle Größen, die sich auf das Lösungsmittel beziehen, mit dem Index 1, die sich auf den gelösten Stoff beziehen mit dem Index 2. Ein Strich bedeutet das reine Lösungsmittel, zwei Striche die Lösung, i das Innere, M die halbdurchlässige Membran, S den Stempel. Wenn wir ausdrücken wollen, daß die in einer Formel auftretende Dichte in der ganzen Flüssigkeit bis an die Oberfläche konstant ist, so wird die betreffende Größe überstrichen.

2) Vgl. z. B. W. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 15. Leipzig 1907.

Mol in der Entfernung, r nach innen zieht, $\varrho_1 f_{11}(r)$, dann ist die Gesamtkraft, durch welche ein Mol in der Entfernung R von der Oberfläche nach innen gezogen wird,

$$\int_{\infty}^{0} \varrho_1(r) f_{11}(r-R)\,dr.$$

Setzen wir dies in Gleichung (1) ein, so bekommen wir[1]) für die Änderung des thermischen Druckes in der Kapillarschicht

$$+\frac{\partial p}{\partial R} = \varrho_1(R) \int_{+\infty}^{0} \varrho_1(r) f_{11}(r-R)\,dr, \tag{2}$$

das gibt integriert folgende Gleichung für den thermischen Grenzdruck

$$p_s = p_i - \int_{\infty}^{0} dR\,\varrho_1(R) \int_{\infty}^{0} \varrho_1(r) f_{11}(r-R)\,dr = p_i - K_{11}. \tag{3}$$

Die Größe K_{11} wollen wir den Kohäsionsdruck nennen. Um sie ist der thermische Druck im Inneren größer als der thermische Grenzdruck (Fig. 1). Sie ist die Arbeit, welche das Herausschaffen der *Volumeinheit* aus dem Inneren der Flüssigkeit erfordert. Die äußere Kraft, die wir auf einen Stempel ausüben müssen, ist pro qcm = dem thermischen Grenzdruck. Drücken wir die Flüssigkeit zusammen, so ändert sich der thermische Druck sehr stark, dagegen der Kohäsionsdruck sehr wenig (proportional dem Quadrat der Dichte), also der thermische Grenzdruck sehr stark.

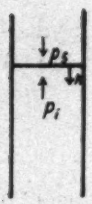


Fig. 1.

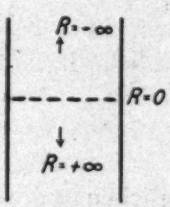


Fig. 2.

Übt die Wand irgendwelche Kräfte auf die Flüssigkeit aus, z. B. Anziehungskräfte, so nimmt dadurch der Kohäsionsdruck ab, die Dichte an der Wand und damit der thermische Grenzdruck zu, und zwar um die Abnahme des Kohäsionsdruckes. Gerade ebensoviel betragen aber die Kräfte, mit welchen jetzt die Flüssigkeitsmoleküle die Wand nach innen

1) In der Oberfläche der Flüssigkeit ist $R = 0$, $R = \infty$ liegt im Innern derselben (Fig. 2).

ziehen, so daß die äußere Kraft, welche auf die Wand ausgeübt werden muß, dadurch nicht geändert wird, wie es ja auch die Thermodynamik verlangt. Würden die Anziehungskräfte der Wand die gegenseitigen Anziehungskräfte der Flüssigkeitsmoleküle gerade aufheben, so bliebe die Dichte bis an die Wand konstant.[1]) K hat dann den Wert

$$\bar{K} = \int_{+\infty}^{0} \bar{\varrho}_1 \, dR \int_{+\infty}^{0} \bar{\varrho}_1 \, f_{11}(r - R) \, dr. \tag{4}$$

Ist die normale Dichte in einer freien Kapillarschicht, die von Ort zu Ort variiert, ϱ_1, so muß gelten[2])

$$\bar{K}_{11} = K_{11} = \int_{+\infty}^{0} \varrho_1(R) \, dR \int_{+\infty}^{\infty} dr \, \varrho_1(r) \, f_{11}(r - R). \tag{5}$$

§ 2. Der osmotische Druck in Lösungsmitteln, die keine Anziehung auf den gelösten Stoff ausüben.

Diesen Fall hat Jäger ausführlich behandelt, wir wollen ihn aber zur Überleitung auf das Folgende noch besprechen. Übt die Membran keinerlei Kräfte auf den gelösten Stoff aus (wirkt also einfach als Sieb), so bleibt die Dichte der gelösten Moleküle bis an sie heran konstant. Im Gleichgewicht müssen durch die Membran gleichviel Lösungsmittelmoleküle nach links wie nach rechts durchgehen, d. h. der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels an der Membran muß in der Lösung wie im reinen Lösungsmittel gleich sein. Die Kohäsionsdrucke des Lösungsmittels sind ebenfalls im reinen Lösungsmittel und in der Lösung fast gleich (ein kleiner Unterschied rührt von den verschiedenen Dichten in beiden Fällen her, siehe den nächsten Paragraphen), infolgedessen sind auch die thermischen

1) In diesem Fall ist der thermische Grenzdruck also gleich dem vollen inneren thermischen Druck, da ein Molekül kräftefrei an die Wand gebracht werden kann. Die Wand wird mit dem Kraft $\bar{K}$ pro cm² nach innen gezogen.

2) Bei einem Stempel ist die Oberfläche natürlich von selbst festgelegt. Eine freie Oberfläche, auf die ein fremdes Gas drückt, erfordert eine längere Überlegung, doch können wir hier gerade (5) als Definition für ihre Lage ansehen. Die Anziehungskräfte erstrecken sich über sie hinaus und bewirken die Abnahme des thermischen Druckes vom Wert des äußeren Druckes p auf den Dampfdruck.

Drucke im Inneren von Lösungsmittel und Lösung gleich (Fig. 1). Wie groß sind nun die Kräfte an den beiderseitigen Stempeln, wenn Gleichgewicht herrschen soll? Es möge auch der Stempel keine Kräfte auf den gelösten Stoff ausüben, dann erfährt der Stempel im reinen Lösungsmittel einen thermischen Grenzdruck von Seiten desselben gleich dem inneren thermischen Druck weniger dem Kohäsionsdruck. $p_{1s}' = p_{1i}' - K_{11}'$ auf der Lösungsseite erfährt der Stempel einen thermischen Grenzdruck von Seite des Lösungsmittels, der gleich dem eben besprochenen ist, da innerer thermischer Druck und Kohäsionsdruck in Lösung und reinem Lösungsmittel gleich sind. Hierzu kommt noch der thermische Grenzdruck des gelösten Stoffes, der, wie Jäger für diesen Fall nachgewiesen hat, gleich RT/V ist. Die Gesamtkraft auf diesen Stempel ist also

$$p_{1s}' + \frac{RT}{V}.$$

Der Druck, der auf den rechten Stempel mehr als auf den linken ausgeübt werden muß, der osmotische Druck, ist also hier $\frac{RT}{V}$ = dem thermischen Grenzdruck des gelösten Stoffes. Würde der Stempel auf den gelösten Stoff Kräfte ausüben, so würden die Betrachtungen vom Schluß des vorherigen Paragraphen anzuwenden sein, es würde die Dichte und der thermische Grenzdruck des gelösten Stoffes steigen, um ebensoviel aber würde der Stempel nach innen gezogen. Auch auf die Membran wird als einseitiger Druck der osmotische Druck ausgeübt, unabhängig von etwaigen Kräften zwischen Membran und gelöstem Stoff.

Denken wir uns nun die Membran abgesperrt und entlasten den Stempel um den osmotischen Druck, so daß der Druck gleich dem normalen äußeren Druck p wird, so dehnt sich die Flüssigkeit ein wenig aus, wobei der osmotische Druck und der Kohäsionsdruck kaum merklich geändert werden, während der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels stark abnimmt und zwar solange, bis er gleich dem äußeren Druck weniger dem osmotischen Druck wird. Der Grund, warum der osmotische Druck sich in einer freistehenden Lösung nicht an den Gefäßwänden merkbar macht, liegt also darin, daß eine solche gegenüber dem Gleichgewichtszustand mit dem reinen Lösungsmittel (nicht aber im Vergleich mit dem Lösungsmittel

selbst) gedehnt ist.[1]) Würden wir jetzt die Sperrung der Membran wieder aufheben, so wäre an ihr der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels kleiner, das reine Lösungsmittel würde also eindringen. *Die Ursache dieses Eindringens ist, daß der osmotische Druck auf den Stempel die Lösung gedehnt hat.*

§ 3. Das Lösungsmittel übt auf den gelösten Stoff Anziehungskräfte aus. (Fig. 3.)

In dem eben besprochenen Fall fehlender Kräfte zwischen Lösungsmittel und gelöstem Stoff wäre der Dampfdruck des letzteren über der Lösung gleich dem osmotischen Druck. Da

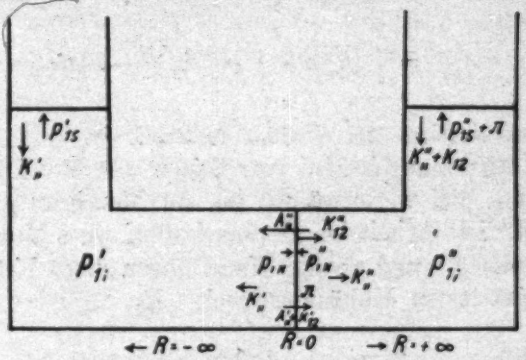


Fig. 3.

er im allgemeinen sehr viel kleiner ist, müssen starke Anziehungskräfte zwischen beiden angenommen werden.[2]) Wir betrachten wieder das Gleichgewicht zwischen Lösung und reinem Lösungsmittel an einer unendlich dünnen, kräftefreien Membran. Es befinde sich etwa die Lösung rechts. Bis an die Membran heran sind dann die gelösten Teilchen gleichmäßig verteilt. (Genau genommen ist dies nicht ganz richtig, weil die Dichte des Lösungsmittels links und rechts von der Membran und daher auch die Anziehungskräfte desselben etwas verschieden sind, aber dieser Unterschied ist der Konzentration des gelösten Stoffes proportional, seine Wirkung auf diesen also dem Quadrat dieser Konzentration, solche Glieder vernachlässigen wir aber konsequent.) Auf ein Mol des Lösungsmittels an der Lösungsseite der Membran werden nun folgende Kräfte ausgeübt:

1) Vgl. G. A. Hulett, Zeitschr. f. phys. Chem. **42**. S. 353. 1902.
2) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. **48**. S. 369. 1915.

1. Die Anziehung des Lösungsmittels in der Lösung, sie ergibt den Kohäsionsdruck des Lösungsmittels K_{11}''

$$K_{11}'' = \int_{\infty}^{0} \overline{\varrho_1''}\, dR \int_{\infty}^{0} \overline{\varrho_1''}\, f_{11}(r-R)\, dr. \tag{6}$$

Hier ist die Integration nur bis zur Membran zu erstrecken, da auf der anderen Seite ja schon das reine Lösungsmittel beginnt, dafür ist die Dichte bis an die Wand konstant, daher hat das Integral nach (5) den Wert K_{11}''.

2. Die Kräfte, die vom reinen Lösungsmittel auf der anderen Seite der Membran ausgeübt werden, und das Integral

$$A_{11}'' = \int_{+\infty}^{0} \overline{\varrho_1''}\, dR \int_{-\infty}^{0} \overline{\varrho_1'}\, f_{11}(r-R)\, dr \tag{7}$$

ergeben, um welches der Kohäsionsdruck zu vermindern ist.

3. Die Anziehungskräfte von Seiten der Moleküle des gelösten Stoffes, die, wie erwähnt, bis zur Membran gleichmäßig verteilt sind. Die Arbeit bei Heranschaffen eines Mols Lösungsmittels aus der Lösung an die Wand gegen diese Kräfte ergibt einen „gegenseitigen Kohäsionsdruck" K_{12}

$$K_{12} = \int_{+\infty}^{0} \overline{\varrho_1''}\, dR \int_{+\infty}^{0} \overline{\varrho_2}\, f_{12}(r-R)\, dr. \tag{8}$$

Die Integration ist nur bis $R = 0$, d. h. bis an die Wand aus den gleichen Gründen wie bei Punkt 1 zu erstrecken. Für den thermischen Grenzdruck an der Membran ergibt sich daher die Beziehung

$$p_{1M}'' = p_{1i}'' - (K_{11}'' - A_{11}'' + K_{12}''). \tag{9}$$

Er unterscheidet sich also vom inneren thermischen Druck um eine Größe gleich dem Kohäsionsdruck des Lösungsmittels in der Lösung + dem gegenseitigen Kohäsionsdruck weniger der Anziehung des reinen Lösungsmittels auf der anderen Seite.

Entsprechend wirkt auf der linken Seite der Membran auf ein Mol Wasser

1. der Kohäsionsdruck des reinen Lösungsmittels

$$K_{11}' = \int_{-\infty}^{0} \overline{\varrho_1'}\, dR \int_{-\infty}^{0} \overline{\varrho_1'}\, f_{11}(r-R)\, dr. \tag{6'}$$

2. Die Kräfte, die vom Lösungsmittel auf der rechten Seite der Membran auf das reine Lösungsmittel links ausgeübt werden. Sie ergeben das Integral

$$(7') \qquad A_{11}' = \int_{-\infty}^{0} \overline{\varrho_1'}\, dR \int_{+\infty}^{0} \overline{\varrho_1''}\, f_{11}(r-R)\, dr .$$

Da aber die Dichten bis an die Membran heran konstant sind, können wir die Reihenfolge der Integrationen vertauschen und erhalten

$$A_{11}'' = A_{11}' ,$$

d. h. die Wirkung des Lösungsmittels rechts von der Membran auf das Lösungsmittel links von der Membran = der Wirkung des Lösungsmittels links von der Membran auf das rechts befindliche.

3. Die Anziehungskräfte der rechts von der Membran befindlichen Moleküle des gelösten Stoffes, welche eine Verminderung des Kohäsionsdruckes um

$$(8') \qquad K_{12}' = \int_{-\infty}^{0} \overline{\varrho_1'}\, dR \int_{+\infty}^{0} \overline{\varrho_2}\, f_{12}(r-R)\, dr$$

bewirken. Da, wie schon erwähnt, die Dichten des Lösungsmittels links und rechts sich nur um einen der Konzentration des gelösten Stoffes proportionalen Wert unterscheiden, in unserem Ausdruck aber die Konzentration selbst als Faktor steht, können wir in Formel (8') die Dichte des reinen Lösungsmittels durch die des Lösungsmittels in der Lösung ersetzen und erhalten dann $K_{12}' = K_{12}'' = K_{12}$.

Der thermische Grenzdruck des reinen Lösungsmittels an der Membran wird daher

$$(9') \qquad p_{1M}' = p_{11}' - (K_{11}' - A_{11}' - K_{12}) .$$

Damit Gleichgewicht herrscht, müssen die thermischen Grenzdrucke von reinem Lösungsmittel und Lösungsmittel in der Lösung gleich sein, es gilt also die Gleichung für die inneren thermischen Drucke

$$(10) \begin{cases} p_{11}' - (K_{11}' - A_{11}' - K_{12}) = p_{11}'' - (K_{11}'' - A_{11}' + K_{12}) \\ p_{11}'' = p_{11}' + 2K_{12} + (K_{11}'' - K_{11}') , \end{cases}$$

d. h. es stellt sich infolge der Anziehung zwischen gelöstem Stoff und Lösungsmittel im Inneren der Lösung ein erhöhter thermischer Druck

$$p_{1i}' + 2K_{12} + (K_{11}'' - K_{11}')$$

ein.

Auf den Stempel über dem reinen Lösungsmittel wird natürlich der äußere Druck $p = p_{1i}' - K_{11}'$ ausgeübt. Um den Druck auf den Stempel über der Lösung zu berechnen, werden wir zuerst einen etwas umständlichen, aber mathematisch strengen Weg einschlagen und dann unser Resultat anschaulich, aber unschärfer ausdrücken. Wir denken uns zuerst, es möge der Stempel solche Kräfte auf den gelösten Stoff ausüben, daß er die Anziehungskräfte des Lösungsmittels gerade kompensiert. Dann sind die Moleküle des gelösten Stoffes bis an den Stempel heran gleichmäßig verteilt. Der Kohäsionsdruck des Lösungsmittels in der Lösung besteht dann aus zwei Teilen, nämlich dem eigenen Kohäsionsdruck des Lösungsmittels K_{11}'' und dem gegenseitigen Kohäsionsdruck von Lösungsmittel und gelöstem Stoff K_{12}. Der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels auf den Stempel ist daher gleich

$$p_{1s}'' = p_{1i}'' - K_{11}'' - K_{12}\,. \tag{11}$$

Ferner wirkt auf den Stempel noch der volle osmotische Druck des gelösten Stoffes als thermischer Grenzdruck desselben (infolge der gleichmäßigen Dichte). Endlich wird der Stempel durch die eingeführten Anziehungskräfte auf den gelösten Stoff mit der Gesamtkraft K_{12} nach innen gezogen. Als äußerer Druck auf den Stempel resultiert daher

$$p_s'' = p_{1i}'' - K_{11}'' - K_{12} - K_{12} + \frac{RT}{V} = p_{1i}' - K_{11}' + \frac{RT}{V} = p_s' + \frac{RT}{V}.$$

Die Erhöhung des inneren thermischen Druckes wird daher teilweise durch den infolge der Anziehung des gelösten Stoffes erhöhten Kohäsionsdruck des Lösungsmittels und teilweise durch die Anziehungskräfte des Stempels kompensiert. Der äußere Druck auf den Stempel über der Lösung ist wieder um die Größe RT/V größer als der auf den Stempel über dem damit im Gleichgewicht befindlichen reinen Lösungsmittel, gerade so wie im vorigen Abschnitt, wo die Anziehungskräfte fehlten.

Übt nun der Stempel keine Kräfte auf die Moleküle des gelösten Stoffes auf, so werden sie infolge der Anziehung des Lösungsmittels nach innen zurückgezogen (gegenseitige Anziehung der gelösten Moleküle berücksichtigen wir nicht) und zwar gehorcht ihr thermischer Grenzdruck der Formel nach (31)

$$(12)\quad p_{2_i} - \frac{RT}{V} = -\int_{+\infty}^{0} \varrho_2(R)\,dR \int_{+\infty}^{0} \varrho_1(r)\,f_{12}(r-R)\,dr = -K,$$

er sinkt also um die Größe K, die im Grenzfall RT/V wird.[1]) Dafür üben sie auf das Lösungsmittel einen nach außen gerichteten weiteren Zug von der gleichen Größe K aus, um sie sinkt der Kohäsionsdruck des Lösungsmittels und steigt der thermische Grenzdruck desselben, so daß der gesamte Druck unverändert bleibt.

Das bedeutet kurz folgendes: Wir haben zwei Wirkungen des gelösten Stoffes zu unterscheiden. Denken wir uns zuerst, seine Moleküle hätten keine Wärmebewegung, so würden sie sich in einer Gleichgewichtslage in der Lösung anordnen, so daß eine dünne Schicht (bestimmt durch den Radius der Wirkungssphäre) an der Oberfläche frei bliebe. Das würde eine Erhöhung des Kohäsionsdruckes und damit des inneren thermischen Druckes des Lösungsmittels bedeuten, die sich von selbst infolge des Gleichgewichtes an der Membran einstellt; denn dieses ergibt bei ungleichem thermischen Grenzdruck ein Nachströmen von Lösungsmittel, bis der thermische Grenzdruck den alten Wert hat. Erhält nun der gelöste Stoff seine Wärmebewegung, so bewirkt diese, daß er über seine Gleichgewichtslage hinaus näher an die Oberfläche herankommt, desto näher, je stärker die Wärmebewegung ist, ganz so, wie nach Perrin[2]) sich Emulsionen über den Boden des Gefäßes sich erheben. Dieses Hinaustreten über die Gleich-

---

1) Es ist nämlich $\varrho_2 = \varrho_{2_i} e^{-\frac{\varphi}{RT}}$, wo

$$\varphi = \int_{\infty}^{R} dR \int_{+\infty}^{0} dr\, \varrho_1''(r) f_{12}(r-R)$$

die Arbeit ist, die zur Überführung von 1 Mol gelösten Stoffes aus dem Innern in die Entfernung R von der Oberfläche nötig ist. Dann wird

$$K = RT(\varrho_{2_a} - \varrho_{2_i}).$$

2) J. Perrin, Compt. rend. 146. S. 967. 1908; 147. S. 530. 1908.

gewichtslage bewirkt dann einen Zug auf das Lösungsmittel nach außen, der gleich RT/V ist, und sich in einem um diese Größe erhöhten thermischen Grenzdruck des Lösungsmittels äußert.

Man kann das kurz so ausdrücken, daß infolge der Anziehungskräfte der gelöste Stoff den osmotischen Druck nicht mehr direkt auf die äußerste Oberfläche, sondern auf die Kapillarschicht des Lösungsmittels ausübt, ohne daß der Betrag desselben dadurch geändert würde. Mit anderen Worten: die Gesamtgröße des äußeren Druckes oder der gesamte thermische Grenzdruck an der Oberfläche ist unabhängig von der Größe der Anziehungskräfte, sie ändern nur die Art, wie er sich auf den thermischen Grenzdruck des Lösungsmittels und den thermischen Grenzdruck des gelösten Stoffes verteilt.

Wir denken uns jetzt wieder die Membran abgesperrt und entlasten den Stempel über der Lösung um den Betrag des osmotischen Druckes, dann dehnt sich ganz wie in § 2 die Flüssigkeit solange, bis der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels den Wert p angenommen hat. Diese Dehnung kommt also dadurch zustande, daß der gelöste Stoff durch seinen Druck gegen die Kapillarschicht das Lösungsmittel vor sich her schiebt. Bringen wir nun die Lösung wieder durch die halbdurchlässige Membran mit dem reinen Lösungsmittel von gleichem Druck in Berührung, so ist an der Membran der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels kleiner (weil dort der Gesamtdruck p teilweise vom Grenzdruck des gelösten Stoffes herrührt), infolgedessen dringt Lösungsmittel ein.

Wir können das so auffassen, als ob die Stöße der gelösten Moleküle auf die Kapillarschicht des Lösungsmittels an der *freien* Oberfläche (nicht an der Membran) diese vor sich herschieben würden. Die Kohäsionskräfte des Lösungsmittels bewirken dann das Nachziehen desselben durch die Membran, sonst würde die Flüssigkeitssäule einfach reißen.

Daß sich der osmotische Druck auf die Gefäßwände in einer freistehenden Lösung nicht bemerkbar macht, hat den gleichen Grund wie in § 2.

Bisher haben wir eine unendlich dünne Membran angenommen; wenn sie Kräfte auf den gelösten Stoff ausübt, ändert sich an unseren Betrachtungen gar nichts, solange der gelöste Stoff direkt durch Stöße und durch diese Kräfte auf

die Wand wirkt. Dagegen erfordert der von H. A. Lorentz[1]) besprochene Fall einer dicken, kräftefreien Membran mit engen Kanälen eine kurze Erörterung. In diesem Fall ist nämlich das reine Lösungsmittel vom gelösten Stoff zu weit entfernt, um auf ihn zu wirken, dieser zieht sich daher von der Membran ins Innere der Lösung zurück, die Verhältnisse werden auch an der Lösungsseite der Membran so, wie wir sie für den Stempel eben geschildert haben. Dann herrscht (Fig. 4) an dieser Seite a der Membran ein erhöhter thermischer Grenzdruck *des Lösungsmittels*, und zwar im Grenzfall, in dem keine gelösten Moleküle mehr an die Wand kommen, ein um RT/V erhöhter Grenzdruck. Innerhalb der Kanäle nimmt aber infolge der Anziehungskräfte des Gelösten dieser thermische Druck ab, bis er an der Stelle b, wo die Kanäle ins reine Lösungsmittel münden, auf p_{1s}' gesunken ist. Daß die Anziehungskräfte gerade eine Verminderung um RT/V bewirken, ersieht man aus den Schlußfolgerungen bei Lorentz. Der Mechanismus des Nachströmens im Fall der Entlastung des Stempels über der Lösung ist nun folgender: Haben wir vor der Entlastung bei b gesperrt, so ist dort der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels kleiner als im reinen Lösungsmittel, die Verhältnisse liegen genau so wie früher besprochen. Haben wir dagegen bei a abgesperrt, so herrscht zwar dort in der Lösung ein thermischer Grenzdruck des Lösungsmittels $= p_{1s}'$, dagegen besteht in dem mit dem reinen Lösungsmittel verbundenen Kanal bei a ein höherer Grenzdruck, der ein Nachströmen bewirkt. Bloß in diesem Fall kann man sagen, daß die Anziehungskräfte direkt das reine Lösungsmittel hereinziehen.

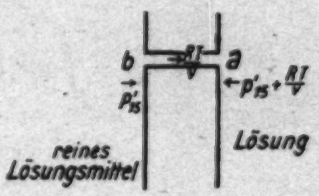


Fig. 4.

§ 4. Der Binnendruck.

Wir haben in § 3 gesehen, daß der thermische Druck des Lösungsmittels in der Lösung beim äußeren Druck $p + \pi$ um $2K_{12} + K'' - K'$ größer ist als der im reinen Lösungsmittel beim äußeren Druck p. Bei gleichem äußeren Druck gilt also

1) H. A. Lorentz, a. a. O. S. 189.

angenähert für den inneren thermischen Druck des Lösungsmittels in der Lösung

$$p_i'' = p_i' + 2K_{12} + K'' - K' - \pi .$$

Tatsächlich hat Tammann[1]) schon vor längerer Zeit festgestellt, daß sich viele Eigenschaften der Lösungen durch die Annahme eines erhöhten thermischen Druckes erklären lassen. Doch stimmen seine Werte nicht mit denen überein, die wir erwarten sollten. Es ist nämlich

$$2K_{12} = \int_{\infty}^{-\infty} \overline{\varrho_1'}(R)\, dR \int_{\infty}^{0} \overline{\varrho_2}(r)\, f_{12}(r-R)\, dr$$

$$\overline{\varrho_1'} = \text{const} \qquad \begin{matrix} \overline{\varrho_2} = \text{const} & R > 0 \\ \overline{\varrho_2} = 0 & R < 0 . \end{matrix}$$

Betrachten wir andererseits das Integral

$$J = \int_{\infty}^{-\infty} dR \int_{\infty}^{0} \varrho_1'(r)\, f_{12}(r-R)\, dr . \tag{13}$$

Es ist die Arbeit[2]), die zur Entfernung von 1 Mol. gelösten Stoffes aus der Lösung nötig ist. Hier ist ϱ_1' bis zur Kapillarschicht konstant, in ihr bis 0 abnehmend, für $R < 0$ Null. Wenn f mit großem $R - r$ genügend stark verschwindet, so sieht man leicht, daß wir ohne merkbaren Fehler im Integral ϱ_1 für alle $R > 0$ konstant setzen können.[3])

Dann wird also

$$\varrho_2 J = 2K_{12} .$$

Aus ähnlichen Überlegungen sieht man, daß

$$K'' = \lambda_0 \frac{\varrho''^2}{\varrho_0}, \quad K' = \frac{\varrho'^2}{\varrho_0} \lambda_0 ,$$

wo λ_0 die Verdampfungswärme bei der Dichte ϱ_0 ist. Also

$$p_i'' - p_i' = \varrho_2 J + \lambda_0 \frac{\varrho''^2 - \varrho'^2}{\varrho_0} - \pi = \varrho_2 J + 2\lambda_0 (\varrho'' - \varrho') - \pi . \tag{14}$$

---

1) G. Tammann, Über die Beziehungen zwischen den inneren Kräften und Eigenschaften der Lösungen. Hamburg 1907.

2) Wir vernachlässigen dabei die Temperaturabhängigkeit.

3) Wie es in der Kapillaritätstheorie üblich ist.

Andererseits sollte man erwarten, daß J gleich der „Hydratationswärme"[1]) W des Salzes wäre, also der Energie, die beim Übergang beider Ionen aus dem Gas in die Lösung frei wird, weniger der Energie, die durch die hierbei erfolgte Volumänderung des Wassers frei wird. Wäre diese letztere in der ganzen Lösung gleichmäßig (d. h. nicht um die Ionen als Kerne konzentriert), so ergäbe sich hierfür

$$\frac{\partial U}{\partial V}\,\frac{\varrho'' - \varrho'}{\varrho'^2}\,.$$

Also

$$(15)\qquad p_i'' - p_i' + \pi - 2\lambda_0(\varrho'' - \varrho') = \varrho_2 J = W - \frac{\partial U}{\partial V}\,\frac{\varrho'' - \varrho'}{\varrho'^2}\,.$$

Bezieht man alles auf ein Mol gelösten Salzes, so wird dies

$$\frac{p_i'' - p_i' + \pi}{\varrho_2} - \frac{\varrho'' - \varrho'}{\varrho_2}\left(2\lambda_0 - \frac{\partial U}{\partial V}\,\frac{1}{\varrho'^2}\right) = W.$$

Das kann man übersichtlicher machen, indem man durch RT dividiert und $\pi = RT\varrho_2$ benützt,

$$(16)\qquad \frac{W}{RT} = \frac{p_i'' - p_i'}{\pi} + 1 - \left(2\lambda_0 - \frac{\partial U}{\partial V}\,\frac{1}{\varrho'^2}\right)\frac{1}{RT}\,\frac{\varrho'' - \varrho'}{\varrho_2}\,.$$

Nun zeigt man leicht, daß der Klammerausdruck nur einen kleinen Wert hat. Dann folgt, daß sich die Hydratationswärme zu RT verhalten soll wie die von Tammann bestimmten Drucke zum osmotischen Druck weniger 1. Die ersteren sind aber in der Größenordnung 600 Atm., der letztere $22^1/_2$ Atm., das Verhältnis also ~ 30; für W würde sich daher

$$\sim 0{,}6 \cdot 30 \text{ Kal.} \sim 18 \text{ Kal.}$$

ergeben, während die Hydratationswärmen die Größenordnung 180 Kal. haben. Will man daher an der Identifikation der von Tammann bestimmten Drucken mit unseren festhalten, so muß eine große Wärmemenge bei der Kontraktion des Wassers um die Ionen frei werden.

Zusammenfassung.

Es wird zuerst besprochen, wie der äußere Druck in einer reinen Flüssigkeit zustande kommt, dann im Anschlusse an G. Jäger, wie diese Betrachtungen auf eine Lösung zu über-

1) K. Fajans, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 21. S. 549. 709. 1919.

tragen sind, wenn Anziehungskräfte zwischen gelöstem Stoff und Lösungsmittel fehlen. Im Hauptteil der Arbeit wird dann gezeigt, daß das Vorhandensein solcher Anziehungskräfte den osmotischen Druck nicht ändert, weil sie nur einen Teil der Wirkung, welche ohne sie der gelöste Stoff direkt auf die Oberfläche ausüben würde, auf das Lösungsmittel übertragen. Bei genügend starken Anziehungskräften wirkt der kinetische Druck des gelösten Stoffes auf die Kapillarschicht des Lösungsmittels statt auf die freie Oberfläche. Dieser Druck ist es auch, welcher die Oberfläche fortschiebt und damit das Nachdringen von Lösungsmittel durch eine halbdurchlässige Membran verursacht.

Die Anziehungskräfte bewirken eine Erhöhung des inneren Druckes der Lösung, doch stimmen die von Tammann erhaltenen Werke nicht mit denen überein, welche man nach der gemessenen Hydratationswärme erwarten sollte.

(Eingegangen 6. November 1920.)

6. *Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen; von W. Seitz.*

(III. Teil.)

Die theoretische Auswertung der Messungen, welche ich in den Jahren 1912 bis 1915 gemeinsam mit den Herren G. Lechner und H. Altertum ausgeführt habe (Ann. d. Phys. **49**. S. 85—92 und 93—115, 1916), war bereits am Schlusse des 2. Teils unserer Arbeit angekündigt, ihre Publikation hat sich aber durch äußere Umstände bis heute verzögert.

Zunächst wurde geprüft, wie weit in dem Gebiet von 0 bis 1000 Atm. und von 163° bzw. 173° bis 283° abs. Temp. die untersuchten Flüssigkeiten Isopentan, Äthyläther, Methylalkohol, Äthylalkohol und Schwefelkohlenstoff dem Gesetz der übereinstimmenden Zustände genügen, und zwar wurde hierbei der Weg eingeschlagen, den C. Raveau[1]) angegeben hat, d. h. es wurden auf durchscheinendem Koordinatenpapier die Isothermen aufgezeichnet, wobei die Briggschen Logarithmen des Druckes die Ordinaten, jene des Volumens die Abszissen bildeten, und nun versucht, die Kurvenscharen zweier Flüssigkeiten durch Parallelverschiebung miteinander zur Deckung zu bringen.

Bei Pentan und Äther gelingt dies vorzüglich. Die größten Abweichungen vom Parallelismus zusammenfallender Kurven, die höchstens ein Promille des Volumens ausmachen, dürften aber doch die wahrscheinliche Fehlergrenze der Messungen etwas überschreiten. So scheint bei den höchsten Drucken die reduzierte Volumenabnahme zwischen übereinstimmenden Drucken für Pentan etwas größer als für Äther zu sein. Bekanntlich sollen nach der van der Waalsschen Theorie sich in korrespondierenden Punkten die Größen P, v, T für die

1) C. Raveau, Journ. de Phys. 3. S. 6. 432—439. 1897.

beiden Substanzen wie die kritischen Größen P_k, v_k, T_k verhalten. Bei der günstigsten Überlagerung der beiden Systeme ist

$$\frac{P_{\text{Äther}}}{P_{\text{Pentan}}} = 1{,}15,$$

während das Verhältnis des kritischen Druckes

$$\frac{P_{k\,\text{Äther}}}{P_{k\,\text{Pentan}}}$$

nach den in Landolts Tabellen angegebenen Zahlen zwischen 1,07 und 1,21 liegt.

Die Isotherme $T = 182^0$ (abs. Temp.) des Pentans deckt sich mit der Isotherme $T = 183$ des Äthers, und ebenso die Isotherme $T = 270^0$ des Pentans mit der Isotherme $T = 273^0$ des Äthers, während in bester Übereinstimmung hiermit T_k für Pentan 460,8, für Äther 466,8 ist (Messungen von Young).

Analog berechnet sich für korrespondierende Punkte

$$\frac{v_{\text{Äther}}}{v_{\text{Pentan}}} \text{ zu } 0{,}875,$$

was dem Wert

$$\frac{v_{k\,\text{Äther}}}{v_{k\,\text{Pentan}}} = 0{,}894,$$

der aus den Youngschen Messungen folgt, kaum widerspricht, wenn man bedenkt, wie unsicher alle Bestimmungen des kritischen Volumens sind. Es scheint demnach bei beiden Flüssigkeiten selbst bei den tiefsten gemessenen Temperaturen und bei hohen Drucken die Polymerisation verschwindend klein zu sein oder wenigstens das Volumen nicht merklich zu beeinflussen.

Wie vorauszusehen war, bestehen zwischen Methyl- und Äthylalkohol einerseits und Pentan und Äther andererseits diese einfachen Beziehungen nicht. Allerdings lassen sich die logarithmischen Kurvenscharen des Methylalkohols in die des Pentans ziemlich gut einordnen, wenigstens so, daß eine Korrektur von 3 Promille des Volumens in den extremsten Fällen genügen würde, um die Isothermen der einen Substanz vollständig parallel den darauf liegenden Isothermen der anderen zu machen. Es handelt sich dabei also schon um Abweichungen, die die Fehlergrenze weit übersteigen, und zwar ist vor allem bei tiefen Temperaturen und hohen Drucken die Kompressibilität des Methylalkohols zu groß gegenüber der des Pentans.

Versucht man in der bekannten Weise für korrespondierende Punkte die kritischen Daten zu berechnen, so gelangt man zu unbrauchbaren Resultaten. So ist, wenn sich die einfach gestrichenen Größen auf Methylalkohol, die zweifach gestrichenen auf Pentan beziehen,

$$\frac{P'}{P''} = 1{,}217,$$

während nach Landolts Tabellen $\frac{P_m'}{P_m''}$ zwischen 2,095 und 2,38 liegt. Dagegen ließen sich die Werte $\frac{v'}{v''} = 0{,}87$ mit $\frac{v_m'}{v_m''} = 0{,}861$, und ebenso $\frac{T'}{T''} = 1{,}13$ mit $\frac{T_m'}{T_m''} = 1{,}11$ noch in Einklang bringen.

Das Verhalten des Äthylalkohols weicht von dem des Pentans noch in erhöhtem Maße ab. Die beiden Kurvenscharen lassen sich zwar auf etwa 3 Promille des Volumens zur Deckung bringen, die daraus errechneten Verhältnisse der kritischen Daten stehen aber in vollständigem Widerspruch zu den experimentell gefundenen Zahlen. Dagegen scheinen Äthyl- und Methylalkohol ähnlichen Gesetzen zu gehorchen; denn ihre logarithmisch gezeichneten Isothermen ordnen sich so vorzüglich ineinander ein, daß die größten Abweichungen unter 1 Promille des Volumens bleiben. Die korrespondierenden Größen

$$\frac{v''}{v'} = 1{,}02, \quad \frac{P''}{P'} = 1{,}035 \quad \text{und} \quad \frac{T''}{T'} = 1{,}03 \text{ bis } 1{,}04$$

(die doppelt gestrichenen Größen beziehen sich auf Äthylalkohol, die einfach gestrichenen auf Methylalkohol) stimmen allerdings mit den Verhältnissen der kritischen Daten

$$\frac{v_m''}{v_m'} = 0{,}99; \quad \frac{P_m''}{P_m'} = 0{,}8 \text{ bis } 0{,}93 \quad \text{und} \quad \frac{T_m''}{T_m'} = 1{,}007$$

weniger gut überein. Wie aber bereits Meslin[1]) bewiesen hat, fordert die Koinzidenz der logarithmischen Kurvenscharen nur, daß für beide Substanzen dieselbe Gleichung

$$f\left(\frac{v}{\varphi}, \frac{P}{\pi}, \frac{T}{\vartheta}\right) = 0$$

gilt, wobei deren spezielle Form noch unbestimmt ist, und wobei die Größen φ, π und ϑ sich nicht gerade auf den

1) Meslin, Compt. rend. 116. S. 135. 1893.

kritischen Zustand beziehen müssen, sondern auch einen anderen ausgezeichneten Punkt der Zustandsfläche bestimmen können.

Während, wie gesagt, zu erwarten war, daß das Verhalten der Alkohole von dem des Pentans und Äthers abweichen würde, weil die Polymerisation vermutlich mit abnehmender Temperatur wächst, so war das gleiche bei Schwefelkohlenstoff, für den die Polymerisation nicht sicher feststeht, nicht bestimmt vorauszusagen.

Bei den höheren untersuchten Temperaturen (etwa 218° bis 279° abs. Temp.) passen sich die Kurven des Schwefelkohlenstoffs den des Pentans sehr gut an. Die größten Differenzen betragen nur $^1/_2$ Promille des Volumens. Mit weiterer Abnahme von T wird die Einordnung immer schlechter und schließlich weicht die Isotherme $T = 163°$ des Pentans von der koordinierten Isotherme des Schwefelkohlenstoffs um etwa 4 Promille ab und zwar im Sinne einer zu starken Kompressibilität des Schwefelkohlenstoffs.

Wenn wir die einfach gestrichenen Größen auf dem Schwefelkohlenstoff, die doppelt gestrichenen auf Pentan beziehen, so ist für korrespondierende Punkte

$$\frac{T'}{T''} = 1{,}14 \text{ bis } 1{,}16$$

in guter Übereinstimmung mit

$$\frac{T_k'}{T_k''} = 1{,}16 \text{ bis } 1{,}20,$$

dagegen stehen die Werte

$$\frac{P'}{P''} = 1{,}497 \quad \text{und} \quad \frac{v'}{v''} = 1{,}054$$

in ausgesprochenem Gegensatze zu

$$\frac{P_k'}{P_k''} = 2{,}3 \quad \text{und} \quad \frac{v_k'}{v_k''} = 0{,}62.$$

Gegenstand weiterer Berechnungen war die isotherme Veränderung der Energie mit dem Volumen, die sich aus der bekannten Formel

$$\frac{\partial U}{\partial v} = T\frac{\partial P}{\partial T} - P \quad \text{oder} \quad \frac{\partial U}{\partial v} = T\frac{\alpha}{\mu} - P$$

(α ist der Wärmeausdehnungskoeffizient, μ die Kompressibilität, U die Energie) sich ergibt. Selbstverständlich machen sich alle Unsicherheiten der experimentellen Bestimmung von v, P und T bei der Berechnung von $\partial U/\partial v$ in sehr stark er-

höhtem Maße geltend. Um die Zuverlässigkeit der Werte von a und μ, welche in den Tabellen VIII—XXII (II. Teil) angegeben sind, nach Möglichkeit zu steigern, wurden sie auf Koordinatenpapier als Funktion von T aufgetragen und möglichst gleichmäßige Kurven hindurchgezogen. Diese Kurvenwerte wurden für die Rechnung verwendet. Zur Kontrolle wurde aber in manchen Fällen außerdem direkt aus den Tabellen VIII—XII P als Funktion von T und v graphisch abgeleitet und daraus $\partial P/\partial T$ berechnet. Beide Methoden führten zu genügend übereinstimmenden Resultaten.

Folgende Tabellen enthalten für verschiedene Drucke und Temperaturen $\partial U/\partial v$, ausgedrückt in Atmosphären (eine Atmosphäre ist gleich 1 kg pro Kubikzentimeter).

Tabelle XXIII.

Isopentan.

P in Atm.	$\partial U/\partial v$					
	0°	− 20°	− 40°	− 60°	− 80°	− 100°
0	2466	2562	2650	2815	2985	3040
100	2454	2615	2715	2838	3035	3150
200	2470	2608	2730	2820	2980	3148
300	2510	2570	2675	2800	2970	3155
400	2575	2625	2700	2810	2955	3145
500	2660	2663	2690	2780	2880	3095
600	2655	2655	2643	2750	2840	3065
700	2655	2660	2630	2680	2801	3060
800	2640	2680	2630	2660	2760	3060
900	2610	2640	2610	2622	2710	3025
1000	2550	2565	2565	2575	2640	2975

Tabelle XXIV.

Äther.

P in Atm.	$\partial U/\partial v$					
	− 10°	− 20°	− 40°	− 60°	− 80°	− 100°
0	2810	2925	3170	3360	3475	3495
100	2960	2982	3145	3315	3461	3555
200	3010	3005	3130	3290	3455	3565
300	3010	3000	3083	3265	3440	3580
400	2980	2995	3070	3260	3430	3575
500	3010	2980	3055	3190	3370	3570
600	2995	2965	3010	3130	3270	3530
700	2982	2950	3000	3090	3205	3450
800	2975	2942	2990	3120	3180	3350
900	2958	2870	2950	3075	3155	3250
1000	2895	2770	2815	2960	3100	3200

Tabelle XXV.

Methylalkohol.

P in Atm.	$\partial U/\partial v$				
	− 10°	− 30°	− 50°	− 70°	− 90°
0	3170	3202	3343	3517	3685
100	3170	3202	3316	3503	3660
200	3153	3204	3282	3454	3575
300	3203	3225	3282	3415	3525
400	3220	3260	3290	3390	3500
500	3216	3268	3302	3390	3530
600	3202	3240	3283	3400	3510
700	3170	3180	3210	3400	3490
800	3145	3145	3142	3360	3490
900	3095	3101	3095	3320	3495
1000	3075	3080	3080	3280	3490

Tabelle XXVI.

Äthylalkohol.

P in Atm.	$\partial U/\partial v$					
	0	− 20°	− 40°	− 60°	− 80°	− 100°
0	2900	2935	3025	3180	3390	3630
100	3030	3075	3150	3260	3430	3620
200	3070	3135	3195	3285	3380	3555
300	3095	3165	3210	3270	3350	3490
400	3125	3160	3190	3250	3335	3445
500	3130	3130	3170	3250	3315	3390
600	3140	3140	3160	3225	3300	3370
700	3160	3150	3170	3200	3260	3330
800	3145	3145	3170	3185	3210	3290
900	3140	3150	3160	3160	3170	3210
1000	3100	3140	3155	3140	3110	3150

Tabelle XXVII.

Schwefelkohlenstoff.

P in Atm.	$\partial U/\partial v$					
	0°	− 20°	− 40°	− 60°	− 80°	− 90°
0	3955	4130	4180	4245	4320	4370
100	3950	4040	4130	4190	4230	4350
200	3910	3980	4075	4120	4220	4290
300	3895	3930	4040	4060	4160	4210
400	3905	3935	4025	4010	4100	4150
500	3925	3955	4005	3995	4060	4090
600	3895	3960	3960	3960	4025	4045
700	3860	3880	3905	3970	4000	4010
800	3810	3795	3805	3870	3970	3990
900	3765	3700	3710	3780	3910	
1000	3740	3625	3615	3680	3820	

In den Figg. 1—5 ist $\partial U/\partial v$ für die einzelnen Isothermen als Funktion der Volumina angegeben. Diese sind den Tabellen XIII bis XXII (vgl. II. Teil) entnommen. Trotz der

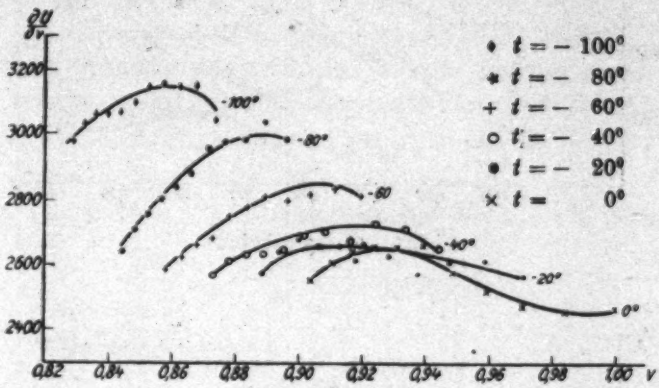


Fig. 1. Isopentan.

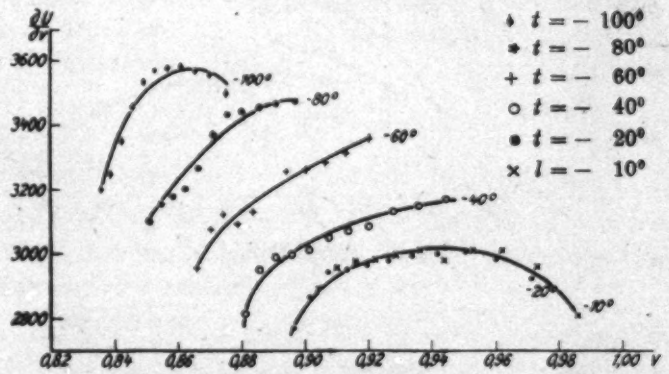


Fig. 2. Äthyläther.

selbstverständlichen Unsicherheit, mit der die einzelnen Werte von $\partial U/\partial v$ behaftet sind, erlaubt die Betrachtung der Diagramme bestimmte Aussagen über den Verlauf der Kurven:

1. Wie zu vermuten war, ist die Ähnlichkeit des Verhaltens zwischen den beiden nicht polymerisierenden Substanzen Pentan und Äther am größten; die Kurven des Methyl- und Äthylalkohols sowie des Schwefelkohlenstoffs unterscheiden sich von denen des Pentans und Äthers wie auch untereinander sehr deutlich.

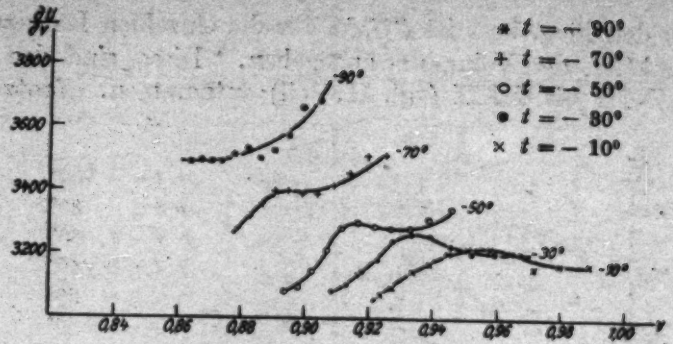


Fig. 3. Methylalkohol.

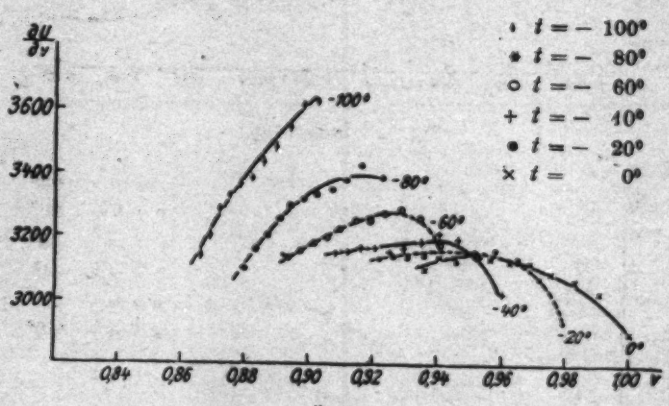


Fig. 4. Äthylalkohol.

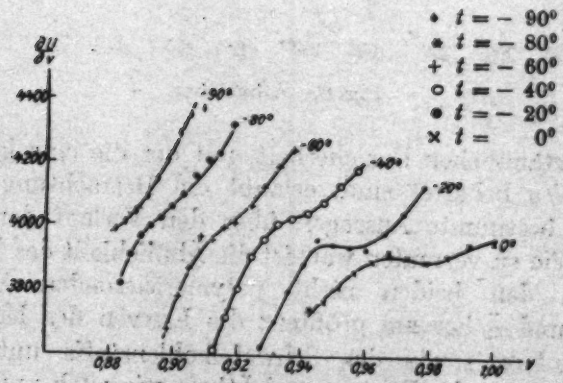


Fig. 5. Schwefelkohlenstoff.

2. Allen Flüssigkeiten gemeinsam ist, daß $\partial U/\partial v$ bei kleinem v mit diesem wächst und außer bei Schwefelkohlenstoff einem Maximum zuzustreben scheint, das allerdings nicht in allen Fällen erreicht wird. Für größere Werte von v nimmt dann $\partial U/\partial v$ wieder ab.

3. Für Temperaturen, die oberhalb -30^0 liegen, fallen, abgesehen vom Schwefelkohlenstoff die Kurven einer Substanz nahezu zusammen oder kreuzen sich. Hier ist also

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\,\frac{\partial U}{\partial v}\right)$$

nahezu gleich Null. Allgemein gilt für die tieferen Temperaturen, daß

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\,\frac{\partial U}{\partial v}\right)_v < 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} < 0.$$

Auf letztere Tatsache hat in einer Arbeit, die mir erst verspätet zu Händen kam, M. K. Zakrczewski[1]), der $\partial c_v/\partial v$ nach der bekannten Formel

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = T\,\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}$$

aus unseren Messungen berechnet hat, hingewiesen.

Eine Deutung der unter 2. und 3. zusammengefaßten Gesetzmäßigkeiten ergibt sich daraus, daß die isotherme Energieänderung $\partial U/\partial v$ zusammengesetzt ist:

I. Aus der Arbeit gegen die inneren Anziehungskräfte. Diese ist positiv und nimmt sicherlich mit wachsendem Volumen ab. Über ihre Abhängigkeit von der Temperatur bei gegebenem v ist schwer etwas auszusagen.

II. Aus der Änderung der lebendigen Kraft der Moleküle mit wachsendem v bei gegebenem T. Diese können wir wohl in erster Annäherung gleich Null setzen.[2])

---

1) M. K. Zakrczewski, Anz. d. Akad. d. Wissensch. in Krakau Nr. 4—6. 1917.

2) M. Reinganum, Theorie und Aufstellung einer Zustandsgleichung. Dissertation Göttingen 1899.

III. Aus der Änderung der intramolekularen Schwingungsenergie der Atome mit wachsendem v. Wir können den negativen Wert von $\partial c_v/\partial v$ nur so deuten, daß die Atomenergie, wie schon Hr. Zakrzewski hervorgehoben hat, gleichzeitig mit der Dichte abnimmt, daß also nach der Quantentheorie demnach die Atomfrequenz desto kleiner ist, je dichter die Moleküle liegen. Wie ganz verständlich ist, werden durch benachbarte Atome die einem anderen Molekül angehören, die intramolekularen Anziehungskräfte teilweise kompensiert, und dadurch wird die Frequenz herabgesetzt. Bei großer Dichte nähert sich eben der flüssige Zustand bereits dem festen, in dem, nach den Beugungsversuchen der Röntgenstrahlen zu schließen, die Bedeutung des intramolekularen Verbandes zurücktritt, und jedes Atom ein mehr oder minder selbständiges Individuum darstellt. Der III. Teil von $\partial U/\partial v$ ist demnach negativ und nähert sich mit wachsendem v dem Nullwert, während er sich mit abnehmendem v mehr und mehr geltend macht. Dies beweist die nach unten konkave Krümmung der $\partial U/\partial v$-Kurven. Auffallend ist bei Schwefelkohlenstoff der große positive Wert von $\partial^2 U/\partial v^2$, der darauf schließen läßt, daß hier der III. Teil von $\partial U/\partial v$ sich besonders stark geltend macht.

IV. Bei polymerisierten Flüssigkeiten aus der Dissoziationsenergie. Diese dürfte den Gesamtwert von $\partial U/\partial v$ kaum sehr stark bestimmen, wie ein Vergleich zwischen den Kurvenscharen des polymerisierten Äthylalkohols und des nicht polymerisierten Äthers zeigt, die sich in ihrem Verlauf nicht prinzipiell voneinander unterscheiden.

Aachen, November 1920.

(Eingegangen 24. November 1920.)

7. *Entgegnung auf die Bemerkung von M. Wien zu unserer Arbeit: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“;*

von W. Hahnemann und H. Hecht.

Wir stimmen mit Hrn. Wien überein, daß der von uns in unserer Arbeit vorgenommene Vergleich der von Hrn. Wien für die Reizschwelle des Ohres gemessenen Werte mit unseren Ergebnissen nicht möglich ist, weil den zu messenden Größen eine verschiedene Definition zugrunde liegt. Unter Reizschwelle des Ohres ist diejenige Energie zu verstehen, die an der Empfindungsschwelle von dem Trommelfell des Ohres aufgenommen und von dort ans innere Ohr weitergegeben wird. Bei gesunden Ohren ist der Anteil der Energie, welche von den übrigen Teilen des äußeren Ohres, z. B. durch Knochenleitung zum inneren Ohr gelangt, neben der durch das Trommelfell übermittelten, verschwindend.

Hr. Wien legt seiner Bestimmung diejenige Schallenergie zugrunde, welche an der Reizschwelle bei freier Ausbreitung des Schalles durch eine Fläche von der Größe des Trommelfelles hindurchtritt, wobei, wie Hr. Wien in seiner „Bemerkung“ nochmals ausdrücklich betont, „es unerörtert bleibt, ob wirklich die durch den Gehörgang auf das Trommelfell treffende, dort absorbierte Energie mit der so definierten übereinstimmt“. Wir definieren als Reizleistung diejenige Leistung, welche an der Schwelle beim Andrücken des Telephons von dem ganzen durch die Schallwellen getroffenen äußeren Ohr, bestehend aus Ohrkanal, Trommelfell und den anschließenden Teilen, absorbiert wird. Um einen Vergleich der beiderseitigen Ergebnisse möglich zu machen, müßte deshalb auf der einen Seite bei dem Wienschen Wert die Wirkung des Kopfes und des Gehörganges auf die Schallbewegung bis zum Trommelfell und vor allem die Energieaufnahme des Trommelfelles selbst zahlen-

mäßig festgestellt werden. Andererseits müßte bei unseren Versuchen der Anteil bestimmt werden, der von der gesamten vom Ohrkanal, Trommelfell und den anschließenden Teilen des Ohres absorbierten Energie auf das Trommelfell allein entfällt.

Diese Aufgaben exakt zu lösen ist wohl unmöglich. Wir glauben daher, daß ein direkter Vergleich der beiderseitigen Werte nur gewonnen werden kann, wenn nach beiden Methoden neue Versuche an demselben Telephon ausgeführt werden. Wie wir bereits in unserer ersten Arbeit erwähnt haben, können wir jedoch nicht mehr auf derartige Messungen zurückkommen und wollen daher nur das wiederholen, was wir dort bereits gesagt haben, daß wir uns freuen würden, wenn von anderer Seite nach beiden Methoden experimentiert würde und die für verschiedene Anwendungszwecke so notwendigen beiden Bestimmungen des Wirkungsgrades eines Telephons und der Reizleistung des menschlichen Ohres von neuem ausgeführt würden.

(Eingegangen 16. November 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Seite
A. W. Konowalow. Zur Theorie der Dampfdrucke und der Zusammensetzung binärer Gemische. (Zweiter Teil.) 673
A. W. Reinhold. Zur Photochemie der Bromsilbergelatine-Reaktion, Sensibilisierung und Entwicklung 693
A. Ferdinand Schmidt. Über die Dichtigkeitsverhältnisse der Dampfdichte und chemischen Wirkungen dünner Dampfentladungsvorgänge 713
A. George Jaffé. Zur Theorie der Wasserstoffelektrode 735
A. J. K. Lillienfeld. Bemerkung zu Herrn G. Jaffés vorstehender Arbeit: „Zur Theorie der Wasserstoffelektrode“ 745
A. G. Eklund. Die lichtelektrische Wirkung ultravioletter Lichtquanten 750
A. Al. Hasaratschwily. Über eine neue Methode der Erzeugung elektromagnetischer ungedämpfter Schwingungen, welche in der Verwendung der elektrostatischen oder magnetischen Eigenschaften der Kathodenstrahlen zu schnellen Stromunterbrechungen besteht 750

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Rebrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 51.

Es wird gebeten, die Manuskripte dreizeilig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für die verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls mehrere gewünscht werden, so muß die bei Rücksendung der ersten Korrekturbogen an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle weiteren die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bitten wir nur an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Änderungen Abbildungen, die bei den Arbeiten beantragten Abänderungen oder Übersendung besonderer Zeichnungen, der gewünschten Schriftart ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizufügen (nicht in den Text skizziert mit einzuzeichnen). Für die Figuren ist eine Nummer in den Text einzufügen, wo die Einfügung.

Wenn sind am Rande oder unten auf den Seiten der Manuskripte (nicht in den Text) mit roter Tinte anzubringen, wie in den „Formeln“ der Physik“ (Bücher, Form und Anzahl der Striche und Verwendung der Buch-, Schrift- und Zahlenzeichen) angegeben.

1921. № 8.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Zur Kenntnis des Jodmoleküls und der Emission seines Bandenspektrums;* von *W. Steubing.*

(Hierzu Tafel I.)

Einleitung.

Das eigentümliche Verhalten, welches der Träger des Jodfluoreszenzbandenspektrums zeigt, wenn er einem starken magnetischem Feld ausgesetzt wird[1]), gab die Veranlassung, den Träger dieses Bandenspektrums bei verschiedenen Entstehungsbedingungen zu untersuchen, insbesondere zur Feststellung ob der vorhandene magnetische Einfluß auf die Fluoreszenzerregung des Spektrums beschränkt ist oder ob auch bei anderer Erzeugungsart eine besondere magnetische Wirkung stattfindet.

Durch vorläufige Versuche war bereits festgestellt worden, daß das Spektrum[2]) der positiven Säule im Joddampf magnetisch besonders empfindlich ist, da die gleiche Erscheinung bei anderen Gasen und Dämpfen noch nicht beobachtet worden ist.

Die für die vorgezeichnete Aufgabe wichtigsten experimentellen Ergebnisse, welche frühere Arbeiten am Joddampf geliefert haben und welche dieser Untersuchung als Unterlage dienen, mögen zunächst kurz zusammengefaßt werden.

Hauptteil.

§ 1. Das Jod besitzt ein im sichtbaren Spektrum liegendes Bandenspektrum in Emission, das zwar wie die Spektra aller Halogene bisher nur lückenhaft bekannt ist, da eine genaue Ausmessung nicht stattgefunden hat, das aber wohl anerkanntermaßen dem reinen Jod — nicht einer Verbindung — zugerechnet wird. Außer durch elektrische Anregung ist es als Fluoreszenz-

1) Ann. d. Phys. 58. S. 55. 1919.
2) a. gl. O. S. 103.

spektrum durch Bestrahlung mit weißem Licht leicht zu erhalten, aber naturgemäß als Fluoreszenzspektrum nur lichtschwach, so daß eine Auflösung der einzelnen aus zahlreichen dichtgedrängten Linien bestehenden Banden nicht gelungen ist. Seiner ganzen spektralen Lage und Gruppierung nach ist es aber in beiden Fällen identisch und verläuft von Grün bis ins Ultrarot hinein.

§ 2. Insbesondere das Fluoreszenzspektrum, das man leicht erhält, wenn man in evakuierten Glasgefäßen Joddampf von Zimmertemperatur bestrahlt, ist bereits mehrfach Gegenstand von Untersuchungen gewesen, hinsichtlich von Art und Stärke der Anregung, des Einflusses fremder Gase, von Ionisierung und magnetischer Einwirkung. Aus den bisherigen Arbeiten[1]) seien als wichtigste Ergebnisse hervorgehoben:

1. Fluoreszierender Joddampf ist nicht ionisiert.

2. Fluoreszenzerregendes Licht wirkt auf die Glimmstromentladung befördernd ein, es vergrößert die Stromstärke bzw. verringert den Kathodenfall.

3. Die Ionisierung in Joddampf durch α-Strahlen erfährt bei gleicher Bestrahlung keine Veränderung.

4. Außer dem „normalen" Bandenspektrum bei Bestrahlung mit weißem Licht erhält man durch monochromatische Anregung Teile desselben in bestimmter Gruppierung als „Resonanzspektrum".

5. Zusatz fremder Gase zu reinem Joddampf vermindert die Fluoreszenz, um so stärker, je elektronegativer das betreffende Gas ist.

6. Das „Resonanzspektrum" geht durch Zusatz fremder Gase in das normale Spektrum über und diese Wirkung ist am bemerkbarsten bei den elektropositiven Edelgasen, die die Fluoreszenzfähigkeit am wenigsten beeinflussen.

7. Erhitzung bzw. Überhitzung des Joddampfes (gleich vermehrter Dissoziation) verringert und zerstört die Fluoreszenz.

8. Ein magnetisches Feld verringert die Fluoreszenzfähigkeit, obgleich magnetische Einwirkungen auf nicht leuchtenden Joddampf nicht nachweisbar sind.

9. Das Magnetfeld beeinflußt die Emission des einzelnen

1) Es handelt sich vor allem um Arbeiten von R. W. Wood und seinen Mitarbeitern, Franck und seinen Mitarbeitern und bezüglich der magnetischen Einflüsse von W. Steubing.

Jodmoleküls, in dem es den Charakter des Spektrums ändert und das Energiemaximum nach längeren Wellen verschiebt.

10. Die Fluoreszenzschwächung stellt sich als eine e-Funktion des Magnetfeldes dar.

11. Die Wirkung des Magnetfeldes äußert sich um so mehr, je stärker die Emission pro Molekül ist, unabhängig, ob das Spektrum durch monochromatische oder kontinuierliche Anregung erzeugt ist und qualitativ unabhängig von etwa beigemischten fremden Gasen.

12. Sekundäre magnetische Wirkungen auf fluoreszierenden Joddampf finden nicht statt.

§ 3. Es entsteht nun die Frage, wie sich das Spektrum bzw. seine Träger bei anderer Erzeugung als Fluoreszenz[1]) verhalten und das erfordert wieder die Kenntnis von den Möglichkeiten und Bedingungen, unter denen das Spektrum erzielt werden kann.

Die Versuche, die ich in dieser Hinsicht neu unternahm, hatten zunächst das Ergebnis, daß das Spektrum in Flammen irgendwelcher Art nicht in Emission zu erzielen ist, entweder treten — bei Überschuß an Joddampf — Absorptionsspektra auf oder Verbindungsspektra, wie man sie in den weiterhin beschriebenen Entladungsröhren auch beobachtet, solange dieselben nicht gereinigt sind bzw. noch Wasserstoff enthalten.

Dagegen ist es außer in der positiven Säule des Glimmstromes, in dem es frühzeitig beobachtet wurde, durch Kathodenstrahlen zu erhalten, kurz, wie im einzelnen zu zeigen ist, überall da, wo freie Elektronen von größerer oder geringerer Geschwindigkeit auf Joddampfmoleküle treffen.

§ 4. Ich schritt daher zunächst zur Untersuchung des Glimmstroms bzw. des Spektrums in der positiven Säule. Hierbei zeigte sich eine bei allen Halogenen oft beobachtete und nicht überwundene Erscheinung, daß die Gasfüllung die Elektroden zerfrißt bzw. Verbindungen bildet, die teils die Glaswandung angreifen, teils den Gasinhalt der Röhren so

1) Das sogenannte „Glühspektrum", über dessen Realität und Entstehungsursache seinerzeit eine Diskussion zwischen Fredenhagen einerseits und Reinganum und R. W. Wood anderseits stattfand, kommt hierzu schon wegen seiner Lichtschwäche und der experimentellen Schwierigkeiten nicht in Frage, die eine gründliche experimentelle Bearbeitung unter einwandfreien Bedingungen verlangen.

begierig verschlucken daß eine Entladung nur diskontinuierlich erfolgt, unter Anwendung höherer Spannungen sich aufrecht erhalten läßt und der normale Glimmstrom wenigstens in größerer Stromdichte unmöglich wird. Kein Metall hält der Einwirkung stand vom Aluminium bis zum Platin, am besten erweist sich noch Iridium, das an Platin mit Gold angelötet und mit Glas so weit umschmolzen, daß nur das Iridium die Strombasis bilden kann, zwar sehr stark zerstäubt und dadurch unbrauchbar wird, aber weder dabei das Glas der Röhrenwandung angreift, noch eine Halogenverbindung bildet, die den weiteren Gasinhalt absorbiert, wie das bei anderen Metallen der Fall ist.

Wenn trotzdem frühere Beobachter sowohl die Ionisierung und spektrale Erscheinungen an Jod im Glimmstrom bei Verwendung von Platinelektroden bzw. Aluminiumelektroden verfolgen konnten, so gelang ihnen dies nur, weil sie erstens sehr schwache Ströme (< 1 Milliamp.) verwenden konnten und zweitens selbst hierbei durch beständiges Heizen eines Jodgefäßes große Mengen des Dampfes entwickelten, die ohne die vorgeschriebene Einwirkung unnötig wären, da der Dampfdruck des Jods bei Zimmertemperatur einige Zehntel Millimeter beträgt. Ohne konstante Stromverhältnisse und Ausschluß sekundärer chemischer Einflüsse erschienen weitere Untersuchungen zwecklos.

Meine Versuche, um Gleichstrombetrieb in den Halogenen in beliebiger Stärke herstellen zu können, hatten vollen Erfolg, als ich zur Verwendung von Kohleelektroden (Graphit) überging. Da die Halogene (vielleicht mit Ausnahme des von mir nicht geprüften Fluors) eine sehr geringe Affinität zu Kohlenstoff besitzen, so daß nur wenige leicht zerfallende Verbindungen bekannt sind, lassen sich Gleichstromröhren mit beliebigen Elektroden aus Kohle leicht herstellen, wenn man die Zuführungen von außen durch Platin so bewirkt, daß es in Glas eingeschmolzen, innerhalb der Röhre nur so weit blanke Oberfläche behält, wie zur Kontaktführung mit der Kohle nötig ist. (Platin wird von dem Halogen erst dann angegriffen, wenn es als Elektrode, besonders Kathode, benutzt wird. Um diese chemischen Angriffe zu vermeiden, wurden die Platinstifte in die Kohle versenkt eingeführt.)

Die Besorgnis, daß Kohleelektroden schwer zu entgasen

und Anlaß zu starken Verunreinigungen geben würden, erwies sich als unbegründet, doch mögen die technischen Einzelheiten an anderer Stelle mitgeteilt werden.

§ 5. Die positive Säule des Glimmstroms in Jod hat bei sehr schwachem Strom grünliche, dem Fluoreszenzlicht bei schwacher Erregung gleichendes Aussehen und zeigt bei kräftigem Strom gleich wie die Fluoreszenz in *stark* konzentriertem Lichtkegel (Sonnenlicht) ein gelbgrün bis weißes Aussehen, am ähnlichsten der Farbe, welches das kathodische Glimmlicht in ganz reinem Sauerstoff zeigt. Das Spektrum besteht aus zwei deutlich durch einen dunklen Zwischenraum im Grünblau getrennten Teil, von denen der eine — das hier in Frage kommende Bandenspektrum — im Grün beginnend ins Rot verlaufend aus den eingangs erwähnten linienreichen Banden besteht, die bei geringer Dispersion den Anschein eines kontinuierlichen Spektrums vortäuschen, während der andere selbst bei stärkster Dispersion kontinuierlich mit ungleichmäßig verteilter Intensität bleibt und keine Linien oder Liniengruppen erkennen läßt.[1]) Wie beträchtlich die Intensität dieser kontinuierlichen Spektrums sein muß, läßt die Reproduktion erkennen, bei der trotz enorm gesteigerter Absorption in dem großen Flintglasprisma und wachsender Dispersion die Intensität bis an die Durchlässigkeitsgrenze des Prismas merkbar bleibt und zweifellos ins Ultraviolett sich fortsetzt.

Zwischen beiden Teilen des Spektrums treten etwa 5 Linien auf, während in diesen selbst in richtig behandelten reinen Röhren niemals andere Linien und Verunreinigungen etwa von Kohle und anderen Stoffen bemerkbar waren. Die Stromstärke variierte zwischen 0,1 Amp. und 0,1 Milliamp. bei verschiedensten Röhrenquerschnitten; der Druck entsprechend einem Kathodendunkelraum von 3 mm bis 3 cm und die positive Säule ist bei allen Stromstärken ungeschichtet, während Schichtenbildung bei geringer Verunreinigung *sofort* einsetzt. Auffallend dabei ist der geringe Schichtenabstand.

Änderungen des Spektrums können sofort eintreten bei oszillatorischer Entladung, Wechselstrombetrieb, während bei dieser Arbeit nur Hochspannungsgleichstrom Verwendung fand.

Daß beide Teile des Spektrums voneinander ganz unabhängig sind bzw. verschiedene Anregungsbedingungen und

1) Vgl. Spektraltafel.

Träger haben, ist schon bei Betrachtung der anderen Teile der Strombahn wahrscheinlich. Während im negativen Glimmlicht außer diesen beiden Spektra eine Reihe Linien des Linienspektrums hervortreten, welches sich bei oszillatorischer Entladung mit Kapazitätseinschaltung leicht erhalten läßt[1]), zeigt das Kanalstrahlenlicht ein intensives Violettblau, entsprechend dem kontinuierlichen Spektrum der positiven Säule. Im Spektroskop ist der grünrote Teil, das „Bandenspektrum" nur bei hohen Stromstärken und hohem Druck eben bemerkbar, während mit abnehmendem Druck das eigentliche blauviolette Kanalstrahlenlicht überbleibt. (Linien treten in ihm nicht zahlreich und intensiv hervor.)

§ 6. Es war darum erforderlich, die positive Säule im Magnetfelde zu untersuchen, um zunächst über die S. 674 bis 675 angeführten Punkte 8—11, besonders den Punkt 11, Klarheit zu schaffen, wonach anzunehmen war, daß das Bandenspektrum bei so intensiver Anregung besonders stark magnetischer Einwirkung unterliegen würde.

I. Positive Säule in transversalem Magnetfeld.

Bei den Versuchen wurde die Konstanz des Hochspannungsgleichstroms beständig kontrolliert, jede Änderung durch das Magnetfeld mittels Milliamperemeter und statischem Voltmeter beobachtet, spektrale Änderungen spektroskopisch verfolgt und der Gasdruck an der Länge des Kathodendunkelraums gemessen. Kathode und Anode waren magnetisch geschützt und das Streufeld in der positiven Säule wurde berücksichtigt. Es ergab sich folgendes:

a) In engen Röhren: Ohne Magnetfeld nur Bandenspektrum, wie oben geschildert, gleichgültig, welche Stromstärke verwandt wurde (Variation um das 40fache). Der kleinste Durchmesser der Röhren betrug 0,5 mm. In ihm brachte schon ein Magnetfeld von 1000 Gauss Veränderungen des Spektrums hervor, die in weiteren Röhren erst bei höheren Feldern eintreten. Es treten neben den schwächer werdenden Banden Linien hervor, die über das ganze sichtbare Spektrum verteilt sind. Mit wachsendem Magnetfeld verschwinden die Banden immer mehr, zuletzt der rote Teil, die Entladung im Interferrikum zieht sich fadenartig zusammen und leuchtet

1) Vgl. Spektraltafel.

nur in blaugrünem Licht des Linienspektrums, während die positive Säure außerhalb des Magnetfeldes noch weiterhin Bandenspektrum zeigt. In weiteren Röhren (Durchmesser 1,6 und 5 mm) bewirkt ein Magnetfeld von 1000 Gauss zunächst durch Zusammendrängung der Strombahn infolge der elektromagnetischen Ablenkung eine stärkere Gesamtemission des Bandenspektrums, doch treten bei Feldverstärkungen auf das Zwei- bis Dreifache qualitativ die gleichen Erscheinungen hervor wie zuvor. Der Vergrößerung des Querschnittes analog wirkt Vermehrung des Dampfdruckes, d. h. bei gleicher Stromstärke geringere Wirkung des Magnetfeldes. Eine Steigerung der Stromstärke dagegen bei sonst gleichartigen äußeren Bedingungen vergrößert die magnetische Wirkung.[1])

b) In weiten Röhren (16 mm Durchmesser). Wenn der Rohrdurchmesser das eigentliche Magnetfeld zwischen den kegelförmigen Polen an Größe übertrifft, findet man zwar analoge Wirkungen, wie oben. Nur bedarf es stärkerer Felder, doch ist gleichzeitig zu beobachten, daß das Magnetfeld irgendeine mechanische Wirkung ausübt, die durch die Bewegung der Ionen allein nicht erklärbar ist. Die positive Säule wird nicht nur seitlich abgelenkt, sondern es stellt sich messerscharf senkrecht zum Feld eine leuchtende Erscheinung ein, die bisweilen durch eigenartige zuckende Bewegungen gestört wird. Eine genaue Schilderung ist kaum möglich. Die ganzen Beobachtungen zeigen, daß außer der direkten Einwirkung auf den Träger des Bandenspektrums bei der Lichtemission, wie es bei der Fluoreszenz gefunden wurde, eine zweite mechanische Wirkung auf den Träger eintritt, die das Phänomen kompliziert.

c) Die sekundären Wirkungen des Magnetfeldes auf den Strom: Ablenkung, vermehrte Stromdichte durch Verkleinerung des Querschnittes, Vergrößerung des Potentialgradienten genügen in keiner Hinsicht zur Erklärung der beobachteten Er-

---

1) Vgl. Spektraltafel. Die Tafel läßt das Spektrum von der positiven Säule ohne Magnetfeld III und das allmähliche Verschwinden der Banden mit gesteigertem Magnetfeld IV u. V erkennen. VI gibt das Linienspektrum bei Flaschenentladung wieder. VII u. VIII zeigen bei geringer Dispersion das Gesamtspektrum vom Rot bis Violett VII ohne, VIII mit schwachem Magnetfeld. I u. II stellen das Fluoreszenzspektrum bei verschiedener Anregung unter dem magnetischen Einfluß dar.

scheinung. Da man durch Variation der Stromdichte und des Querschnittes und durch Verengerung des Rohres auch ohne Magnetfeld den Potentialgradienten um gleichwertige Beträge verändern kann, wie sie an den Instrumenten ablesbar waren, ließ sich feststellen, daß durch keine irgendwie mögliche Abänderung, Wirkungen und Erscheinungen von ähnlicher Art auftreten, wie sie durch das Magnetfeld hier erzeugt werden. Besonders wurde auch geprüft, ob durch das Magnetfeld der Entladungscharakter nicht gestört wurde (= keine oszillatorischen Entladungsschwingungen).

II. Die positive Säule im longitudinalen Feld.

In Röhren von gleichmäßigem Querschnitt brachten die verfügbaren Felder (bis 5000 Gauss) keine spektrale Änderung wie oben hervor, die elektrische Wirkung bestand in Zusammenschnürung der Säule, Verringerung des Potentialgradienten und dadurch gesteigerter Stromdichte, infolgedessen vermehrter Helligkeit des Spektrums. Gibt man indes der Röhre zwischen den Magnetpolen eine kugelartige Erweiterung, so treibt schon ein schwaches Magnetfeld senkrecht zur Feldrichtung eine im Licht des Bandenspektrums leuchtende „Scheibe" hervor. Die Versuchsanordnung und Beobachtung geschah in gleicher Weise wie dies kürzlich an anderer Stelle bei einer Spektraluntersuchung des Stickstoffs dargelegt wurde.[1]) Für technische Einzelheiten, die spektroskopischen Vergleiche, Variation der Versuchsbedingungen usw. mag hierauf verwiesen werden.

Der einzig wesentliche Unterschied in dem Leuchten dieser „diamagnetischen Scheibe" beim Jod und beim Stickstoff besteht darin, daß letztere völlig mit dem Spektrum der negativen Glimmschicht übereinstimmt, während beim Jod nur das grünrote Bandenspektrum, aber keine Spur der Linien hervortritt, die in der negativen Glimmschicht beim Jod zu beobachten sind.

§ 7. Den „Diamagnetismus", d. h. die mechanische Bewegung der leuchtenden Jodmoleküle aus dem Magnetfeld heraus nach Stellen geringster magnetischer Kraft, die sich an fluoreszierendem Jod ebensowenig wie an nichtleuchtendem Joddampf hatte feststellen lassen, auf andere Weise nachzuweisen, war das Ziel folgender Versuche. Es galt zu zeigen,

1) W. Steubing, Physik. Zeitschr. 20. S. 512. 1919.

daß die senkrecht zum Feld sich bewegenden Moleküle, wie aus den optischen Erscheinungen zu folgern ist, tatsächlich einen Druck in dieser Richtung ausüben.

Die Schwierigkeiten liegen darin, daß es erforderlich ist, die Bewegung eines Körpers unter dem Druck der Moleküle senkrecht zum Feld zu zeigen, während der Körper ohne die Jodmoleküle diese abstoßende Wirkung nicht erfahren darf, er darf also nicht selbst diamagnetisch sein. Da es ganz unmagnetische Körper nicht gibt, diamagnetische nicht brauchbar sind, kann ein paramagnetischer Körper die Bewegung senkrecht zum Feld nur dann zeigen, wenn seine paramagnetische Eigenschaft kleiner ist als der diamagnetische Druck der Moleküle. Endlich sind bei metallischen Körpern etwaige Störungen des Potentialverlaufs und sekundäre elektrische Einflüsse ins Auge zu fassen.

Ich führte die Versuche in folgender Weise aus.

Eine Entladungsröhre mit Kohleelektroden wurde, wie zuvor angegeben, durch die Bohrung der Magnetpole geführt und besaß im Interferrikum eine kugelförmige Erweiterung, wie bei den analogen optisch-elektrischen Beobachtungen. Der obere Teil dieser abgeflachten Kugel war ausgeblasen und mit einem senkrecht stehenden Rohr verschmolzen, das einen mit Quecksilber zu dichtenden Schliff trug. (Quecksilberjodid besitzt keinen nennenswerten Dampfdruck und darum waren Quecksilberdichtungen brauchbar.) In diesen Schliff ließen sich andere Schliffstücke einsetzen, die den Versuchskörper enthielten. Als solcher bewährte sich ein dünnes Glasplättchen — vom Glasbläser möglichst dünn ausgeblasen, annähernd eben und ungefähr rechteckiger Gestalt etwa 3×5 mm. — Die Dicke betrug weniger als $^3/_{100}$ mm. Dieses Glasplättchen war an einen möglichst dünn gezogenen Glasfaden von mehr als 60 cm Länge angeschmolzen und dieser im oberen Schliffrohr eingeschmolzen. So ließ sich dieses Glasplättchen in die Kugel einführen und durch schwache Neigung des senkrechten Rohres in jeder Stelle der Kugel freischwebend einstellen.

Folgende Figuren geben ein Bild der Anordnung von oben und von der Seite (senkrecht zum Feld und Strom) her gesehen (vgl. Fig. 1a u. b).

Die Beobachtungen ergaben — mit und ohne Glasplättchen — bei Stromdurchgang und Erregung des Magneten das Ein-

setzen der diamagnetischen schwachen Scheibe, die sich nur in den Ansatz nach oben hin verbreiterte. *Das Glasplättchen störte die Entladung in keiner Weise.* Die Wirkung des Magneten auf das Plättchen war folgende.

Hing es im Zentrum der Kugel, in der Strombahn, so war keinerlei Wirkung vorhanden. Hing es exzentrisch — rechts oder links von der Strombahn in der Kugel, aber in gleicher Höhe mit der positiven Säule, so erfolgt *ohne Stromdurchgang stets eine Einstellung des Plättchens zum Kugelmittelpunkt,* falls das Magnetfeld genügende Stärke besaß.

Bei schwachem Feld (1000 Gauss) war die anziehende Wirkung noch merklich klein, bei einem Feld von etwa 5000 Gauss betrug die Anziehung in die Kugel hinein schon mehrere Millimeter. *Dabei war es gleichgültig, ob die Kugel ganz evakuiert war — aller*

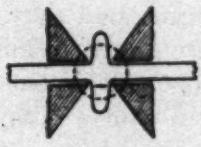


Fig. 1a.

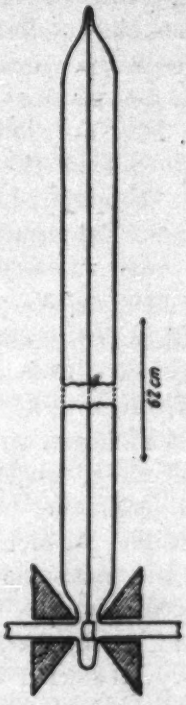


Fig. 1b.

Joddampf fortkondensiert — oder ob sich Dampf von Zimmertemperatur in der Röhre befand.

Bei Stromdurchgang änderte sich die Erscheinung sofort.

Bei einem Magnetfeld von 1000 Gauss und etwas darüber erfolgte deutlich Ausweichung nach außen. Bei weiter gesteigertem Magnetfeld kehrte die Einstellung um und das Plättchen wanderte nach innen, wie früher ohne Entladung. Die diamagnetische Verschiebung war klein (weniger als 1 mm), aber durch die Beobachtung einer Visiermarke deutlich zu beobachten. Mit wachsendem Strom und bei der später be-

schriebenen Anordnung war die Wirkung wesentlich größer (> 1 mm). Reinheit der Röhre bzw. des Joddampfes ist bei diesen Versuchen Bedingung.

Die beobachteten Wirkungen lassen sich leicht an der Hand einer Kurvendarstellung übersehen. In der Fig. 2 bedeutet die doppelt gezogene Linie die paramagnetische Anziehung des Plättchens mit wachsendem Feld und die einfache Kurve die diamagnetische Abstoßung durch den Moleküldruck. Während erstere proportional dem Felde wächst, wird letztere schon bei schwachem Feld asymptotisch einem Grenzwert zu-

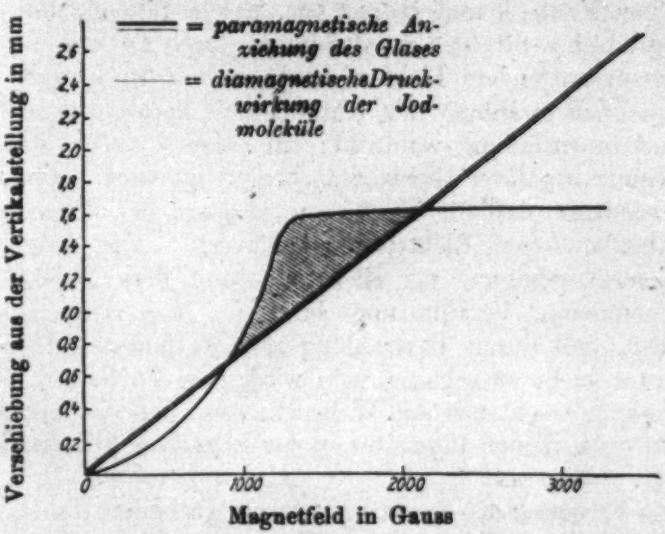


Fig. 2.

streben, der erreicht ist, wenn das Magnetfeld genügt, alle vorhandenen bzw. sich bildenden diamagnetischen Jodmoleküle aus der positiven Säule herauszuschaffen. Dieser Grenzwert wird natürlich abhängig sein von der Geschwindigkeit der Moleküle, d. h. der freien Weglänge, dem Gasdruck einerseits und der Masse der Moleküle anderseits. Es leuchtet ein, daß man die diamagnetische Bewegung des Glasplättchens nur dort wird beobachten können, wo die Druckkurve der Moleküle die paramagnetische Grade des Glases in dem gestrichelten Raum überhöht.

§ 8. Vorstehende Versuche erweisen, daß tatsächlich die Träger dieses Bandenspektrums eine mechanische Bewegung

senkrecht zum Feld und Strom erfahren, wenn die Anregung des Leuchtens als Folge der Ionisierung stattfindet. Mit der gleichen Versuchsanordnung kann man keine solche Bewegung feststellen, wenn die Jodmoleküle nur durch Fluoreszenz erregt sind und, wie schon erwähnt, zeigt nichtleuchtender Joddampf die Wirkung ebenfalls nicht. Gasionen als solche müßten aber in dieser Anordnung durch das Magnetfeld axial gesammelt werden.

Wichtige Anhaltspunkte, welcher Art die Erregung des Spektrums hier ist, liegen in den eingangs erwähnten Resultaten von Franck und Hertz vor, welche fanden, daß Ionisierung durch α-Strahlen im Joddampf durch Bestrahlung mit fluoreszenzerregendem Licht nicht beeinflußt wird, wohl aber eine solche Bestrahlung den Kathodenfall herabsetzt und die Glimmstromentladung verstärkt: ein Zeichen dafür, daß die Entstehung negativer Elektrizität begünstigt wird. Man kann also vermuten, daß die Fluoreszenzerregung der Jodmoleküle die Abgabe freier Elektronen begünstigt, wie umgekehrt die Wiedervereinigung der Elektronen mit dem Molekül zur Bandenemission Veranlassung bildet. Man kann daraus schließen, daß durch Bestrahlung mit Kathodenstrahlen das Spektrum leicht zu erhalten sein wird, eine Folgerung, die in Übereinklang steht mit der Wahrnehmung, daß das Spektrum in außerordentlicher Intensität in der negativen Glimmschicht auftritt.

Die Erregung des Spektrums durch Kathodenstrahlen läßt sich in einfacher Weise zeigen. Benutzt man eine Röhre mit plattenförmigen den Querschnitt füllenden Kohleelektroden, die eine zentrale Durchbohrung tragen, so leuchtet — bei höherem Vakuum — der Raum hinter der Kathode nur im blauvioletten Kanalstrahlenlicht (= kontinuierliches Spektrum), während sich hinter der Anode ein grünlich leuchtendes Büschel (= Bandenspektrum) abzeichnet (besonders, wenn der Dampfdruck dadurch größer gemacht wird, daß man durch einen Ansatz mit festem Jod unterhalb der Anode Joddampf einströmen läßt, der oberhalb der Anode kondensiert und weggepumpt wird).

Dieses Leuchten des Bandenspektrums verschwindet sofort, sobald man durch Annäherung eines Stabmagneten die Kathodenstrahlen ablenkt, daß sie nicht durch die durchbohrte

Anode treten können. Bei undurchbohrter Anode oder bei eigentlicher Glimmstromentladung ist der Raum hinter der Anode stets dunkel.

§ 9. Faßt man die bisher gewonnenen Ergebnisse dieser Arbeit und früherer Untersuchungen, deren Hauptpunkte auf S. 674—675 aufgeführt sind, zusammen, um ein einheitliches Bild von dem Emissionsvorgang des Bandenspektrums und der mechanischen Wirkungen zu erhalten, so kommt man zu folgenden Schlußfolgerungen.

1. Das Bandenspektrum ist dem Jodmolekül zuzuordnen. Dafür spricht seine Erzeugungsmöglichkeit durch Fluoreszenz, ohne gleichzeitige Ionisierung und Dissoziation, sowie sein Auftreten bei Ionisierung dort, wo geringe Energie aufgewendet wird (langsame Kathodenstrahlen, positive Säule). Bei größerer Energie (Induktorbetrieb mit Kapazität usw.) verschwindet es, und macht dem Linienspektrum Platz.

2. Das Bandenspektrum wird erzeugt durch die Vereinigung (in bestimmter Bahn) eines negativen Elektrons mit dem Molekül. Dabei ist es für den spektralen Charakter, die Linienstruktur, gleichgültig, ob das Elektron aus dem Molekülverband selbst stammt (Fluoreszenz) oder von außen als freies Elektron (Kathodenstrahl) angelagert wird.

3. Ein äußeres Magnetfeld wirkt bei jeder Erzeugungsart ein, in dem es die (Wieder-)Anlagerung beschleunigt. Der Intensitätsverlauf des Spektrums ändert sich, die Leuchtzeit nimmt ab und der Verstärkung des Feldes proportional scheidet ein bestimmter gleicher Prozentsatz der Leuchtträger für die Gesamtemission aus (vgl. hierzu die folgenden Versuche).

4. Während bei Fluoreszenzerregung — solange also das Elektron niemals aus dem Molekülverband ausscheidet und in seiner Anziehungssphäre bleibt (keine Ionisierung) — das Magnetfeld keine mechanische Wirkung auf das System Jodmolekül-Elektron ausübt, tritt diese zweite Wirkung dazu, falls das Elektron aus vollständiger Ionisierung als freies Elektron dem Jodmolekül sich anlagert. Während der Anlagerung unter gleichzeitiger Emission des Bandenspektrums erfährt das System eine Reaktion derart, daß es bestrebt ist, sich der magnetischen Einwirkung zu entziehen: Es wird diamagnetisch und bewegt sich senkrecht zur magnetischen Feldrichtung. *In seiner elektrischen Wirkung nach außen hin muß es als neutral*

angesehen werden, da es die Bewegung der Ionen nicht mitmacht; von dem neutralen im eigentlichen Sinn unterscheidet es sich dadurch, daß dieses sich nicht diamagnetisch verhält.

5. Diese diamagnetische Einwirkung ist dort, und *nur* dort zu beobachten, wo das sein Bandenspektrum aussendende Jodmolekül aus dem Zustand von Ionisierung zum neutralen nichtleuchtenden *Zustand übergeht, d. h. im Zustand der partiellen Ionisierung.* Daraus, daß die diamagnetische Wirkung sich optisch und mechanisch durch Druckwirkung zeigen läßt, geht hervor, daß der Übergang von Ionisierung zum Neutralmolekül nicht momentan stattfindet, vielmehr eine längere Zeit sich das Jodmolekül im Zustand der partiellen Ionisierung befindet. Es ist verständlich, daß derartig partiell ionisierte Moleküle durch Bestrahlung mit Fluoreszenz erregendem Licht vollständig ionisiert werden können (Versuche von Frank und Westphal, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 1912, S. 159).[1])

§ 10. Wir hätten demnach beim Jodmolekül drei Zustände zu unterscheiden:

a) Vollständige Ionisierung (Beginn der Bandenemission), Ionen und Elektronen werden in normaler Art magnetisch abgelenkt.

b) Partielle Ionisierung (Bandenemission, während der Vereinigung von Molekül und Elektron) größte magnetische Wirkung mechanisch und optisch auf das emittierende System, keine freie Ladung.

c) Neutralisierung (letzte Phase der Vereinigung von Molekül und Elektron), keine mechanisch magnetische, nur noch optische Einwirkung: Fluoreszenzeinfluß des Magnetfeldes.

Hiervon sicher am bemerkenswertesten ist der zweite Zustand der partiellen Ionisierung hinsichtlich seiner Entstehungsart, seines elektrischen und magnetischen Verhaltens und der Zeitdauer, in der die Bandenemission stattfindet.

§ 11. Die angeführten Folgerungen lassen vermuten, daß günstigste Bedingungen für Entstehung und Anzahl derartiger Molekülgebilde und damit auch für ihre Untersuchung dort

1) J. Stark hat wohl zuerst die Bandenemission und Fluoreszenz mit der „Lockerung" eines Valenzelektrons in Verbindung gebracht und die dadurch beeinflußte oder entstehende Ionisierung vorausgesagt.

sein werden, wo möglichst zahlreiche negative Elektronen (Kathodenstrahlen) arf ionisierte oder neutrale Jodmoleküle auftreffen, d. h. in der negativen Glimmschicht. Ich beschloß daher, besonders die negative Glimmschicht bzw. die Entladung an der Kathode im Magnetfeld zu untersuchen.

a) Longitudinales Feld.

Die benutzte Entladungsröhre war zylindrisch 1 cm weit und durch die durchbohrten Pole so geführt, daß die Anode, von der die Luftpumpenleitung und Verbindung zum Jodgefäß ausging, außerhalb des Magneten, die Kathode im Interferrikum sich befand, wie aus folgender Skizze zu ersehen ist, die die Form der Kohlekathode erkennen läßt (Fig. 3).

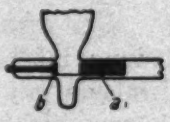


Fig. 3.

Diese besteht aus zwei Teilen, dem 25 mm langen, 7 mm starken Kohlerohr *a*, das im Polschuh 1 ganz enthalten ist und der die Stromzuleitung vermittelnden Kohleplatte *b*, die ihrereseits durch einen eingesteckten Platindraht durch die Bohrung des Polschuhes 2 den Strom nach außen weiterleitet. Zwischen beiden war die kugelförmige Erweiterung mit dem Schliffaufsatz, um nach Bedarf den Glasfaden mit dem Versuchsplättchen einsetzen zu können, wie bei den analogen Versuchen in der positiven Säule. Die leitende Verbindung zwischen Rohr und Platte durch die Kugel hindurch wurde durch zwei sorgfältig eingesteckte dünne Kohlefäden von 0,25 mm Dicke (Glühlampenfäden) bewirkt (vgl. Figur). Bei dieser Anordnung war das Feld in der Kugel ziemlich homogen und das Glasplättchen zeigte keinerlei elektrische Aufladung, Anziehung oder Abstoßung. Meist war die Kathode zur Erde abgeleitet.

Die erwartete diamagnetische Erscheinung zeigte sich in verstärktem Maße. War der Gasdruck nicht sehr niedrig — in dem Falle fand sich die Kugel nur durchsetzt von blauviolettem Kanalstrahlenlicht —, so trat aus dem Kohlerohr diamagnetisch auseinandergezogen das grüne Leuchten des Bandenspektrums unmittelbar an die Glaswand (zum Rohr hin) gepreßt, in den Ansatz weit hinein verfolgbar und im Kugeläquator zurückgeworfen, so daß man den Eindruck einer Art Wirbelbewegung hat. Das Glasplättchen zeigte nach dem Einsetzen auch den diamagnetischen Druck in weitaus größerem Maße wie bei den Versuchen in der positiven Säule an und —

da man es durch schwaches Neigen des Schliffrohres an beliebige Stellen der Kugel bringen kann — ließ sich auch die Reflexion der Moleküle in der Kugel durch seine Bewegung mechanisch verfolgen.

Verschließt man das Kohlerohr vor der Kugel durch eine eingepaßte Kohlenplatte, die mit einer Anzahl feiner Löcher versehen ist, so ist stets nur unabhängig vom Gasdruck das blauviolette unabgelenkte Kanalstrahlenbündel zu bemerken, kein Bandenleuchten und keine diamagnetische Leuchterscheinung.

b) Transversales Feld.

Um sekundäre magnetische Einwirkungen auf die Entladung möglichst auszuschließen, wurde die Röhre bis zur Kathode mit einem starken magnetischen Schutzmantel von 1,5 cm Weicheisen umgeben. Die Kathoden hatten meist zylindrische Gestalt von beistehender Form und ihre Anordnung und die Form der Röhren, die 28 mm Durchmesser besaßen, ist aus der Fig. 4 zu entnehmen. Das dort bezeichnete, im Innern angebrachte, von der Kathode durch 1 mm Abstand getrennte 6 cm lange Netz bestand aus feinmaschigem Platinnetz und besaß gesonderte Zuleitung nach außen.

Zunächst sei bemerkt, daß bei Erregung des Magnetfeldes, wenn letzteres so weit unterhalb der Kathodenplatte sich befand, daß nicht etwa noch das Streufeld von unten her bis in die Kathodenbohrung hinein wirken konnte, keine andere Einwirkung auf das blauviolette Kanalstrahlenbündel erfolgte, wie die bekannte Ablenkung.

Befindet sich dagegen das Magnetfeld so nahe unter der Kathodenebene, daß die magnetische Einwirkung bis oberhalb der Bohrung erfolgen kann, so beobachtet man folgende durch die Skizze in der Fig. 6 erläuterte Erscheinung.

In Richtung des Kanalstrahlenbündels und senkrecht zum Magnetfeld zieht sich unterhalb der Durchbohrung der Kathode eine sehr intensive Leuchterscheinung, die das Bandenspektrum emittiert und, wie aus der Zeichnung zu ersehen ist, sich fächerartig unterhalb der Öffnung teilt, um an der Wandung entlang nach unten zu gleiten. Das Leuchten ist so stark, daß das Kanalstrahlenlicht dagegen verblaßt.

Im übrigen zeigt weder die Entladungsröhre oberhalb des Magnetfeldes in ihrem spektralen Aussehen eine Änderung,

noch sind in Stromstärke und Spannung wesentliche Einwirkungen bemerkbar.

Die Erscheinung ist von folgenden Faktoren abhängig:

1. Bei niedriger Zimmertemperatur (Kathodendunkelraum etwa 5 mm) ist die Erscheinung erst bemerkbar bei einem Feld von etwa 2000 Gauss (Feld dicht an der Kathode).

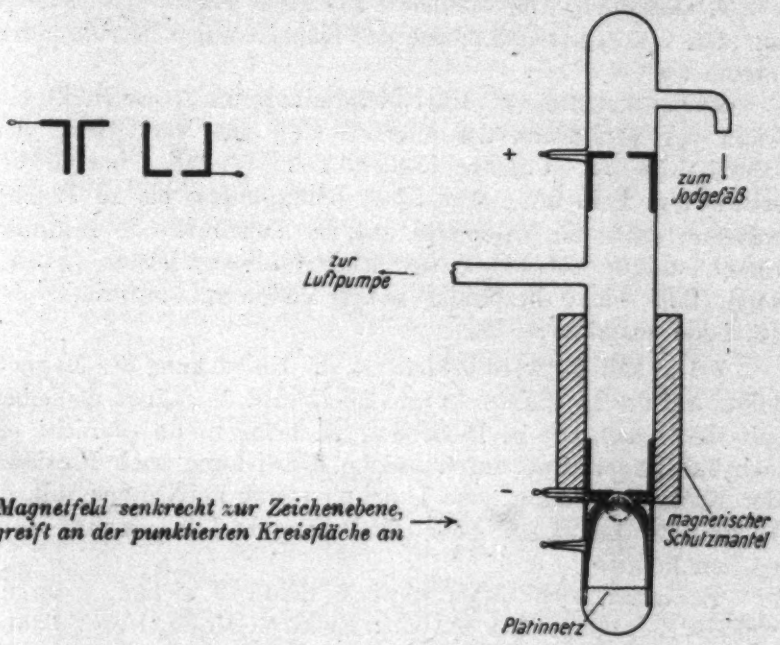


Fig. 4.

2. Von der Belastung der Röhre ist sie nur so weit abhängig, als stärkerer Strom auch stärkeres Leuchten der diamagnetischen Erscheinung bedeutet.

3. Abnehmender Gasdruck (größerer Kathodendunkelraum) erfordert stärkeres Magnetfeld, damit das Leuchten einsetzt.

4. Dieselbe Wirkung hat bei konstantem Druck wachsender Abstand des Magnetfeldes von der Kathode.

5. Die Erscheinung wird *nicht beeinflußt*, wenn das Netz unterhalb der Kathode, an dessen Maschen das Leuchten vorbeigleitet, zur Erde geleitet ist, mit der Kathode verbunden ist oder ein besonderes positives und negatives Potential erhält (letzteres schwankte zwischen + und — 100 Volt).

6. Der einzig bemerkbare Einfluß, falls das Netz bestimmtes Potential besitzt, besteht in sekundärer Weise, in dem je nach beschleunigendem oder verzögerndem Potential der Dunkelraum kleiner oder größer, das Kanalstrahlenleuchten stärker oder schwächer, die Leuchterscheinung ebenfalls stärker oder schwächer wird.

7. Das durch Galvanometer zur Erde geleitete Netz zeigt nur den von positiver Ladung der Kanalstrahlen herrührenden Strom an.

8. Bei konstantem Kathodendunkelraum (Gasdruck) bewirkt ein Verstärken des Magnetfeldes eine Verkürzung der Leuchtbahn der diamagnetischen Teile (dieselbe betrug bei schwachem Feld unter günstigen Bedingungen bis zu 12 cm), während dafür die Intensität auf der Leuchtstrecke zunimmt (beschleunigte Anlagerung des Elektrons = verkürzte Leuchtzeit), falls nicht beständig neuer Joddampf unterhalb der Kathode zuströmt.

§ 12. Man ist wohl berechtigt, die Einwirkung des Magnetfeldes auf die Leuchtstrecke und überhaupt die Länge derselben mit der Leuchtzeit in Beziehung zu bringen, da es nicht ersichtlich ist, warum, durch welche Einwirkung nach Passieren der Kathodenöffnung neue Leuchterregung stattfinden soll, da elektrische Ladungen oder Umladungen dabei keine Rolle spielen können.

Es lassen sich daher gewisse Schlüsse ziehen, während welcher Zeit ein solches System: Elektron-Molekül im Zustand seiner Vereinigung, das Bandenspektrum emittiert.

Die in Richtung des Kanalstrahlenbündels laufende Geschwindigkeitskomponente ist so groß, daß sie das betreffende Jodmolekül schon besessen haben muß, als die diamagnetisch ablenkende Wirkung eintrat, — weil letztere zunächst zurückstoßend sein müßte — d. h. wir haben es mit der Geschwindigkeit zu tun, wie sie positive Ionen im Kathodenfall bzw. die Kanalstrahlenteilchen und mitgerissenen neutralen Atome besitzen.

Aus zahlreichen Kanalstrahlenarbeiten von W. Wien, Königsberger, Dechend und Hammer, J. J. Thomson u. a. m. betreffend die Umladungsvorgänge wissen wir, daß die freie Weglänge der Ionen und Moleküle im Kanalstrahlenbündel von gleicher Größenordnung ist, wie sie hier bei der

Leuchtstrecke beobachtet wurde. Legt man nun diesen Jodmolekülen eine Geschwindigkeit bei, wie sie die direkten Geschwindigkeitsmessungen an Kanalstrahlen ergeben haben: $2{,}5 \times 10^8$ cm in der Sekunde, so ergibt sich als maximale Leuchtzeit eines solchen partiell ionisierten Jodmoleküls (Leuchtweg 12 cm) etwa 5×10^{-8} Sek., d. h. die Zeit von Beginn der Anlagerung des freien Elektrons bis zur vollständigen Vereinigung und Neutralisierung des Jodmoleküls, während welcher das Bandenspektrum emittiert werden kann.

Es ist nach den hier entwickelten Anschauungen klar, daß bei der Fluoreszenzerregung, bei der nicht ein „freies" Elektron, sondern aus dem Molekül „gelockertes" das Bandenspektrum bei der Wiederanlagerung aussendet, die Leuchtdauer eine wesentlich kürzere sein wird.

Da ist es interessant, daß bei Versuchen, die Abklingungszeit der Fluoreszenz beim Joddampf zu bestimmen, O. Stern und M. Volmer[1]) diese Abklingungszeit, d. h. die Zeit von Beginn der Bandenemission bis zur Abnahme auf den e-ten Teil zu 2×10^{-8} Sek. berechnet haben, also eine Zeit, die etwa halb so groß ist, als sie hier bei elektrischer Erzeugung des gleichen Spektrums gefunden wurde.

Schluß.

Im vorstehenden ist zu zeigen versucht worden, daß man eine Reihe von Erscheinungen, die bei der Fluoreszenz des Joddampfes, seinem Verhalten in ionisiertem Zustand und bei Einwirkung magnetischer Kräfte beobachtet worden sind, ohne daß einfache Erklärungen dafür vorliegen, zwanglos deuten kann, wenn man annimmt, daß das Jodmolekül außer in ionisiertem und ganz neutralem Zustand noch eine längere Zeit in einem Zwischenstadium sich befindet und während dieser Zeit der Umwandlung, die auf 5×10^{-8} Sek. bestimmt wurde, ein Bandenspektrum emittiert.

Eine Anzahl neuer Versuche dienten zur Stütze dieser Auffassung.

Aachen, Physik. Institut d. Techn. Hochschule.

1) O. Stern u. M. Volmer, Physik. Zeitschr. 20. S. 183. 1919.

(Eingegangen 2. November 1920.)

Erläuterungen zu der Spektraltafel des Jods.

Lange Wellen links.

I Fluoreszenzspektrum bei Anregung durch die gelben und die grüne Quecksilberlinie: Resonanzspektrum: *a* ohne, *b* mit Magnetfeld (20000 Gauss).

II Fluoreszenzspektrum bei Anregung mit Bogenlicht: Vollständiges Bandenspektrum: *a* ohne, *b* mit Magnetfeld wie bei I. (Die Quecksilberlinien als Vergleichsspektrum.)

III Bandenspektrum von der positiven Säule bei gleicher Dispersion wie in I und II. Das Spektrum endet nach kurzen Wellen im Grün.

IV Dasselbe Spektrum der positiven Säule, aber der mittlere Teil in schwachem Magnetfeld (2000 Gauss).

V Dasselbe mit verstärktem Feld; nur der rote Teil ist noch angedeutet.

VI Dieselbe Jodröhre mit parallel geschalteter Kapazität und Induktorentladung: Nur Linienspektrum, gleiche Dispersion wie voriges.

VII u. VIII Dasselbe Spektrum (links) mit geringer Dispersion nebst dem violetten Teil des Spektrums der positiven Säule (= kontinuierlichem Spektrum). VII ohne, VIII mit schwachem Magnetfeld (beginnendes Verschwinden der Banden im Grün, beginnende Linien im ganzen sichtbaren Spektrum).

2. *Zur Molekulartheorie der Brechung, Reflexion, Zerstreuung und Extinktion;* von *W. Bothe.*

In meiner 1914 erschienenen Dissertation[1]) habe ich gezeigt, daß „Brechung und Reflexion beim Auftreffen einer ebenen Lichtwelle aus dem Vakuum auf ein Dielektrikum in folgendem bestehen: Durch die auffallende Welle wird jedes Molekül des Mediums zu Schwingungen angeregt und sendet daher eine Kugelwelle aus. Diese wirkt wieder in genau derselben Weise auf die übrigen Moleküle, so daß diese Wellen dritter Ordnung aussenden usf. *Im Innern des Mediums bildet sich aus allen diesen Kugelwellen zusammen mit der einfallenden Welle durch Interferenz die „gebrochene" Welle, während außerhalb des Mediums durch Interferenz der Kugelwellen allein untereinander die „reflektierte" Welle entsteht.*"

Die kursivierten Worte sind der Ausdruck des auf Grund einer späteren Arbeit von Oseen[2]) nach diesem benannten „Auslöschungssatzes".[3]) Da trotz des gemeinsamen Grundgedankens, der sich später auch in einer Reihe weiterer Arbeiten von Ewald[4]), Lundblad[5]) u. a. findet, die Fragestellung und daher auch die Methode in beiden Arbeiten eine verschiedene ist, soll im folgenden der Inhalt der wichtigsten Paragraphen meiner Arbeit wiedergegeben werden.[6]) Daran anknüpfend soll alsdann einiges über Zerstreuung und Extinktion hierher Gehörige nachgetragen werden.

1) W. Bothe, Beiträge zur Theorie der Brechung und Reflexion. Dissert. Berlin 1914.

2) C. W. Oseen, Ann. d. Phys. **48**. S. 1. 1915.

3) H. Faxén, Zeitschr. f. Phys. **2**. S. 218. 1920.

4) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. **49**. S. 1 u. 117. 1916.

5) R. Lundblad, Ann. d. Phys. **57**. S. 183. 1918.

6) Erst jetzt nach meiner Rückkehr aus dem feindlichen Ausland habe ich die Möglichkeit dazu.

1. *Grundgleichungen.* Die folgenden Betrachtungen unterscheiden sich von denen Oseens dadurch, daß hier der Fall eines durch eine Ebene begrenzten Dielektrikums bei gegebener äußerer Erregung behandelt wird, das Hauptaugenmerk also auf den Vorgang der Brechung und Reflexion gerichtet wird, während bei Oseen das äußere Feld so angesetzt wird, daß allgemein der Einfluß der Grenzflächen aus der Rechnung verschwindet, womit das Hauptgewicht auf die Fortpflanzung einer Welle im Innern fällt.

Es sollen nur solche homogenen isotropen Dielektrika betrachtet werden, bei welchen die Molekelschwerpunkte reine Wahrscheinlichkeitsverteilung aufweisen. Damit sind nicht nur Kristalle ausgeschlossen, sondern auch solche Körper, bei welchen die Molekelabstände von der Größenordnung der Molekeldimensionen (molekularen Wirkungssphäre) sind, denn bei solchen ist wegen der Bedingung, daß der Abstand zweier Molekelschwerpunkte niemals unter eine gewisse Grenze herabgehen kann, überhaupt wegen der Anwesenheit intermolekularer Kräfte die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schwerpunkte stark gestört, daher also eine so einfache Mittelwertsbildung, wie sie zu unseren Grundgleichungen führt, nicht zulässig. Streng genommen gelten also die Betrachtungen nur für unendlich verdünnte Gase. Der Einfachheit halber soll nur eine Molekelgattung mit einer Eigenfrequenz angenommen werden.

Bezeichnungen:

ω_0 Eigenfrequenz.

$\mathfrak{f}$ mittleres dielektrisches Moment einer Molekel.

$\mathfrak{E}$ mittlere elektrische Feldstärke.

$\mathfrak{E}'$ mittlere erregende Feldstärke.

$\mathfrak{H}$ mittlere magnetische Feldstärke.

$\mathfrak{E}^{(0)}\mathfrak{H}^{(0)}$ „äußere" Feldstärken.

N Dichte der Molekeln.

$(x\,y\,z)$ der Aufpunkt.

$(\xi\,\eta\,\zeta)$ ein Integrationspunkt.

$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$

$d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta.$

Die Grundgleichungen unseres Problems sind[1]):

(1) $\ddot{\mathfrak{f}} + k\dot{\mathfrak{f}} + \omega_0^2 \mathfrak{f} = a\mathfrak{E}'$ (k und a Molekularkonstante).

(2) $$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(0)} + \int \operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{N \cdot \mathfrak{f}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\tau .$$

(3) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(0)} + \int \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{d}{dt} \frac{N \cdot \mathfrak{f}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\tau .$$

Die räumlichen Differentiationen sind nach $x\,y\,z$ auszuführen. Gleichung (2) hat in dieser Form nur einen Sinn für einen Aufpunkt außerhalb des Dielektrikums. Für einen Punkt im Inneren ist eine Kugel um $(x\,y\,z)$ mit einem gegen die Wellenlänge kleinen Radius ϱ abzutrennen. Die von dieser Kugel herrührende elektrische Feldstärke hat im Mittel den Wert

$$-\frac{4}{3}\pi N \mathfrak{f},$$

so daß für einen Punkt im Innern an die Stelle von (2) tritt:

(2a) $$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(0)} + \int\limits_{r>\varrho} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{N \cdot \mathfrak{f}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\tau - \frac{4}{3}\pi N \mathfrak{f} .$$

Schließlich besteht zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ die inzwischen vielfach diskutierte[2]) Lorentzsche Beziehung:

(4) $$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{4}{3}\pi N \mathfrak{f} .$$

Für nichtdispergierende Dielektrika, die in §§ 2 und 3 ausschließlich betrachtet werden sollen, gehen wegen (4) und (1):

$$\omega_0^2 \mathfrak{f} = a\mathfrak{E}',$$

woraus

(5) $$N\mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi} \frac{3g}{1-g} \mathfrak{E};$$

(6) $$g = \frac{4\pi N a}{3\omega_0^2}$$

---

1) Die Gleichungen ergeben sich z. B. leicht nach M. Planck, Berliner Ber. **24**. S. 470. 1902.

2) R. Lundblad, a. a. O.; H. Faxén, a. a. O.; L. Mandelstam, Physik. Zeitschr. **8**. S. 608. 1907; Gans u. Happel, Ann. d. Phys. **29**. S. 290. 1909.

folgt, die Gleichungen (2), (2a) und (3) bezüglich über in:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(0)} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{3g}{1-g}\int \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,d\tau \tag{7}$$

für das Äußere;

$$\frac{1}{1-g}\,\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(0)} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{3g}{1-g}\int\limits_{r>\varrho} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,d\tau \tag{7a}$$

für das Innere;

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(0)} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{3g}{1-g}\,\frac{1}{c}\,\operatorname{rot}\frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,d\tau\,. \tag{8}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich leicht (a. a. O. S. 22) die klassischen Grenzbedingungen mit dem Wert der Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon = \frac{1+2g}{1-g}\,.$$

Aus dem Koordinatensystem der $(x\,y\,z)$ seien noch durch Drehungen um die z-Achse um die spitzen Winkel α, β, $-\alpha$, $-\beta$ mit $\alpha > \beta$ bzw. die vier weiteren Koordinatensysteme der $(x_1\,y_1\,z)\ldots(x_4\,y_4\,z)$ hergeleitet.

2. *Äußere Reflexion* (Fig. 1). Das Medium nehme den Halbraum der positiven x ein. Das äußere Feld stelle eine ebene Welle dar, welche in der Richtung der x_1-Achse fortschreitet und in der Einfallsebene polarisiert ist:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_z^{(0)} = -\,\mathfrak{H}_{y_1}^{(0)} = E_0\left(t-\frac{x_1}{c}\right); \\ \mathfrak{E}_{x_1}^{(0)} = \mathfrak{E}_{y_1}^{(0)} = \mathfrak{H}_{x_1}^{(0)} = \mathfrak{H}_z^{(0)} = 0\,. \end{cases} \tag{9}$$

Die Welle habe eine Front, die zur Zeit $t = 0$ durch den Nullpunkt geht, so daß E_0 für negative Werte des Argumentes verschwindet.

Als Ansatz für $\mathfrak{E}$ diene eine in der $(x\,y)$-Ebene polarisierte ebene Welle, die parallel der x_2-Achse fortschreitet. Zwischen der Geschwindigkeit q dieser Welle und den Winkeln α und β muß, wie rein geometrisch aus dem Wellencharakter des Vorganges folgt, die Beziehung bestehen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{q} = n\,. \tag{10}$$

Es sei also

$$\mathfrak{E}_z = E\left(t - n\frac{x_2}{c}\right); \quad \mathfrak{E}_{x_2} = \mathfrak{E}_{y_2} = 0. \tag{11}$$

Geometrisch ist auch leicht einzusehen, daß die $\mathfrak{E}$-Welle eine Front haben muß, die gleichzeitig mit derjenigen der $\mathfrak{E}^{(0)}$-Welle durch den Nullpunkt geht, so daß auch E für negative Werte des Argumentes verschwindet. Ferner fordert die Bedingung des dispersionsfreien Vorganges:

$$E(0) = 0; \quad \dot{E}(0) = 0. \tag{12}$$

In die Integrale unserer Gleichungen (7), (7a) und (8) geht E mit dem Argument u/c ein, wenn man

$$c\,t - r - n\,\xi_2 = u$$

setzt. Jede Gleichung $u = \text{const.}$ stellt eine Fläche dar von der Eigenschaft, daß die von ihren Punkten ausgehenden

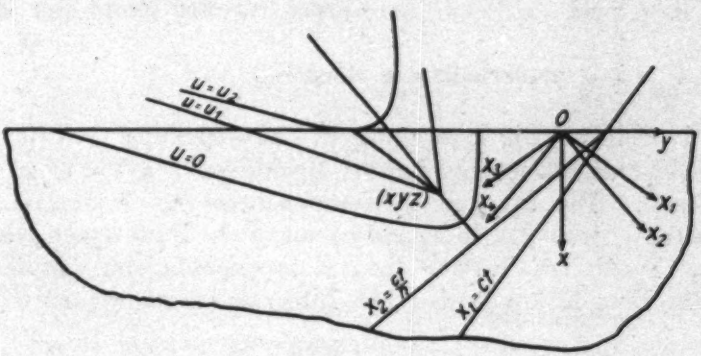


Fig. 1.

Sekundärwellen sämtlich mit gleicher Phase im Aufpunkt eintreffen. Sie bildet die eine Schale eines zweischaligen Rotationshyperboloids, dessen Achse durch $(x\,y\,z)$ parallel zur x_2-Achse verläuft. Der halbe Asymptotenwinkel ϑ ist gegeben durch

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n}. \tag{13}$$

Alle Flächen $u = \text{const.}$ sind also konaxial und ähnlich, aber nicht konzentrisch. Da nach (10) und (13)

$$\beta + \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

ist, schneiden alle Flächen die Grenzebene $\xi = 0$ in (reellen oder imaginären) Ellipsen. Daher ist das Integrationsgebiet

endlich, es wird begrenzt durch die Fläche $u = 0$ und die Ebene $\xi = 0$. Liegt der Punkt $(x\,y\,z)$ im Medium zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x_2 = \frac{c\,t}{n}$ (Front der $\mathfrak{E}$-Welle), so ist er derjenige Brennpunkt der Fläche $u = 0$, der innerhalb dieser Fläche liegt (Fig. 1); liegt der Aufpunkt aber vor der Front der $\mathfrak{E}$-Welle, so ist er der andere Brennpunkt. In jedem Falle ist die Front der $\mathfrak{E}$-Welle die zu $(x\,y\,z)$ als Brennpunkt gehörige Direktrix der Fläche $u = 0$. In bezug auf die Lage des Aufpunktes teilen wir den Raum in vier Gebiete:

1. $x > 0$; $x_2 < \frac{c\,t}{n}$ (im Körper zwischen der Grenzfläche und der Front der $\mathfrak{E}$-Welle).
2. $x_2 > \frac{c\,t}{n}$; $x_1 < c\,t$ (im Körper zwischen den Fronten der $\mathfrak{E}$- und $\mathfrak{E}^{(0)}$-Welle).
3. $x > 0$; $x_1 > c\,t$ (im Körper vor der Front der $\mathfrak{E}^{(0)}$-Welle).
4. $x < 0$ (außerhalb des Körpers).

1. Gebiet. Die Hauptaufgabe ist, Gleichung (7a) für das 1. Gebiet als dasjenige nichtverschwindender E-Werte zu befriedigen. Die x_2- und y_2-Komponenten des Integrals verschwinden, weil die Integranden ungerade Funktionen von ζ sind. Damit ist (7a) für diese Komponenten von vornherein erfüllt. Die z-Komponente $\mathfrak{J}_z$ des Integrals können wir schreiben:

$$\mathfrak{J}_z = \int_{r>\varrho} \mathrm{rot}_z\,\mathrm{rot}\,\frac{\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,d\tau = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2, \tag{14}$$

$$\mathfrak{J}_1 = \int_{r>\varrho} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{E\left(\frac{u}{c}\right)}{r}\,d\tau,$$

$$\mathfrak{J}_2 = -\int_{r>\varrho} \Delta\,\frac{E\left(\frac{u}{c}\right)}{r}\,d\tau.$$

Da sowohl z wie ζ nur in r auftritt, ist auch:

$$\mathfrak{J}_1 = \int_{r<\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\,\frac{E\left(\frac{u}{c}\right)}{r}\,d\tau = -\int \frac{\partial}{\partial \zeta}\,\frac{E\left(\frac{u}{c}\right)}{r}\cos(\nu\,\zeta)\,d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Element der Begrenzungsfläche unseres Integrationsgebietes, $(\nu\zeta)$ der Winkel zwischen der ins Innere des Integrationsraumes gerichteten Normalen zur Begrenzungsfläche und der ζ-Achse ist. Für die Grenzfläche des Mediums ist wegen $\cos(\nu\zeta) = 0$, für die Fläche $u = 0$ wegen (12) der Integrand $= 0$, so daß nur über die Kugelfläche $r = \varrho$ zu integrieren ist. Dies liefert:

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{4}{3}\pi E\left(t - n\frac{x_2}{c}\right). \tag{15}$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{J}_2$ führen wir als Koordinaten ein: u, r und das Azimut φ bezogen auf die Rotationsachse des Hyperboloids $u = 0$ und von der Ebene $\zeta = z$ an gerechnet. Dann wird

$$d\tau = \frac{r}{n}\,du\,d\varphi\,dr$$

und, da für $\frac{1}{r}E\left(\frac{u}{c}\right)$ die „Wellengleichung" gilt:

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{J}_2 &= -\frac{1}{c^2}\int\frac{d\tau}{r}\frac{d^2}{dt^2}E\left(\frac{u}{c}\right) = -\frac{1}{n}\iiint\frac{d^2}{du^2}E\left(\frac{u}{c}\right)du\,d\varphi\,dr\\ &= -\frac{1}{n}\left[\frac{d}{du}E\left(\frac{u}{c}\right)\iint d\varphi\,dr\right]_0^{u_2}\\ &\qquad + \frac{1}{n}\int_0^{u_2} du\,\frac{d}{du}E\left(\frac{u}{c}\right)\cdot\frac{d}{du}\iint d\varphi\,dr,\end{aligned}\right. \tag{16}$$

wo die obere Integrationsgrenze für u mit u_2 bezeichnet ist. $u = u_2$ ist offenbar diejenige Fläche, welche die Grenzebene berührt, für welche also $\iint d\varphi\,dr$ verschwindet. Andererseits verschwindet dE/du für $u = 0$ wegen (12). Daher ist der erste Term von $\mathfrak{J}_2$ gleich 0. Bei der Ausrechnung von

$$\frac{d}{du}\iint d\varphi\,dr$$

im zweiten Term spielen außer $u = 0$ folgende Flächen $u = const.$ eine ausgezeichnete Rolle:

1. Diejenige Fläche $u = u_1$, welche den Aufpunkt selbst zum Scheitel hat. Sie ist ein Kreiskegel mit der Gleichung:

$$u_1 = ct - n\,x_2.$$

Ihr benachbart sind die beiden Flächen $u = u_3$ und $u = u_4$ $(u_3 < u_4)$, welche die Kugel $r = \varrho$ berühren.

2. Von besonderem Interesse ist die schon erwähnte Fläche $u = u_2$. Man findet (bezüglich der Einzelheiten der zu besonderen Bemerkungen keinen Anlaß gebenden Rechnung sei auf die Originalarbeit verwiesen):

$$u_2 = ct - x_1,$$

und für den Abstand r_2 des Berührungspunktes vom Aufpunkt:

$$r_2 = \frac{x}{\cos\alpha}.$$

Geometrisch hat dieses Resultat die merkwürdige Bedeutung, daß r_2 parallel der Fortpflanzungsrichtung der $\mathfrak{E}^{(0)}$-Welle gerichtet ist. Dies deutet schon auf die Interferenz der Sekundärwellen mit der einfallenden Welle hin.

Die Ausrechnung ergibt jetzt für:

$$(17)\quad 0 < u < u_3: \frac{d}{du}\int\int d\varphi\, dr = -\frac{2\pi n}{n^2-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} - 1\right),$$

$$u_3 < u < u_4: \frac{d}{du}\int\int d\varphi\, dr = -\frac{2\pi n}{n^2-1}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

$$u_4 < u < u_2: \frac{d}{du}\int\int d\varphi\, dr = -\frac{2\pi n}{n^2-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + 1\right).$$

Es zeigt sich also, daß u nur als Argument von E unter dem Integralzeichen auftritt, dadurch wird es unnötig, für die Form von E speziellere Annahmen zu machen. Führt man jetzt die Integration hinsichtlich u über die drei Intervalle einzeln aus und geht für $\varrho = 0$ zur Grenze über, so wird $u_3 = u_4 = u_1$ und

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{4\pi}{n^2-1}\,E\left(t - n\frac{x_2}{c}\right) - \frac{2\pi}{n^2-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + 1\right)E\left(t - \frac{x_1}{c}\right),$$

$$\mathfrak{J}_z = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = \frac{4\pi}{3}\,\frac{n^2+2}{n^2-1}\,E\left(t - n\frac{x_2}{c}\right) - \frac{2\pi}{n^2-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + 1\right)E\left(t - \frac{x_1}{c}\right),$$

in Worten: *alle von den Molekeln ausgesandten Sekundärwellen setzen sich zusammen zu zwei ebenen Wellen, von denen die eine parallel x_2 mit der Geschwindigkeit c/n fortschreitet, die andere aber dieselbe Fortpflanzungsrichtung und -geschwindigkeit wie die einfallende $\mathfrak{E}^{(0)}$-Welle hat. Unsere Gleichung (7a) ist erfüllt, wenn die Form dieser zweiten Welle eine solche ist, daß sie die $\mathfrak{E}^{(0)}$-Welle gerade kompensiert*, d. h. wenn

$$E_0 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2-1}\cdot\frac{3g}{1-g}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + 1\right)E = 0$$

ist. Dann folgt:

$$\frac{1}{1-g}\,E = \frac{n^2+2}{n^2-1}\cdot\frac{g}{1-g}\,E,$$

was für n den Wert liefert:

$$n = \sqrt{\frac{1+2g}{1-g}} = \sqrt{\varepsilon}. \tag{18}$$

Damit wird:

$$E = \frac{s}{n}\,E_0\,; \quad s = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\,. \tag{19}$$

Für die magnetische Feldstärke liefern (8) und (9) die Gleichungen:

$$\mathfrak{H}_z = 0\,, \tag{20}$$

$$\mathfrak{H}_{x_2} = E_0 \sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{4\pi}\,\frac{3g}{1-g}\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial y_2}\int\frac{d\tau}{r}\,E\left(\frac{u}{c}\right).$$

Andererseits ergeben (7a), (14), (15) und (16):

$$E = E_0 - \frac{1}{4\pi}\,\frac{3g}{1-g}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{d^2}{dt^2}\int\frac{d\tau}{r}\,E\left(\frac{u}{c}\right). \tag{21}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{d\,\mathfrak{H}_{x_2}}{dt} = \frac{d\,E_0}{dt}\sin(\alpha-\beta) + c\,\frac{\partial\,E_0}{\partial\,y_2} = 0$$

wegen

$$\frac{\partial\,E_0}{\partial\,y_2} = -\,\frac{1}{c}\,\frac{d\,E_0}{dt}\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,y_2},$$

und da der Anfangswert von $\mathfrak{H}_{x_2} = 0$ ist:

$$\mathfrak{H}_{x_2} = 0\,. \tag{22}$$

Die dritte $\mathfrak{H}$-Komponente endlich wird:

$$\mathfrak{H}_{y_2} = -\,E_0\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{4\pi}\,\frac{3g}{1-g}\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_2}\int\frac{d\tau}{r}\,E\left(\frac{u}{c}\right),$$

was, wieder mit (21) kombiniert, ergibt:

$$\frac{d\,\mathfrak{H}_{y_2}}{dt} = c\,\frac{\partial\,E}{\partial\,x_2} - c\,\frac{\partial\,E_0}{\partial\,x_2} - \frac{d\,E_0}{dt}\cos(\alpha-\beta).$$

Die beiden letzten Glieder heben sich wieder auf:

$$\frac{d\,\mathfrak{H}_{y_2}}{dt} = -\,n\,\frac{d\,E}{dt},$$

$$\mathfrak{H}_{y_2} = -\,n\,E = -\,s\,E_0 = s\,\mathfrak{H}^{(0)}_{y_1}. \tag{23}$$

Die Integrationskonstante verschwindet wieder wegen der Anfangsbedingungen. Das System der Gleichungen (10), (11), (18), (19), (20), (22), (23) stellt die Brechungsgesetze der klassischen Theorie dar.

2. Gebiet. Daß jetzt für das 2. Gebiet unsere Grundgleichungen erfüllt sind, würde eine Rechnung ergeben, die sich von derjenigen für das 1. Gebiet nur dadurch unterscheidet, daß $u_1 < 0$ wird, also nicht mehr in den Integrationsbereich fällt. Auf diese Weise bleibt von den beiden Wellen, zu welchen sich im 1. Gebiet die Sekundärwellen zusammensetzen, nur diejenige übrig, welche die einfallende Welle aufhebt. Einfacher zeigt jedoch folgende Überlegung, daß im 2. Gebiet das Feld verschwinden muß: Es hindert nichts, als Fronten für die $\mathfrak{E}^{(0)}$- und $\mathfrak{E}$-Welle die Ebenen:

$$x_1' = ct + a \quad \text{und} \quad x_2' = \frac{ct + a}{n}$$

zu betrachten, wo a eine positive Strecke ist. Dann muß auch für die den Wellen vorne angefügten Teile immer noch

$$E\left(t - n\,\frac{x_2}{c}\right)$$

proportional

$$E_0\left(t - \frac{x_1}{c}\right)$$

bleiben, und da letzterer Ausdruck $= 0$ ist, muß auch der erstere verschwinden. So zeigt sich, daß die von Sommerfeld[1]) berechneten „Vorläufer", welche gerade das 2. Gebiet ausfüllen sollten, bei dispersionsfreien Vorgängen verschwinden, wie es übrigens auch die klassische Theorie ergibt.

3. Gebiet. Für dieses verschwindet der Integrationsbereich, womit unsere Grundgleichungen erfüllt sind.

4. Gebiet. Das Integral $\mathfrak{J}_z'$ der rechten Seite von (7) berechnet sich wie oben $\mathfrak{J}_z$, nur mit dem Unterschied, daß, wie die Rechnung ergibt, die obere Grenze für u jetzt wird:

$$u_2' = ct + x_3\,,$$

ferner $\mathfrak{J}_1$ entfällt und u_1 als ausgezeichneter u-Wert fortfällt, so daß für das ganze Integrationsgebiet (17) gilt. Somit wird:

$$\mathfrak{J}_z' = -\frac{2\pi}{n^2 - 1}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} - 1\right) E\left(t + \frac{x_2}{c}\right)$$

1) A. Sommerfeld, Weber-Festschrift 1912.

und wegen (18) und (19):

$$\mathfrak{E}_z = E_0\left(t - \frac{x_1}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} - 1\right)\frac{1}{n}\,\frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\,E_0\left(t + \frac{x_3}{c}\right).$$

Der erste Summand stellt die (jetzt nicht ausgelöschte) einfallende Welle dar, der zweite

$$(24)\qquad \mathfrak{E}_z^{(1)} = -\sigma E_0\left(t + \frac{x_3}{c}\right);\quad \sigma = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

die in der Richtung der negativen x_3 fortschreitende „reflektierte" Welle. Analog wie oben wird in entsprechender Bezeichnung:

$$(25)\qquad \mathfrak{E}_{x_3}^{(1)} = \mathfrak{E}_{y_3}^{(1)} = \mathfrak{H}_{x_3}^{(1)} = \mathfrak{H}_{z}^{(1)} = 0,$$

$$(26)\qquad \mathfrak{H}_{y_3}^{(1)} = \sigma\,\mathfrak{H}_{y_1}^{(0)}\left(t + \frac{x_3}{c}\right).$$

(24), (25), (26) sind wieder die Formeln, zu welchen die klassische Theorie führt.

3. *Innere Reflexion* (Fig. 2). Das Dielektrikum habe die Form eines Prismas, welches begrenzt wird von den beiden Ebenen $x = 0$ und $x_4 = 0$, das äußere Feld $\mathfrak{E}^{(0)}\,\mathfrak{H}^{(0)}$ stelle

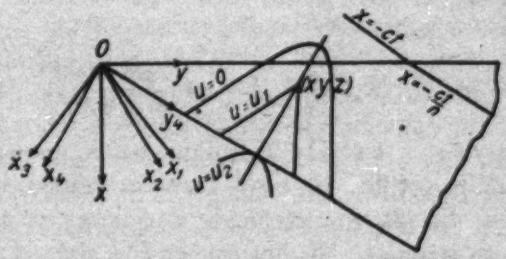


Fig. 2.

eine Welle von den Eigenschaften des vorigen Paragraphen dar, welche sich parallel der negativen x_4-Achse fortpflanzt. Die Berechnung, die analog der des vorigen Paragraphen durchzuführen ist (die Integrale lassen sich leicht auf die dort ausgewerteten zurückführen), zeigt, daß man, um (7a) zu befriedigen, für das Innere zwei $\mathfrak{E}$-Wellen mit der Geschwindigkeit c/n ansetzen muß, von denen die eine $\mathfrak{E}^{(e)}$ parallel $-x_4$, die andere $\mathfrak{E}^{(r)}$ parallel x_2 fortschreitet. Die erste Welle ist als „einfallende" in bezug auf die Grenzfläche $x = 0$, die zweite als „reflektierte" zu deuten. Dabei ist durch passende Wahl

der geometrischen Verhältnisse leicht zu erreichen, daß die wiederholte Reflexion im Innern sowie die Beugung an der Kante des Prismas ohne Einfluß auf die Betrachtungen bleiben. Fig. 2 stellt diesen Fall schematisch dar. Dabei ist

$$c\,t - r + n\,\xi_4 = u$$

gesetzt. Die Intensitätsverhältnisse ergeben sich in Übereinstimmung mit der klassischen Theorie aus:

$$(27)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_z^{(e)} = \dfrac{2}{n+1}\,\mathfrak{E}_z^{(0)}; & \mathfrak{H}_{y_4}^{(e)} = \dfrac{2n}{n+1}\,\mathfrak{H}_{y_4}^{(0)}, \\ \mathfrak{E}_z^{(r)} = \sigma\,\mathfrak{E}_z^{(e)}; & \mathfrak{H}_{y_2}^{(r)} = -\,\sigma\,\mathfrak{H}_{y_4}^{(e)}. \end{cases}$$

Für das Vakuum $x < 0$ ergibt sich der Wert der z-Komponente des Integrals in (7) zu

$$-\frac{2\pi}{n-1}\,\mathfrak{E}_z^{(e)}\left(t + \frac{x_4}{c}\right) + \frac{2\pi}{n^2-1}\,\frac{4\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}\,\mathfrak{E}_z^{(e)}\left(t + \frac{x_3}{c}\right).$$

Die von den Molekeln emittierten Sekundärwellen setzen sich, diesmal *im Vakuum*, zu zwei Wellen zusammen, die sich parallel $-x_4$ und $-x_3$ fortpflanzen. *Die erste Welle hebt wieder das äußere Feld* $\mathfrak{E}^{(0)}$ $\mathfrak{H}^{(0)}$ *genau auf*, wie sich mit Benutzung von (27) leicht ergibt. Es resultiert aus (7):

$$\mathfrak{E}_z = n\,s'\,\mathfrak{E}_z^{(e)}\left(t + \frac{x_3}{c}\right); \quad s' = \frac{\sin 2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad \text{usw.}$$

4. *Dispersion.* Ist die Bedingung des dispersionsfreien Vorganges nicht erfüllt, so muß man zu reinen Sinuswellen übergehen, um die (5) entsprechende Beziehung zwischen $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{E}$ aufstellen zu können. Im übrigen ändert sich an der ganzen Rechnung nichts weiter, als daß die Wellenfronten ins Unendliche rücken, was aber ohne Einfluß bleibt. Sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{j}$ Vektorfunktionen von der Form

$$\mathfrak{F}(x, y, z)\,e^{i\omega t},$$

so folgt aus (1) und (4), wenn man

$$\frac{4\pi}{3}\,\frac{N a}{\omega_0^2 - \omega^2 + i k \omega} = \frac{\omega_0^2\, g}{\omega_0^2 - \omega^2 + i k \omega} = g'$$

setzt:

$$(28)\qquad N\mathfrak{j} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{3g'}{1-g'}\,\mathfrak{E}.$$

Man sieht, daß alle Resultate erhalten bleiben, wenn man g durch g' ersetzt. Für den Brechungsexponenten erhält man analog (18):

$$(29)\quad n = \nu + i\varkappa = \sqrt{\frac{1+2g'}{1-g'}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2(1+2g) - \omega^2 + ik\omega}{\omega_0^2(1-g) - \omega^2 + ik\omega}}\,.$$

5. *Zerstreuung.*[1]) Die dargelegte Auffassung von der Natur optischer Vorgänge in Nichtleitern gestattet, in einfacher Weise die Zerstreuung des Lichtes zu behandeln und in Beziehung zu setzen zur regulär fortschreitenden Erregung. Die molekulartheoretische Herleitung der Fortpflanzungs-, Brechungs- und Reflexionsgesetze beruht letzten Endes auf Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bezeichnet man als „Elementarvolumen $d\tau$" ein Volumen, dessen Dimensionen klein gegen die Wellenlänge und klein gegen den Molekelabstand sind, als „Mittelungsbereich" dagegen einen (sehr viele Molekeln enthaltenden) Raumteil von solcher Gestalt und Lage, daß irgendeine mikroskopisch definierte Größe, über ihn gemittelt, einen von der Größe des Bereiches wesentlich unabhängigen Mittelwert besitzt, so sind im Sinne der Fehlertheorie die Elementarvolumina als „Elementarfehlerquellen" aufzufassen, die einen „Elementarfehler" (elektrische oder magnetische Feldstärke) mit der Wahrscheinlichkeit $N\,d\tau$ hervorrufen. (Daß die Feldstärken sich wie Fehler verhalten, beruht auf der Homogeneität und Linearität der elektrodynamischen Grundgleichungen.) Der Berechnung der mittleren Feldstärken liegt der Satz zugrunde, daß *die mittleren Fehler unabhängiger Fehlerquellen sich summieren.* Als Mittelungsbereiche sind dabei im obigen Falle um alle Punkte im Vergleich zur Wellenlänge sehr dünne prismatische Räume parallel zur z-Achse zu denken, welche sehr viele Molekeln enthalten, und innerhalb welcher alle in Betracht kommenden Punkte gleichzeitig und unter Wahrung der geometrischen Verhältnisse verschiebbar zu denken sind. Die Unterscheidung von Elementarvolumen und Mittelungsbereich lehrt, daß die vielfach offen oder versteckt auftretende Voraussetzung: „Wellenlänge groß gegen Molekelabstand",

1) Die folgenden Paragraphen sind bis auf die Literaturhinweise einer Untersuchung entnommen, die bereits mehrere Jahre zurückliegt, aber ebenfalls aus dem oben angeführten Grunde nicht veröffentlicht werden konnte.

überflüssig ist, die *Gesetze der Fortpflanzung, Brechung und Reflexion gelten für beliebig dünne Medien.*

Ein zweiter, leicht zu beweisender[1]) Satz der Fehlertheorie sagt aus, daß *beim Zusammenwirken unabhängiger Fehlerquellen sich auch die mittleren Quadrate der Abweichungen vom mittleren Fehler summieren.* Faßt man die von einem $d\tau$ möglicherweise im Aufpunkte hervorgerufene elektrische Feldstärke e als Elementarfehler mit der Wahrscheinlichkeit $N d\tau$ auf, so ist der mittlere Elementarfehler $e N d\tau$, daher das mittlere Quadrat der Abweichungen von diesem:

$$(e - e N d\tau)^2 N d\tau + (e N d\tau)^2 (1 - N d\tau),$$

oder, wenn man höhere Potenzen von $d\tau$ fortläßt, $e^2 N d\tau$. Wendet man den zitierten Satz an auf einen unendlich dünnen Kegel mit dem Aufpunkt als Spitze, so ergibt sich, daß die in dem Kegel enthaltenen Oszillatoren im Aufpunkte außer ihrem Beitrag zur gerichteten Welle eine elektrische Feldstärke erregen, deren Quadrat im (räumlichen) Mittel gleich $N \int e^2 d\tau$ über den Kegel ist. Sieht man von den Oszillatoren ab, deren Entfernung so klein ist, daß sie einen mehr oder weniger strahlungsunähnlichen Vorgang hervorrufen, so ist e senkrecht zum Kegel gerichtet, und der gefundene Ausdruck stellt die durch den Elementarkegel diffus gestrahlte Energie dar. Während also die von den Oszillatoren ausgehenden Sekundärwellen in der Richtung der Primärwelle interferieren, verhalten sie sich in jeder anderen Richtung im Mittel wie inkohärente Strahlungsquellen, ihre *Intensitäten* addieren sich. — Ein Unterschied gegen die Auffassung Lord Rayleighs[2]) besteht darin, daß dieser unter Berücksichtigung der Wärmebewegung über die Zeit mittelt, während nach dem Obigen die Inkohärenz der Sekundärwellen auch bei ruhenden Molekeln erhalten bleibt, wenn man den Mittelwert über einen Raum nimmt, der praktisch ebenso verschwindend klein ist wie bei Lord Rayleigh die Zeit eines Phasenwechsels.[3])

---

1) Vgl. z. B. M. W. Crofton, Lond. Trans. **160.** S. 175. 1870, wo der Satz aus dem Gange des Beweises für das Fehlergesetz abstrahiert werden kann.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **41.** S. 107. 1871.

3) J. Larmor (Phil. Mag. **37.** S. 161. 1919) hält ebenfalls an der Notwendigkeit fest, die Wärmebewegung heranzuziehen.

Für schwache Zerstreuung können die Dipolmomente nicht wesentlich um ihren Mittelwert schwanken, da diese Schwankungen erst durch die zerstreute Strahlung verursacht werden. Wir nehmen deshalb für eine reine Sinuswelle von der Wellenlänge λ die Dipolamplituden gleichmäßig gleich $\mathfrak{f}_0$ an Ein kleines Volumen V im Koordinatenanfang erzeugt im Aufpunkt mit den Polarkoordinaten r, ϑ (Winkel zwischen r und primärer Strahlenrichtung), φ (Azimut von der Richtung $\mathfrak{f}_0$ aus gerechnet) die Intensität:

$$J = \frac{2\pi^2 \varrho N V \mathfrak{f}_0^2}{\lambda^4 r^2} (1 - \cos^2\varphi \sin^2\vartheta).$$

Aus (28) und (29) folgt:

$$N\mathfrak{f} = \frac{n^2 - 1}{4\pi} \mathfrak{E},$$

und daraus, wenn $\mathfrak{E}_0$ die reelle Amplitude von $\mathfrak{E}$ bezeichnet:

$$N\mathfrak{f}_0 = \frac{|n^2 - 1|}{4\pi} \mathfrak{E}_0.$$

Die Intensität der primären Welle ist:

$$J_0 = \frac{c\nu}{8\pi} \mathfrak{E}_0^2,$$

mithin:

$$\mathfrak{f}_0^2 = \frac{8\pi}{c\nu} \left(\frac{|n^2 - 1|}{4\pi N}\right)^2 J_0.$$

Damit wird:

$$J = \frac{\pi^2 V |n^2 - 1|^2}{N r^2 \lambda^4 \nu} J_0 (1 - \cos^2\varphi \sin^2\vartheta). \tag{30}$$

Bei natürlichem Licht werden die einzelnen Wellenlängen unabhängig voneinander zerstreut, da bei der Bildung des zeitlichen Mittelwertes von e^2 die doppelten Produkte der Glieder der Fourierschen Reihe wegen der Inkohärenz der einzelnen Schwingungszahlen verschwinden. Gleichung (30) muß wieder für alle Verhältnisse von Molekelabstand zu Wellenlänge gelten, solange die Bedingung der reinen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Molekeln erfüllt ist. Die Formel bestätigen die kürzlich von Lord Rayleigh d. J.[1]) ausgeführten Versuche über die Intensität des Opaleszenzlichtes in Gasen:

1) R. J. Strutt, Proc. Roy. Soc. 95. S. 155. 1919.

Polarisation[1]), Abhängigkeit vom Brechungsexponenten und der Dichte zeigten sich im Einklang mit der Theorie. Mit zunehmender Verteilungsdichte wächst die zerstreute Intensität proportional N, während ihr Verhältnis zur gerichteten Sekundärstrahlung (Reflexion) proportional N^{-1} abnimmt, ebenso wie in der Fehlertheorie für einseitige Elementarfehler das Quadrat des Präzisionsmaßes proportional der Zahl der Fehlerquellen ist, während sein Verhältnis zum Quadrat des mittleren Fehlers umgekehrt proportional dieser Zahl ist.

Weisen die Dipolamplituden erhebliche Schwankungen auf, so bedeutet dies, daß die Intensität der zerstreuten Strahlung von derselben Größenordnung wie die der primären ist. Die Schwankungen von f_0 kann man dann in der Weise berücksichtigen, daß man die abermalige Zerstreuung der diffusen Strahlung, die „sekundäre Diffusion" berechnet. Diese kann beträchtlich werden, wenn entweder die pro Volumeinheit emittierte Energie sehr groß ist oder das Medium sehr ausgedehnt ist (Sonnenstrahlung in der Atmosphäre.[2]) Der erste Fall tritt ein bei der Resonanzstrahlung, wo die Dipolamplituden sehr groß werden. Da die sekundäre Diffusion wieder eine tertiäre verursacht usf., werden die Verhältnisse sehr unübersichtlich, Richtungseffekte wie die Polarisation können ganz aufgehoben werden, wie es in der Tat die Versuche von Wood[3]) zeigen. Doch ist zu betonen, daß die Resonanzstrahlung dem Wesen nach identisch ist mit der von Lord Rayleigh beobachteten Opaleszenzstrahlung, beide sind in Gleichung (30) enthalten.

6. *Extinktion.* Aus einer unendlich dünnen Schicht dx in der Wellenebene sei ein Stück vom Flächeninhalt 1, also vom Volumen dx herausgeschnitten. Die gesamte von ihm in Gestalt diffuser Strahlung emittierte Energie ergibt sich aus (30) durch Integration über die Kugelfläche vom Radius r zu:

$$\frac{dx}{N} \cdot \frac{8\pi^3 |n^2 - 1|^2}{3\lambda^4 \nu} J_0 .$$

1) Beim Helium, welches erst nur 58 Proz. Polarisation zeigte, hat eine verbesserte Versuchsanordnung vollkommene Polarisation ergeben (Nature **104.** S. 412. 1919).

2) Soret, Arch. d. Sciences phys. et nat. **20.** S. 439. 1888.

3) Vgl. Lord Rayleigh, Nature **104.** S. 276. 1909.

Die in das Volumen pro Zeiteinheit eintretende Energie ist J_0. Dieser wird der angegebene Betrag $= -dJ_0$ auf der Strecke dx entzogen, daher wird der Extinktionskoeffizient:

$$\mu = -\frac{1}{J_0}\frac{dJ_0}{dx} = \frac{8\pi^3|n^2-1|^2}{3N\lambda^4\nu}. \tag{31}$$

Ist der Brechungsexponent reell, so wird:

$$\mu = \frac{8\pi^3(\nu^2-1)^2}{3N\lambda^4\nu},$$

d. i. der von Planck[1]) gefundene Wert. Ist ν wenig von 1 verschieden, so wird:

$$\mu = \frac{1}{N}\cdot\frac{32\pi^3(\nu-1)^2}{3\lambda^4},$$

d. i. die Rayleighsche Formel.

Ist diese Schlußweise richtig, so muß derselbe Wert μ sich aus der Dispersionsformel ergeben, wenn man die Dämpfungskonstante für reine Strahlungsdämpfung einsetzt. Die von einem Oszillator in der langen Zeit t emittierte Energie ist:

$$\frac{\omega^4 \mathfrak{f}_0^2}{3c^3}t.$$

Andererseits ist die gegen die dämpfende Kraft geleistete Arbeit, wenn e die Ladung, m die Masse des schwingenden Teilchens, also $a = e^2/m$ die Konstante der rechten Seite von (1) ist:

$$\int \frac{m}{e}k\dot{\mathfrak{f}}\cdot\frac{d\mathfrak{f}}{e} = \frac{mk}{e^2}\int \dot{\mathfrak{f}}^2\,dt = \frac{mk\mathfrak{f}_0^2\omega^2}{2e^2}t,$$

somit durch Vergleichung beider Ausdrücke:

$$k = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3} = \frac{2a\omega^2}{3c^3} = \frac{\omega^2\omega_0^2 g}{2\pi N c^3}$$

wegen (6). Daß der Ausdruck ω enthält, also keine Konstante des Oszillators ist, rührt daher, daß das Dämpfungsglied nicht in der strengen Form angesetzt wurde, in welcher es proportional $\dddot{\mathfrak{f}}$ wäre.[2]) Es ergibt sich aus (29):

$$n^2 - 1 = \frac{3\omega_0^2 g}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2 g + ik\omega},$$

---

1) M. Planck, Berl. Ber. 1904. S. 749.
2) M. Planck, Wied. Ann. **60**. S. 593. 1897.

daraus durch Gleichsetzen der imaginären Teile:

$$2\nu\varkappa = -\frac{3\omega_0^2 g k \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2 g)^2 + k^2\omega^2} = -\frac{k\omega|n^2-1|^2}{3\omega_0^2 g}$$

und durch Einsetzen des obigen Wertes von k der Extinktionskoeffizient:

$$\mu = -\frac{2\varkappa\omega}{c} = \frac{\omega^4|n^2-1|^2}{6\pi N c^4 \nu}$$

in Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Ausdruck.

Ebenso wie die Resonanzstrahlung dem Wesen nach eine nur besonders intensive Opaleszenzstrahlung ist, ist auch die selektive Absorption nicht wesensverschieden von der Absorption bei normaler Dispersion, beide werden durch die Formel (31) gegeben. Daher ist die Fortlassung des Dämpfungsgliedes aus der Schwingungsgleichung nicht zulässig, sie verstößt gegen das Energieprinzip. Die Absorption, zu welcher man für $k = 0$ gelangt, ist zwar auf das Gebiet anomaler Dispersion beschränkt, doch hat dies höchstens formale, keinesfalls eine physikalische Bedeutung. Nur wenn das Medium unendlich feine Struktur hat, fällt k aus dem Resultat heraus, Zerstreuung und Extinktion verschwinden, aber auch die selektive Absorption: läßt man bei festgehaltenem ν in (31) $N = \infty$ werden, so wird $\mu = 0$ für jedes ν. Oseen[1]) gelangt zu einer Schwingungsgleichung ohne Dämpfungsglied, doch ist seine Beweisführung bereits früher von Gans und Happel[2]) widerlegt worden.

Die Opaleszenzstrahlung im Zusammenhang mit der Extinktion behandeln zwei Arbeiten von Einstein[3]) und Lundblad[4]), die letztere am vollständigsten . Beide gehen nicht auf das eigentlich zugrunde liegende Prinzip zurück, die Rechnung wird auf ein Volumen bezogen, welches sehr viele Molekeln enthält, und dadurch erheblich kompliziert. Einstein gelangt zu einer etwas abweichenden Formel für den Absorptionskoeffizienten, welche auch die selektive Absorption nicht einbegreift. Lundblads Resultat stimmt mit dem hier entwickelten überein.

---

1) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 17. S. 341. 1916; vgl. auch L. Mandelstam, a. a. O.

2) a. a. O.

3) A. Einstein, Ann. d. Phys. 33. S. 1275. 1910.

4) R. Lundblad, Ann. d. Phys. 57. S. 581. 1918.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich als notwendige Bedingung für das Auftreten der Zerstreuung überhaupt, daß das Medium diskrete Struktur hat, dagegen als Bedingung für die Gültigkeit speziell des Rayleighschen bzw. allgemeineren Gesetzes (30), daß die Molekeln vollkommen ungeordnet sind; ist dies nämlich nicht der Fall, so bilden die Elementarvolumina keine *unabhängigen* Fehlerquellen mehr. Dies tritt schon bei amorphen festen und flüssigen Körpern ein, daher wird, wie ebenfalls Lord Rayleighs[1]) Versuche zeigen, die Zerstreuung kleiner, als den obigen Formeln entsprechen würde. Sehr klein wird sie in Kristallen.[2]) Ob der hier beobachtete kleine Rest von Zerstreuung auf Einschlüsse zurückzuführen ist, kann nur eine genauere Untersuchung entscheiden, welche natürlich nach ganz anderen Prinzipien als den hier angewandten durchzuführen wäre. Während Lorentz[3]) der Ansicht ist, daß Kristalle überhaupt nicht zerstreuen, unterscheidet Oseen[4]) zwei Arten von Zerstreuung, die beide dem Rayleighschen Gesetz folgen, und von denen die eine, als geordnet bezeichnete, von den Molekeln selbst herrührende, in allen Körpern auftreten soll, während die zweite, ungeordnete, von den Dichteschwankungen verursacht werden und daher in Kristallen verschwinden soll. Aus dem Obigen geht aber hervor, daß beide Arten von Zerstreuung identisch sind; der Vorgang ist geordnet insofern, als er die Amplitude der „geordneten" gerichteten Welle regelt, ungeordnet insofern, als bei der zerstreuten Strahlung die Phasen und Amplituden ungeordnet sind und sich daher der Einzelbetrachtung entziehen. Oseens Betrachtungen können daher, abgesehen davon, daß sie zu Widersprüchen mit der Erfahrung führen, nicht für eine Zerstreuung in Kristallen nach dem Rayleighschen Gesetz sprechen. Daß Ewald (a. a. O.) für kubische Gitter denselben Absorptionskoeffizienten wie für Gase findet, ist vielleicht auf eine Ungenauigkeit bei den Vernachlässigungen zurückzuführen, ähnlich der, welche Mandelstam und Oseen mit Unrecht in der Planckschen Dispersionstheorie sehen.

---

1) R. J. Strutt, a. a. O. S. 155.

2) R. J. Strutt, Proc. Roy. Soc. **95**. S. 476. 1919.

3) H. A. Lorentz, Les Théories statistiques en Thermodynamique. Leipzig 1916.

4) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. **17**. S. 233. 1916.

Zusammenfassung.

1. Die Gesetze der Brechung, Reflexion und Dispersion werden molekulartheoretisch hergeleitet. Der „Auslöschungssatz" gilt nicht nur für das Innere eines Dielektrikums, sondern hat auch einen Sinn für das Vakuum, wie an dem Beispiel der Ablenkung des Lichtes durch ein Prisma gezeigt wird.

2. Der Unterschied zwischen dichten Medien (Molekelabstand $<$ Wellenlänge) und dünnen (Molekelabstand $\gtrsim$ Wellenlänge) ist kein essentieller, sondern nur ein gradueller, er betrifft nur das Verhältnis von gerichteter und diffuser Strahlung, die stets beide vorhanden sind.

3. Von zwei einfachen Sätzen der Fehlertheorie liefert der eine den geordneten Teil (Brechung, Reflexion, Dispersion und Absorption), der andere den ungeordneten Teil (Zerstreuung) der optischen Vorgänge in amorphen Dielektrici, und zwar resultieren für die Intensität des zerstreuten Lichtes und den Extinktionskoeffizienten exakte Formeln, die für das ganze Spektrum gültig sind. Das Energieprinzip läßt eine Trennung der selektiven Absorption von der nichtselektiven nicht zu; ebenso sind Resonanzstrahlung und gewöhnliche Opaleszenzstrahlung nicht wesensverschieden.

4. Die Zerlegung der diffusen Strahlung in einen Keesom-Einsteinschen und einen Rayleigh-Planckschen Teil ist nicht angängig, weil beide identisch sind.

Charlottenburg, 2. Oktober 1920.

(Eingegangen 2. November 1920.)

3. *Über die Dielektrizitätskonstanten der Phosphore und die absoluten Wellenlängen ihrer Dauererregungsverteilungen;* *von Ferdinand Schmidt.*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

Einleitung.

Der Mechanismus des Leuchtens der Atome ist zuerst von Hrn. Lenard in seinen Grundzügen erkannt worden. Hr. Lenard war 1904[1]) und dann noch eingehender 1910[2]) in seiner Arbeit über „Lichtemission und deren Erregung" zu der Vorstellung gekommen, daß die Erregung zum Leuchten in einem Austritt von Elektronen aus dem Atom bestünde und daß das Leuchten bei Rückkehr der verlorenen Elektronen stattfinde, eine Vorstellung, deren sinngemäße Anwendung auf die neueren Atommodelle in Verbindung mit der Quantenhypothese Hrn. Bohr zu überraschenden Ergebnissen geführt hat. Es lag nahe, die Phosphoreszenzerscheinungen, durch deren Untersuchung Hr. Lenard zu dieser Auffassung des Leuchtvorganges gelangt war, auf Grund unserer heutigen Kenntnisse des Atomaufbaues einer verfeinerten und quantitativen Betrachtung zu unterziehen. Zu diesem Zwecke mußte in der großen Mannigfaltigkeit des vorhandenen Beobachtungsmaterials an Erregungsverteilungen und Banden der Phosphore nach gewissen gesetzmäßigen Zusammenhängen gesucht werden. Auch hierfür hat Hr. Lenard in der oben erwähnten Arbeit einen Weg gezeigt, als er fand, daß die Dauererregungsverteilungen entsprechender Banden sich in gesetzmäßiger Weise mit der Dielektrizitätskonstante des Phosphormaterials im Spektrum verschieben. Ein Vergleich entsprechender Banden der Sauerstoff-, Schwefel- und Selenphosphore, wie ich ihn in meiner vorhergehenden Arbeit[3]) durchführte, brachte keine

1) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. **15.** S. 672. 1904.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. **31.** S. 667f. 1910.
3) F. Schmidt, Ann. d. Phys. **63.** S. 264. 1920.

Vergrößerung der Mannigfaltigkeit der Phosphoreszenzerscheinungen, sondern eine wesentliche Klärung; die spektralen Lagen der Dauererregungsstellen fügten sich auch beim Übergange von einer Gattung zur anderen vollständig diesen Gesetzmäßigkeiten. Ein Fortschreiten auf diesem angedeuteten Wege, welcher gesetzmäßige Zusammenhänge innerhalb der spektralen Verteilung der Dauererregungsstellen aufzudecken versprach, ergab die Notwendigkeit, sich genauere Kenntnisse als bisher über die Dielektrizitätskonstanten der Phosphore zu verschaffen.

Die vorliegende Untersuchung zerfällt daher in zwei Teile. Der erste bringt eine empfindliche Methode zur Messung der Dielektrizitätskonstanten der Phosphore und ihre Ergebnisse, der zweite bemerkenswerte Zusammenhänge in den Dauererregungsverteilungen der Phosphore, die hier zunächst in ihren Grundzügen mitgeteilt werden, während ihre Anwendung auf die Erschließung des Leuchtvorganges und des Aufbaues der phosphoreszenzfähigen Metallatome von mir noch weiter verfolgt wird, worüber später berichtet werden soll.

I. Die Dielektrizitätskonstanten der Phosphore.

Meßanordnung.

Messungen der Dielektrizitätskonstanten von Phosphoren sind zuerst von Hrn. Winawer[1]) ausgeführt worden. Er benutzte als Meßanordnung die sogenannte zweite Drudesche[2]), an der er einige für seine Messungen günstige Abänderungen vornahm. Die Phosphore kamen in Pulverform zur Untersuchung und zwar nach einem von Hrn. Starke[3]) gefundenen Verfahren. Dieses besteht darin, daß man ähnlich der Schwebemethode bei Dichtebestimmungen eine Flüssigkeit aufsucht, welche dieselbe Dielektrizitätskonstante wie das Pulver hat. Nach einer genügenden Anzahl von Beobachtungen von Flüssigkeiten verschiedener Dielektrizitätskonstante in Mischung mit dem zu untersuchenden Pulver läßt sich seine Dielektrizitätskonstante rein graphisch ohne jede Rechnung ermitteln. Außerdem hat man bei diesem Verfahren die Annehmlichkeit, vollkommen von der Korngröße des Pulvers unabhängig zu sein.

1) B. Winawer, Dissert. Heidelberg 1909.

2) P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chem. **23.** S. 282. 1897 u. Wied. Ann. **61.** S. 466. 1897.

3) H. Starke, Wied. Ann. **60.** S. 629. 1897.

Auch in der vorliegenden Arbeit wurden die Phosphore mit elektrischen Wellen nach dem Starkeschen Verfahren untersucht. Zur Erzeugung der elektrischen Wellen dienten Elektronenröhren mit Glühkathoden in Sender- und Überlagererschaltungen, wie sie in der drahtlosen Telegraphie gebräuchlich sind. Dergleichen Schwingungskreise mit Elektronenröhren sind in letzter Zeit mit Vorteil zu Messungen von Kapazitäten verwandt worden und zwar hauptsächlich wegen der großen Empfindlichkeit der Meßanordnung, der guten Konstanz der ausgesandten ungedämpften Schwingungen und der bequemen Veränderlichkeit ihrer Wellenlänge.[1])

Die Schwingungskreise des Senders und des Überlagerers waren lose miteinander gekoppelt. Sie wurden beide auf einen bestimmten Differenzton[2]) eingestellt, der in einem Detektorkreis mit Verstärkerröhren abgehört wurde. Im Schwingungskreise des Senders lagen zwei parallel geschaltete Kondensatoren, der Meßkondensator und der Vergleichskondensator. Wurde die Kapazität des Meßkondensators durch Einführen irgendeines Körpers geändert, so wurde der Differenzton zwischen Überlagerer und Sender ein anderer. Um wieder auf denselben mittels einer Stimmgabel festgehaltenen Differenzton wie anfangs zu kommen, mußte die Kapazität des Vergleichskondensators um einen der Änderung der Kapazität des Meßkondensators entsprechenden Betrag verstellt werden. Dieser konnte an einer Gradeinteilung am Vergleichskondensator meßbar festgelegt werden. Einer gemessenen Verstellung des Vergleichskondensators entsprach daher immer eine bestimmte Kapazitätsänderung des Meßkondensators.

---

1) Vgl. besonders: H. Joachim, Ann. d. Phys. **60**. S. 570. 1919; G. Falkenberg, Ann. d. Phys. **61**. S. 167. 1920; G. Leithäusser, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellschaft, 3. Reihe, 1. Jahrgang. S. 26. 1920; B. Gudden u. R. Pohl, Zeitschr. f. Physik **1**. S. 365. 1920. In der Arbeit des Hrn. Joachim sind in anschaulicher Weise die Schaltungen und Wirkungsweisen von Elektronenröhren als Wellenerzeuger, Überlagerer und Gleichrichter beschrieben worden, so daß sich an dieser Stelle eine näheres Eingehen auf Einzelheiten in der Versuchsanordnung erübrigt.

2) Das Einstellen auf das Verschwinden des Differenztones, also auf gleiche Schwingungszahl zwischen Sender und Überlagerer, wie es in der Technik der drahtlosen Telegraphie üblich ist, dürfte wegen der unteren Grenze der Hörbarkeit nur ungenaue Einstellungen liefern.

In der Fig. 1 ist die Einrichtung des Meßkondensators gezeichnet. In ein zylindrisches Messinggefäß von 8,5 cm lichter Weite kann eine durch Hartgummi (in der Figur mit Strichen ausgefüllt) isolierte Platte geschraubt werden. Diese Platte und der Boden des Gefäßes bilden so einen verstellbaren Plattenkondensator. Die Schraube besitzt eine Ganghöhe von 1 mm. Wie in der Figur ersichtlich, steht die Platte mit einer Trommel in fester Verbindung, die über das zylindrische Gefäß greift. Der Umfang der Trommel ist in 100 Teile eingeteilt, so daß die Entfernung der Platte vom Boden des Gefäßes auf 0,01 mm sicher abgelesen werden kann.

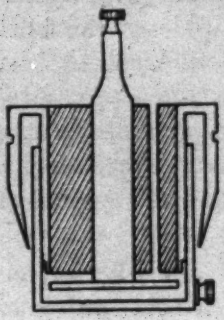


Fig. 1.

Der Vergleichskondensator war ein drehbarer Plattenkondensator mit Glimmer als Zwischenschicht.

Verlauf der Messungen und ihre Genauigkeitsgrenzen.

Zur Ausführung der Messungen war es notwendig, den Zuwachs der Kapazität des Meßkondensators beim Einführen eines Körpers von bekannter Dielektrizitätskonstante in Graden des Vergleichskondensators zu kennen. Hierzu dienten Flüssigkeiten von bekannter Dielektrizitätskonstante, die in stets gleicher Menge in den Meßkondensator eingefüllt wurden. Der Plattenabstand des Meßkondensators blieb dabei der gleiche. Trägt man die Einstellungen des Vergleichskondensators als Ordinaten und die Dielektrizitätskonstanten der Flüssigkeiten als Abszissen auf, so erhält man die Eichungskurve des Vergleichskondensators, aus der man jederzeit die Dielektrizitätskonstante irgendeiner Flüssigkeit, sobald deren Einstellung gemessen ist, unmittelbar ablesen kann. Als Eichflüssigkeiten dienten die in der Tab. 1 angegebenen Flüssigkeiten mit gut bekannten Dielektrizitätskonstanten. Die Flüssigkeiten waren sämtlich wasserfrei.

Die Ausführung der Messungen der Dielektrizitätskonstanten der Phosphore nach dem Starkeschen Verfahren geschah in der folgenden Weise. Es mußten zuerst Flüssigkeiten gesucht und mit den in der Tab. 1 angegebenen geeicht werden, die gut isolierten und außerdem die Phosphormasse nicht an-

Tabelle 1.

Flüssigkeit	Dielektrizitätskonstante	Beobachter
Benzol	2,26	P. Drude[1])
Toluol	2,38	H. Joachim[2])
Äther	4,36	
Chloroform	5,06	
Anilin	7,23	
Mischungen aus Aceton u. Benzol	8,43	P. Drude[1])
	10,20	
	14,30	

griffen. Als solche eigneten sich besonders Benzol-Nitrobenzolgemische. Sie mußten vollkommen wasserfrei sein, da besonders Sauerstoffphosphore durch geringe Mengen vorhandenen Wassers außerordentlich leiden. Es wurde daher nur über metallischem Natrium getrocknetes Benzol verwandt. Die Wasserfreiheit des Nitrobenzols wurde durch längeres Erhitzen bis zum Siedepunkt des Wassers gewährleistet. Die Aufbewahrung der gemischten Flüssigkeiten geschah stets über gekörntem Chlorcalcium.

Die Benzol-Nitrobenzolgemische wurden in verschiedenen Mischverhältnissen hergestellt. Die Dielektrizitätskonstanten dieser Gemische bewegten sich, immer um etwa 2 wachsend, von 2,26 bis zu ungefähr 14. Mit jedem dieser Gemische wurde auf die folgende Weise beobachtet. Es wurde die Einstellung des Vergleichskondensators abgelesen, einmal wenn sich die Flüssigkeit allein und dann, wenn die Flüssigkeit und zwischen die Kondensatorplatten gefülltes Phosphorpulver sich im Meßkondensator befanden. Die ersteren Einstellungen lieferten die Eichungskurve, die letzteren eine die Eichungskurve schneidende Kurve. Sobald nämlich das Phosphorpulver die Dielektrizitätskonstante der Mischflüssigkeit vergrößerte, lag der gemessene Punkt über der Eichungskurve, im entgegengesetzten Falle unter der Eichungskurve. Der Schnittpunkt der beiden Kurven ergab unmittelbar die Dielektrizitätskonstante des Phosphors. Die Größe des Winkels, unter dem sich die beiden Kurven schnitten, war davon abhängig, wie gut

1) P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chem. **23**. S. 288. 1897.

2) H. Joachim, Ann. d. Phys. **60**. S. 588. 1919. Die Werte gelten für eine Wellenlänge $\lambda = 300$ m.

das Phosphorpulver den Zwischenraum der Kondensatorplatten ausfüllte. Es wurde daher je nach der zur Verfügung stehenden Phosphormenge die Entfernung der Kondensatorplatten so gewählt, daß die bewegliche Platte stets mit leichtem Druck auf der aufgeschlemmten Phosphorschicht auflag. Natürlich blieben bei jeder Versuchsreihe mit derselben Phosphorprobe die Menge des aufgeschlemmten Pulvers (gleiche Gewichtsmengen vorher gesiebten Pulvers) und die Entfernung der Kondensatorplatten stets die gleichen. Die Volumina der benutzten Flüssigkeitsgemische waren so abgepaßt, daß die Flüssigkeit mit und ohne Phosphorpulver gerade mit dem oberen Rand der verstellbaren Platte des Meßkondensators in gleicher Höhe war. Durch einen Kanal in dem Hartgummi des Meßkondensators (vgl. Fig. 1) konnte vermittelst eines kleinen Hebers die Flüssigkeit, die sich noch über der Kondensatorplatte befand, abgesaugt werden.

Die Genauigkeit der Meßanordnung wurde an einem Körper mit gut bekannter Dielektrizitätskonstante geprüft. Als ein solcher diente Schwefel, der in Pulverform, aus zerriebenen Kristallen hergestellt, in Verwendung kam. Hr. Ficker[1]) hat für Schwefelplatten aus demselben Rohmaterial[2]) bei 17° C. den Wert 4,027 gefunden. Die vorliegende Untersuchung lieferte einen Wert von 4,03 für die Dielektrizitätskonstante des Schwefels bei Zimmertemperatur. In der Fig. 2 ist ein Schaubild des Verlaufes der Messung an Schwefel aufgezeichnet. Abszissen sind die Dielektrizitätskonstanten, Ordinaten die Kapazitätsänderungen in Graden des Vergleichskondensators. Die ausgezogene Linie ist die Eichkurve, die gestrichelte Linie die Kurve, die man erhält, wenn Flüssigkeit und Schwefel den Kondensatorzwischenraum ausfüllen. Die Messungen an den Phosphoren verliefen in durchaus ähnlicher Weise, so daß sich weitere Abbildungen für diese Messungen erübrigen. Die Übereinstimmung mehrmaliger Messungen derselben Phosphorprobe, wobei zuweilen die Mengen des aufgeschlemmten Pulvers und der Flüssigkeit und die Entfernung der Kondensatorplatten geändert waren, ist gut zu nennen. Die Abweichungen der einzelnen Messungen vom Mittelwert betrugen in keinem Falle mehr als $\pm$ 0,5 Proz. desselben. Da

1) E. Ficker, Diss. Leipzig 1909. S. 27.
2) Sulfur cryst. puriss. v. Merck, Darmstadt.

die Dielektrizitätskonstanten der Eichflüssigkeiten auf ein Hundertstel genau bestimmt sind, ergeben sich für die Phosphore Werte ihrer Dielektrizitätskonstanten bis zu zwei Stellen

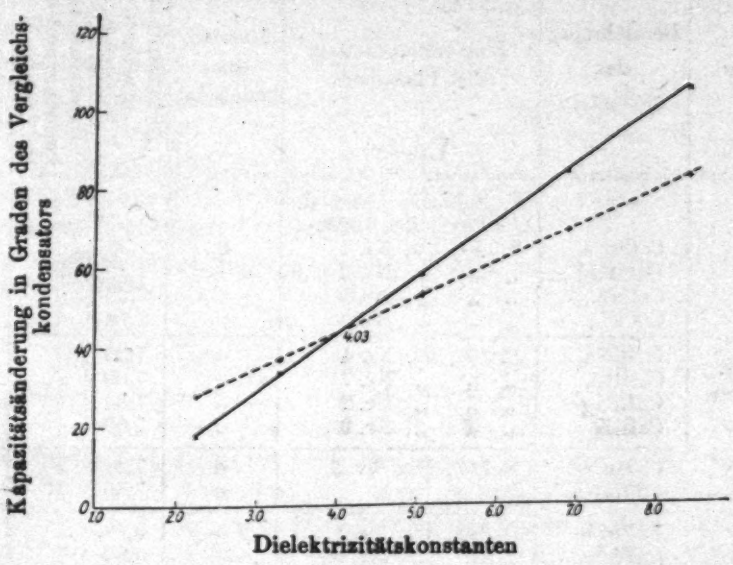


Fig. 2.

hinter dem Komma. Die Genauigkeit dieser Bestimmungen genügt für die Zwecke dieser Untersuchung vollkommen.

Ergebnisse der Messungen.

Die Ergebnisse der Dielektrizitätskonstantenmessungen sind in den Tabellen 2, 3 und 4 zusammengestellt. In der ersten senkrechten Reihe dieser Tabellen sind unter der Bezeichnung Gruppe jeweils die verwendeten Grundmaterialien angeführt, in der zweiten ist die Bezeichnung des Phosphors angegeben, in der dritten sind Literaturangaben gemacht, wo man die quantitative Zusammensetzung und die Herstellungsweise eines jeden Phosphors nachlesen kann und in der vierten sind bei jedem Phosphor die hauptsächlich ausgesandten Banden in der Lenardschen Bezeichnungsweise durch griechische Buchstaben eingetragen. Die fünfte senkrechte Reihe enthält die Angabe der Dielektrizitätskonstante eines jeden Phosphors, wie sie als Mittelwert aus mehreren Messungen verschiedener Proben erhalten wurde, in der sechsten Reihe sind die Mittelwerte der

Tabelle 2.

Die Sauerstoffphosphore.

Gruppe	Bezeichnung des Phosphors	Zusammensetzung des Phosphors Vgl. bei	Bandenaussendung	Dielektrizitätskonstante Mittelwerte	Dielektrizitätskonstante im Mittel für dasselbe Metall	Dielektrizitätskonstante.
Calciumphosphore	CaCuNa	F. Schmidt, Ann. d. Phys. 63. 1920: S. 267, Cu, Nr. 1	α	7,35	7,30	
	CaCuMg	„ „ „ Nr. 2 u. 3	$\alpha + \gamma$	7,25		
	CaCuK	„ „ „ Nr. 5	γ	7,20		
	CaCuLi	„ „ „ Nr. 4	γ	7,14		
	CaBiNa	S. 268, Bi, Nr. 4	α	7,30	7,29	7,20
	CaBiLi	„ „ „ Nr. 7	α	7,00		
	CaBiMg	„ „ „ Nr. 2	α	7,84		
	CaBiK	„ „ „ Nr. 8	α	7,00		
	CaMnNa	S. 268, Mn, Nr. 2	α	7,24	7,30	
	CaMnNa	—	α	7,36		
	CaPbCa	S. 268, Pb, Nr. 1	$\beta + \gamma$	6,98	6,89	
	CaPbNa	„ „ „ Nr. 3	β	6,80		
Strontiumphosphore	SrCuCa	S. 269, Cu, Nr. 2, 3, 4	α	7,49	7,64	
	SrCuNa	„ „ „ Nr. 5	α	8,02		
	SrCuLi	„ „ „ Nr. 7	α	7,35		
	SrCuMg	„ „ „ Nr. 6	α	8,05		
	SrCuK	„ „ „ Nr. 8	α	7,32		
	SrBiNa	S. 270, Bi, Nr. 2	α	7,36	7,53	7,44
	SrBiMg	„ „ „ Nr. 1	$\neq \alpha$	7,70		
	SrMnNa	S. 269, Mn, Nr. 1	α	7,35	7,35	
	SrPbNaCl	S. 269, Pb, Nr. 1 u. 2	β	7,10	7,26	
	SrPbNaF	„ „ „ Nr. 3	$\alpha + \beta$	7,42		
Bariumphosphore	BaCuLi	S. 270, Cu, Nr. 2, 3, 5	α + blau	7,80	8,00	
	BaCuNa	„ „ „ Nr. 1 u. 4	α	8,21		
	BaPbNa	S. 270, Pb, Nr. 1	β	8,92	8,92	8,43
	BaBiK	S. 271, Bi, Nr. 1	α	8,36	8,36	

Dielektrizitätskonstante für Phosphore mit demselben Metall im gleichen Grundmaterial, aber mit verschiedenem Zusatz gebildet und in der siebenten Reihe endlich ist der Mittelwert der Dielektrizitätskonstante für jede einzelne Gruppe ausgerechnet.

Aus der Tab. 2, die die Dielektrizitätskonstanten der Sauerstoffphosphore enthält, ist zu entnehmen:

1. Die Dielektrizitätskonstanten der Phosphore derselben Gruppe nehmen je nach Zusatz und wirksamem Metall voneinander stark verschiedene Werte an.

2. Auch Glühtemperatur (Dichte) und sonstige Einflüsse bei der Herstellung können die Dielektrizitätskonstante eines und desselben Phosphors verändern.[1]) Ein Beispiel hierfür sind die beiden CaOMnNa-Phosphore, die in gleicher quantitativer Zusammensetzung bei verschiedenen Glühtemperaturen hergestellt worden sind. Der in der Tab. 2 zuerst aufgeführte Phosphor war im Hempelofen bei heller Rotglut, der andere bei Gelbglut des Ofens bereitet.

3. Als Mittelwert der Dielektrizitätskonstante der Calciumphosphore wurde 7,20, der Strontiumphosphore 7,44 und der Bariumphosphore 8,43 gefunden. Die Abweichungen der Dielektrizitätskonstanten der einzelnen Phosphore von diesen Mittelwerten betragen bei den Calciumphosphoren bis zu 6 Proz., bei den Strontiumphosphoren bis zu 8 Proz., und bei den Bariumphosphoren bis zu 7,5 Proz. Diese Abweichungen übersteigen nach der in dieser Untersuchung erreichten Beobachtungsgenauigkeit weit die möglichen Meßfehler. Man ist daher nicht berechtigt, diese Mittelwerte für die Gruppen gegebenenfalls zu quantitativen Schlüssen zu benützen. Das gleiche gilt für die Mittelwerte für dasselbe wirksame Metall im Phosphor, denn auch hier sind die Abweichungen der einzelnen Dielektrizitätskonstanten von ihrem Mittelwert von etwa der gleichen Größenordnung wie oben.

Zusammenfassend kann man sagen, daß jeder einzelnen Phosphorprobe der Sauerstoffphosphore eine ihr eigentümliche Dielektrizitätskonstante zukommt.

In der Tab. 3 sind die Werte der Dielektrizitätskonstanten einiger Schwefelphosphore angegeben. Die erneute Messung ihrer Dielektrizitätskonstanten geschah in der Hauptsache deswegen, um zu prüfen, ob die von Hrn. Winawer gefundenen Mittelwerte für jede Gruppe der Größenordnung nach richtig sind und wie weit die Dielektrizitätskonstanten der einzelnen

1) Vgl. B. Winawer, a. a. O. S. 35, für die Schwefelphosphore.

Tabelle 3.
Die Schwefelphosphore.

Gruppe	Bezeichnung des Phosphors	Zusammensetzung des Phosphors Vgl. bei	Bandenaussendung	Dielektrizitätskonstante Mittelwerte	Dielektrizitätskonstante im Mittel für dasselbe Metall	Dielektrizitätskonstante Mittel der Gruppe
Calciumphosphore	CaCuNa	P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. 1904, Tab. Ia, Nr. 6 u. S. 658 0,07 normal	α	8,04	7,54	7,68
	CaCuMg	Frl. Gerard[1]) Nr. 10	β	7,04		
	CaBiNa	P. Lenard u. V. Klatt, a. a. O., Tab. Ie, Nr. 7 u. S. 659	$\alpha+\beta$	8,13	8,13	
	CaMnNa	P. Lenard u. V. Klatt, a. a. O., Tab. Ic u. S. 659	α	8,60	8,60	
	CaPb	Lenard, W. E. Pauli	γ	6,46	6,46	
Strontiumphosphore	SrCuK	Frl. Gerard[1]) Nr. 1	$\alpha+\beta$	8,93	8,93	8,65
	SrBiNa	P. Lenard u. V. Klatt, a. a. O., Tab. Im, Nr. 1 u. S. 661	α	8,31	8,38	
	SrBiNaCa	ebenda, Nr. 5 u. S. 661	α	8,46		
Bariumphosphore	BaCuLi	P. Lenard u. V. Klatt, a. a. O., Tab. In, Nr. 8 u. S. 662	α	8,50	8,50	8,50
Zinkphosphore	ZnCuMgNa	Tomaschek[2])	α	7,08	7,86	7,26
	$ZnCuNa_2SO_4$	„	α	8,64		
	ZnMnK	Tomaschek[2])	α	6,67	6,67	

Phosphore von diesen Mittelwerten abweichen. Neu hinzugefügt sind in vorliegender Untersuchung die Dielektrizitäts-

1) Diese Phosphore hat Frl. Gerard im hiesigen Institut hergestellt. Über die Zusammensetzung der Phosphore wird Frl. Gerard demnächst berichten.

2) Die hier benutzten Zinksulfidphosphore entstammen einer im hiesigen Institut ausgeführten Untersuchung meines Kollegen Hrn. Dr. Tomaschek. Er wird in allernächster Zeit über die Herstellungsweisen und die Eigenschaften der Zinksulfidphosphore berichten.

konstanten einiger Zinkphosphore.[1]) Hr. Winawer findet für die Dielektrizitätskonstanten der Calciumphosphore im Mittel 8,08, für die Strontiumphosphore 8,48 und für die Bariumphosphore 10,34, während die vorliegende Untersuchung für die Calciumphosphore 7,68, für die Strontiumphosphore 8,65 und für die Bariumphosphore 8,50 liefert. Sehr stark ist also nur der Unterschied in den Mittelwerten bei den Bariumphosphoren; ich komme im nächsten Abschnitt dieser Untersuchung noch darauf zu sprechen. Abweichungen der Dielektrizitätskonstanten der einzelnen Phosphore von den Gruppenmittelwerten findet Hr. Winawer bis zu 3 Proz., hier sind solche von 13 Proz. zu verzeichnen. Es gilt also in noch verstärktem Maße für die Schwefelphosphore dasselbe, was schon für die Sauerstoffphosphore über die Unzulässigkeit der Mittelwertbildung gesagt worden ist. Man kann daher den Satz Hrn. Winawers[2]): „Die leuchtenden Präparate eines Sulfids haben alle die gleiche Dielektrizitätskonstante", nur ungefähr als richtig ansehen, bei irgend welchen genaueren Rechnungen jedoch muß man immer die bei den betreffenden Phosphoren gemessenen Dielektrizitätskonstanten einsetzen.

Tabelle 4.

Die Selenphosphore.

Bezeichnung des Phosphors	Zusammensetzung des Phosphors vgl. bei		Bandenaussendung	Dielektrizitätskonstante
CaBiNa	F. Kittelmann, Ann. d. Phys. 46. S. 192. 1915. Nr. 2		β	9,60
CaZnCaKNa	desgl.	Nr. 4	α	8,26
SrCuCaKLi	—		β	11,84
BaPbNa	desgl.	Nr. 16	α	9,24

Die Tab. 4 enthält die Dielektrizitätskonstanten von vier Selenphosphoren.[3]) Leider stand mir keine größere Zahl dieser Phosphore zur Verfügung. Jedoch genügen die gefundenen

1) Vgl. Anm. 2 auf vorstehender Seite.

2) B. Winawer, a. a. O. S. 33.

3) Diese Phosphore verdankt das hiesige Institut Hrn. Prof. Dr. W. E. Pauli. Sie sind von seinem Schüler Hrn. Dr. Kittelmann hergestellt worden.

Werte ihrer Dielektrizitätskonstanten den Zwecken dieser Untersuchung.

Vergleicht man in den Tabb. 2, 3 und 4 die Dielektrizitätskonstanten der einzelnen Phosphore miteinander, so findet man, daß die Sauerstoffphosphore eine kleinere und die Selenphosphore eine größere mittlere Dielektrizitätskonstante haben als die Schwefelphosphore. Dies steht in vollem Einklang mit dem Sinn der spektralen Verschiebungen der Dauererregungsverteilungen entsprechender Phosphoreszenzbanden beim Übergange von einer Phosphorgattung zur anderen.[1])

II. Gesetzmäßigkeiten in den absoluten Dauererregungsverteilungen.

Die Gesetzmäßigkeiten in den Dauererregungsverteilungen der Phosphore treten erst dann zutage, wenn man nach dem Vorgange Hrn. Lenards[2]) die Wellenlängen der beobachteten Dauererregungsstellen durch die Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante des Phosphors dividiert. Der Quotient gibt dann diejenige Wellenlänge an, welche sich bei Versetzung des phosphoreszenzfähigen Metallatoms in den freien Äther ergeben würde (die absolute Wellenlänge). Da nun, wie im ersten Teil der vorliegenden Untersuchung gezeigt worden ist, die Dielektrizitätskonstanten der einzelnen Phosphore stark voneinander abweichen, sollte man, um zu möglichst genauen absoluten Wellenlängen zu kommen, die an einer Phosphorprobe ausgemessenen Dauererregungsstellen sofort durch die Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante dieser Probe dividieren. Dies war aber bei dem vorliegenden umfangreichen Material nur in einzelnen Fällen möglich.

Bei der Ausmessung der Dauererregungsverteilungen der Sauerstoffphosphore bin ich seinerzeit so verfahren, daß ich bei allen Proben, die eine bestimmte Bande gut zeigten, ihre Dauererregungsverteilung von Probe zu Probe feststellte und dann Mittelwerte der Dauererregungsstellen für diese Bande ausrechnete.[3]) Um sichere absolute Wellenlängen zu erhalten, habe ich hier diese Mittelwerte durch die Quadratwurzel aus einer Dielektrizitätskonstante dividiert, die ich als ein Mittel

1) F. Schmidt, Ann. d. Phys. **63.** S. 290. 1920.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. **31.** S. 661. 1910.
3) F. Schmidt, a. a. O. S. 278 u. 289.

Tabelle 5.

	Bezeichnung der Bande	Sauerstoffphosphor: $\lambda_{abs.}$ d. Dauererregungsverteilung d_4	d_3	d_2	d_1	$\lambda_{abs.}$ d. Bande $\mu\mu$	Schwefelphosphor: $\lambda_{abs.}$ der Dauererregungsverteilung d_4	d_3	d_2	d_1	$\lambda_{abs.}$ d. Bande $\mu\mu$	Selenphosphor: $\lambda_{abs.}$ d. Dauererregungsverteilung d_4	d_3	d_2	d_1	$\lambda_{abs.}$ d. Bande $\mu\mu$
I.	CaBi α	·	·	104	143	161	·	77	(113), 114	147	157	·	·	·	·	·
	SrBi α	·	·	106	142	164	·	·	(111), 114	147, 151	159	·	·	·	·	·
	BaBi α	·	·	107	140	185	·	·	(112)	144	168	·	·	·	·	·
Mittel	$\lambda_{abs.}$ d	·	·	106	142	·	·	77	113	147	·	·	·	·	·	·
II.	CaCu α	80	100	124	148	178	·	(97)	123	146	181	·	·	·	·	·
	SrCu α	·	101	124	146	188	·	(101)	122	145	181	·	·	·	·	·
	BaCu α	·	·	124	·	209	·	·	118	146	186	·	·	·	·	·
	CaZn α	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	146	196
	SrZn α	·	·	·	·	·	·	(100)	122	145	186	·	·	·	·	·
	CaPb β	·	99	122	149	164	·	(99)	123	((153))	148	·	·	·	·	·
	SrPb β	·	99	120	145	165	·	(98)	(123)	·	152	·	·	·	·	·
	BaPb β	·	103	124	·	181	·	(101)	118	·	171	·	·	·	·	·
	SrAg β	·	·	·	·	·	·	(95)	(121)	145	142	·	·	·	·	·
	CaMn α	·	100	122	147	218	·	(95)	123	148	211	·	·	·	·	·
	SrMn α	·	100	122	148	195	·	(98)	121	146	188	·	·	·	·	·
	CaBi β	·	·	·	·	·	·	(92)	·	147	183	·	·	122	145	214
Mittel	$\lambda_{abs.}$ d	80	100	123	147		·	98	121	146				122	145	
III.	CaPb α	·	·	·	·	·	((93))	(102)	124	((153))	190	·	·	·	·	·
	SrPb α	·	103	125	146	193	·	(101)	121	149	186	·	·	·	·	·
	BaPb α	·	·	·	·	·	·	(103)	(117)	·	180	·	·	·	142	212
	SrAg α	·	·	·	·	·	·	108	122	145	192	·	·	·	·	·
Mittel	$\lambda_{abs.}$ d		103	125	146			103	121	147					142	
IV.	CaCu β	·	·	·	·	·	(92)	(112), 113	134, 139	·	150	·	·	·	·	·
	SrCu β	·	·	·	·	·	·	(111), 113	135, 139	·	154	·	·	·	·	·
	BaCu β	(97)	·	134	·	166	·	(115)	·	·	166	·	·	·	·	·
Mittel	$\lambda_{abs.}$ d	97	·	134			92	113	137							
V.	CaCu γ	99	117	137	154	222	(100)	(129)		151	218	·	·	·	·	·
	CaPb γ	101	121	146		227	·	·	·	154	240	·	·	·	·	·
	SrZn δ	·	·	·	·	·	101	118	·	(149)	167	·	·	·	·	·
Mittel	$\lambda_{abs.}$ d	100	119	137	154		100	118	·	151						

aus den Dielektrizitätskonstanten aller zur Erregungsverteilungsmessung dieser Bande benutzten Phosphorproben erhielt. Die absoluten Wellenlängen der Dauererregungsverteilungen der Schwefelphosphore sind schon von Hrn. Lenard[1]) ausgerechnet worden; sie wurden hier zum größten Teil benutzt. Manche Dauererregungsstellen der Schwefelphosphore sind auch von Hrn. Hirsch[2]) neu gefunden worden. Die Wellenlängenangaben der Dauererregungsverteilungen der Selenphosphore entnahm ich der Untersuchung des Hrn. Kittelmann.[3])

In der Tab. 5 sind die absoluten Wellenlängen fast aller bis jetzt gefundenen Dauererregungsstellen der Erdalkaliphosphore[4]) zusammengestellt. Eingeklammerte Zahlen in der Tabelle bedeuten Unsicherheit in der Messung der Dauererregungsstellen; zweimal eingeklammert sind Zahlenangaben, die nur die ungefähre Lage der Dauererregungsstellen bei ihrer ersten Auffindung festhalten wollten.[5]) Diese Zahlen sind zur Ausrechnung von Mittelwerten der absoluten Wellenlängen nicht benutzt worden.

Ich will im folgenden die Gesetzmäßigkeiten in den Dauererregungsverteilungen der Phosphore, die sich durch die in der Tab. 5 erfolgte Gegenüberstellung ihrer absoluten Wellenlängen ergeben, in mehreren Sätzen klarlegen.

---

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **31.** S. 659f. 1910.

2) J. Hirsch, Diss. Heidelberg, 1912.

3) F. Kittelmann, Diss. Jena 1915 und Ann. d. Phys. **46.** S. 177. 1915.

4) Nicht aufgenommen in die Tabelle sind einige Banden der Selenphosphore, da mir nur wenige dieser Phosphore zur Dielektrizitätskonstantenmessung zur Verfügung standen. Jedoch genügen die gemessenen Selenphosphore den Zwecken dieser Untersuchung, so daß von einer weiteren Herstellung dieser Phosphore abgesehen werden konnte. Ebenso fehlen in der Tabelle die Zinksulfidphosphore. Über ihre absoluten Wellenlängen werden Hr. Tomaschek und ich in einer besonderen Arbeit berichten.

5) Dies gilt besonders für die d_1-Erregungsstellen der CaSPbα und β-Banden und für die d_4-Erregungsstelle der CaSPb α-Bande, die von Hrn. Hirsch gefunden worden sind (J. Hirsch, a. a. O. S. 17 u. S. 21). Die große Unsicherheit in ihrer Wellenlängenbestimmung liegt in der Benutzung des diskontinuierlichen Quecksilberspektrums zur Erregung. Hr. Hirsch gibt z. B. nur an, die Hg-Linie 435 $\mu\mu$ oder 264 $\mu\mu$ erregte sehr stark.

1. *Die spektralen Lagen der Stellen hellsten Nachleuchtens der Dauererregungsverteilung einer Phosphoreszenzbande sind mit großer Schärfe durch die Dielektrizitätskonstante des Phosphormaterials gegeben.*

Dieses Gesetz ist schon 1910 von Hrn. Lenard[1]) erkannt und durch Gleichheit der absoluten Wellenlängen der Dauererregungsstellen einer bestimmten Phosphoreszenzbande beim Übergange von CaS zu SrS zu BaS als Grundmaterial bewiesen worden. In der vorliegenden Untersuchung wird dieses Gesetz auch für den Übergang von einer Phosphorgattung zur anderen bestätigt. Wie genau sich übrigens die Dauererregungsstellen einer Bande auf Grund einer Veränderung der Dielektrizitätskonstante des Phosphormaterials im Spektrum verschieben, sei hier noch an einigen besonderen Beispielen gezeigt. Aus der Tab. 3 wurden zwei Phosphore, CaSCuMg und SrSCuK herausgegriffen, deren Dielektrizitätskonstanten starke Abweichungen vom Gruppenmittel aufwiesen, und die beide die β-Bande des Kupfers bei Zimmertemperatur zeigten.[2]) Ihre Dauererregungsverteilungen wurden im Spektrum des Magnesiumwasserfunkens[3]) ausgemessen. In der Tab 6 sind die Ver-

Tabelle 6.

Bezeichnung der Bande	Wellenlängen der Dauererregungsverteilungen				D. K. des Phosphors
	$\lambda\ d_1$ $\mu\mu$	$\lambda_{abs.}\ d_1$ $\mu\mu$	$\lambda\ d_2$ $\mu\mu$	$\lambda_{abs.}\ d_2$ $\mu\mu$	
CaSCu β	367	139	300	113	7,04
SrSCu β	415	139	337	113	8,93
BaSCu α	425	146	345	118	8,50

suchsergebnisse niedergelegt. Man sieht sofort die außerordentlich gute Übereinstimmung der absoluten Wellenlängen. Ihre Werte sind auch zusammen mit denjenigen Hrn. Lenards in die Tab. 5 eingetragen worden.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 657f. 1910.

2) CaSCuMg sendet bei Zimmertemperatur nur die blaue β-Bande aus, SrSCuK die grüne α- und die blaue β-Bande gemischt. (Frl. Gerard.)

3) Vgl. über diese Lichtquelle: F. Schmidt, Ann. d. Phys. 63. S. 272f. 1920.

In der Lenardschen Untersuchung[1]) findet man die Werte für die absoluten Wellenlängen de BaSCu α-Bande stark von den Werten für dieselbe Bande in CaS und SrS verschieden. Es lag der Verdacht nahe, daß der zur Ausrechnung der absoluten Wellenlängen ihrer Dauererregungsverteilung benutzte Wert Winawers für Bariumphosphore gerade in diesem Falle zu groß war. Es wurde daher ein BaSCuLi-Phosphor nach Lenards[2]) Angaben neu bereitet, seine Dielektrizitätskonstante und seine Dauererregungsverteilung im Spektrum des Magnesiumwasserfunkens gemessen. Die Ergebnisse sind in Tab. 6 niedergelegt. Die Werte der absoluten Wellenlängen stimmen jetzt gut mit denen entsprechender Banden überein.

Hr. Göggel[3]) hatte zur Aufnahme der spektralen Verteilungskurve der lichtelektrischen Wirkung zwei Phosphore benutzt, ein CaSBiNa und ein SrSBiNa-Phosphor, die Dauererregungsstellen bei 484 $\mu\mu$ und 336 $\mu\mu$ bzw. 450 $\mu\mu$ und 338 $\mu\mu$ aufwiesen. Ich maß ihre Dielektrizitätskonstanten und erhielt die Werte 8,50 bzw. 8,80. Dividiert man die Dauererregungsstellen dieser Pbosphore durch die Wurzel aus ihrer Dielektrizitätskonstante, so ergeben sich absolute Wellenlängen von 147 $\mu\mu$ und 114 $\mu\mu$ bzw. 151 $\mu\mu$ und 114 $\mu\mu$, die in guter Übereinstimmung mit den sonst an diesen Phosphoren bekannten Werten sind.

Es muß hier noch hinzugefügt werden, daß die spektralen Lagen der Bandenschwerpunkte nicht dem obigen Gesetze folgen, was aus der Verschiedenheit ihrer absoluten Wellenlängen sofort zu ersehen ist (vgl. Tab. 5).[4])

---

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 657f. 1910.

2) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. S. 662 u. Tab. I n, Nr. 8. 1904.

3) K. Göggel, Diss. Heidelberg vom 19. Nov. 1920.

4) Die Dauererregungsstellen erleiden auch geringe spektrale Verschiebungen je nach der Größe der im Phosphor vorhandenen Zentren. (Vgl. P. Lenard, Lichtabsorption und Energieverhältnisse. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Abt. A. 13. Abh. S. 60. 1914 u. P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht III. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Abt. A. 8. Abh. S. 28. 1918.) Diese Verschiebungen haben jedoch auf obige Schlüsse wenig Einfluß, weil bei der Ausmessung der Dauererregungsstellen im Spektrum nur solche von Zentren mittlerer Dauer beobachtet werden.

2. *Jede Bande desselben phophoreszenzfähigen Metalls hat eine ihr eigentümliche absolute Dauererregungsverteilung.*

Vergleiche hierzu in der Tab. 5 z. B. Cu α, β und γ. Dieses Gesetz ist natürlich durch die Untersuchungen Hrn. Lenards an den Schwefelphosphoren in etwas anderer Fassung schon lange bekannt; es ist aber wichtig, es bei Aufführung der Gesetzmäßigkeiten in den absoluten Dauererregungsverteilungen der Phosphore nochmals zu erwähnen. Zur Erklärung des Auftretens von mehreren Banden bei demselben Metall nimmt Hr. Lenard[1]) an, daß das Metallatom je nach der Art seiner Lagerung in den Zentren befähigt ist, verschiedene Banden auszusenden. Das obige Gesetz zeigt dann an, daß sich das Metallatom auch bei der Energieaufnahme während der Erregung je nach der Art der Lagerung in den Zentren in verschiedener Weise betätigt.

3. *Einander entsprechende Banden der Phosphore haben die gleichen absoluten Wellenlängen der Dauererregungsverteilung unabhängig von der Art des wirksamen Metallatoms.*[2])

Man sieht dieses Gesetz besonders bei den Banden der II. Abteilung in der Tab. 5 für die Metalle Mn, Cu, Zn, Ag, Pb und Bi bestätigt. Dieses Ergebnis kann dahin gedeutet werden, daß bei gleicher Art der Lagerung dieser Metallatome in den Zentren die für die Energieaufnahme bei der Erregung in Betracht kommenden und an der Oberfläche dieser Metallatome befindlichen Elektronen ganz oder nahezu gleiche Anordnungen ihrer Bahnen haben müssen.

4. *Die bis jetzt an den Phosphoren gefundenen fünf Arten von absoluten Dauererregungsverteilungen haben den gesetzmäßigen Bau von Serienspektren.*

Man findet die verschiedenen Arten von absoluten Dauererregungsverteilungen in der Tab. 7 zusammengestellt. Ihre Wellenlängenangaben λ nebst den dazugehörigen Schwingungszahlen ν sind dadurch entstanden, daß die Mittelwerte der absoluten Dauererregungsverteilung aus jeder Bandenabteilung

1) P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht III. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Abt. A. 8. Abh. 1918. S. 74f.

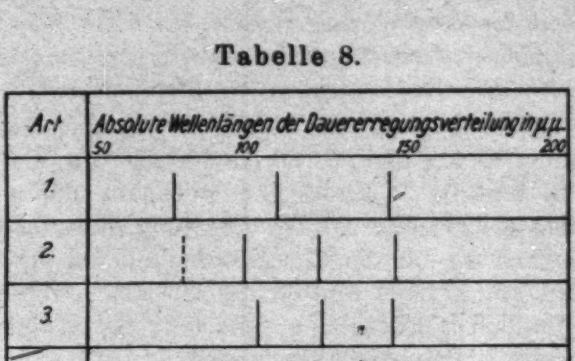
2) Hr. Lenard (Ann. d. Phys. **31.** S. 659. 1910) hat schon bei entsprechenden Banden der Metallpaare Zn, Cu und Pb, Ag Gleichheit der absoluten Wellenlängen ihrer Dauererregungsverteilungen gefunden.

der Tab. 5 nochmals zu einem Mittel aus den drei Phosphorgattungen vereinigt worden sind. Es muß jedoch mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, daß die in der Tab. 7 aufgeführten Zahlen noch keine große Genauigkeit beanspruchen

Tabelle 7.

Art	Absolute Dauererregungsstellen							
	d_4		d_3		d_2		d_1	
	λ $\mu\mu$	ν sec^{-1}	λ $\mu\mu$	ν sec^{-1}	λ $\mu\mu$	ν sec^{-1}	λ $\mu\mu$	ν sec^{-1}
		$\cdot 10^{13}$		$\cdot 10^{13}$		$\cdot 10^{13}$		$\cdot 10^{13}$
1.	•	•	77	3,90	109	2,75	144	2,08
2.	80	3,75	99	3,03	122	2,46	146	2,05
3.	•	•	103	2,91	123	2,44	145	2,07
4.	94	3,19	113	2,65	135	2,22	•	•
5.	100	3,00	118	2,54	137	2,19	153	1,96

Tabelle 8.



können, da die Messung der hellsten Stellen des Nachleuchtens im erregenden Spektrum wegen ihrer Breite und Verwaschenheit zuweilen unsicher ist und die errechneten Mittelwerte besonders bei der dritten, vierten und fünften Art noch durch zu wenig Beobachtungen gestützt sind.[1]) Für die Auffindung

1) Hier müßten noch eingehendere Messungen der Dauererregungsverteilungen der betreffenden Phosphoreszenzbanden mit gleichzeitiger Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten der einzelnen Phosphore stattfinden.

allgemeiner Seriengesetze genügt jedenfalls der bis jetzt erreichte Grad der Genauigkeit vollkommen. Der besseren Übersicht halber sind in der Tab. 8 nochmals diese absoluten Wellenlängen nach Art der Linienspektren gezeichnet. Man ersieht aus den Tabb. 7 und 8 sofort das Folgende:

a) Die Abstände aufeinander folgender absoluter Dauererregungsstellen nehmen in jeder Art nach kürzeren Wellen hin ab (Tab. 8).

b) Die Schwingungszahlen aufeinander folgender absoluter Dauererregungsstellen in jeder Art verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate aufeinander folgender ganzer Zahlen (Tab. 7).[1])

Diese überraschenden Gesetzmäßigkeiten weisen darauf hin, daß sich die gefundenen Arten der absoluten Dauerregungsverteilungen darstellen lassen durch die bekannten Serienformeln

$$\nu = N \cdot Z_{\text{eff.}}^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\infty^2} \right),$$

in denen ν die Schwingungszahlen der absoluten Dauererregungsstellen, N die Rydberg-Ritzsche Konstante, $Z_{\text{eff.}}$

1) Hr. Pohl hat in seiner Arbeit „Über eine Beziehung zwischen dem selektiven Photoeffekt und der Phosphoreszenz" (Verhandl. der Deutschen phys. Ges. **13**. S. 961. 1911) nach einem gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen den Dauererregungsstellen der Phosphore gesucht. Nach einer Formel Hrn. Lindemanns (Verhandl. d. Deutschen phys. Ges. **13**. S. 482. 1911) müßten sich die Wellenlängen der Dauererregungsstellen wie die reziproken Wurzeln aus den ganzen Zahlen, nämlich den Wertigkeiten verhalten. Hr. Pohl findet nun (a. a. O. S. 965), daß sich die Mittelwerte aller damals bekannten Dauererregungsstellen der Phosphore verhalten wie:

$$\lambda d_1 : \lambda d_2 : \lambda d_3 = 100 : 81{,}5 : 66{,}7,$$

während

$$2^{-1/2} : 3^{-1/2} : 4^{-1/2} = 100 : 81{,}7 : 70{,}8$$

ist. Hierzu ist zu bemerken, daß nach dem damaligen Stande der Kenntnis des Atomaufbaues nach der von mir gefundenen Gesetzmäßigkeit wohl kaum gesucht wurde. Sodann sind in vorliegender Untersuchung die absoluten Dauererregungsstellen als Mittelwerte aus einer viel größeren Zahl von Messungen bekannt, als sie 1911 vorlagen, wodurch das gefundene Gesetz mit größerer Schärfe hervortritt. Aber selbst bei den von Hrn. Lenard 1910 ausgemessenen Dauererregungsverteilungen verhalten sich, wie man an dem obigen Zahlenbeispiel Hrn. Pohls erkennen kann, die Wellenlängen besser wie die Quadrate aufeinanderfolgender ganzer Zahlen, als wie die reziproken Wurzeln.

die effektive Kernladung des phosphoreszenzfähigen Metallatoms und n eine ganze Zahl bedeutet. Daß in dieser Formel der eine Term als unendlich groß auftritt, steht in vollem Einklang mit der von Hrn. Lenard stets geäußerten Anschauung, daß bei Erregung der Phosphore zu dauerndem Nachleuchten die Elektronen vollständig aus dem Verbande des Metallatoms losgelöst und an den Nachbaratomen aufgespeichert werden.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die spektralen Lagen der beobachtbaren Dauererregungsverteilungen einer Phosphoreszenzbande sind nicht konstant, sondern je nach der Größe der Dielektrizitätskonstante des Phosphormaterials und nach der Größe der Zentren veränderlich. Erst die absoluten Wellenlängen der Dauererregung, die man durch Division der beobachteten Dauererregungsstellen durch die Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante des Phosphormaterials erhält und die die Erregerwellenlängen bei Versetzung des Metallatoms in den freien Äther darstellen, sind für die Phosphoreszenzbanden eigentümlich. Diese Wellenlängen sind für entsprechende Banden bei Metallen mit stark verschiedener Ordnungszahl die gleichen. Für die bis jetzt gefundenen absoluten Dauererregungsverteilungen der Phosphore konnte die Gültigkeit der für Licht- und Hochfrequenzspektren geltenden Beziehungen nachgewiesen werden. Das Metallatom in den Phosphoreszenzzentren verhält sich daher in bezug auf die Lichtabsorption wie ein im freien Äther befindliches Atom, dessen Schwingungen in gesetzmäßiger Weise durch die Dielektrizitätskonstante des Phosphors beeinflußt werden und dessen Schwingungsmöglichkeiten je nach seiner Lagerung in den Zentren verschieden sein können.

Ich möchte auch an dieser Stelle Hrn. Geheimrat Lenard für die Gewährung der Mittel des Instituts für diese Untersuchung und für viele wertvolle Ratschläge meinen Dank aussprechen.

Heidelberg, den 15. Dezember 1920.

(Eingegangen 17. Dezember 1920.)

4. *Zur Theorie der Vakuumentladung; von George Jaffé.*

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat der Verfasser eine Theorie der Hochvakuumentladung entwickelt[1]), die im wesentlichen von den gleichen Annahmen ausgeht, wie die Langmuir-Schottkysche Raumladungstheorie, die aber die Anwesenheit von Gasresten berücksichtigt. Es wurde vorausgesetzt, daß der Strom von Elektronen getragen wird, die — etwa von einer Glühkathode — in genügender Zahl geliefert werden. Daneben soll in den Gasresten Stoßionisation und Wiedervereinigung stattfinden, jedoch soll der Gasdruck so niedrig sein, daß die positiven Ionen nur den Potentialverlauf beeinflussen und keinen merklichen Beitrag zum Stromwert liefern. Unter diesen Umständen kann auch von der Anwesenheit negativer Ionen abgesehen werden.

Wir beschränken die Betrachtung auf den Fall des Stromübergangs zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Ebenen, zu denen wir die x-Achse senkrecht gelegt denken; die Kathode befinde sich bei $x = 0$, die Anode bei x. Die Gleichungen, welche die ausgesprochenen Voraussetzungen ausdrücken, lauten dann (J. S. 146):

$$\frac{d^2 V}{d x^2} = -4\pi e(p - n), \tag{1}$$

$$i = e n v, \tag{2}$$

$$Q - \alpha n p = 0. \tag{3}$$

(V Potential, e Elementarladung, p und n die Zahl der positiven Ionen, bzw. Elektronen pro ccm, i Stromdichte, v Geschwindigkeit der Elektronen, Q die Zahl der pro Sekunde und ccm erzeugten Ionen und α der Wiedervereinigungskoeffizient.) Wie in der früheren Arbeit, wird der Strom

1) G. Jaffé, Ann. d. Phys. 65. S. 145. 1920. Auf diese Arbeit wird im Text mit J. und folgender Seitenzahl verwiesen.

positiv gerechnet, wenn die Elektronen sich in der Richtung der positiven x bewegen.

Hierzu kommen nun noch die Beziehungen

$$\frac{m}{2} v^2 = e V, \qquad (m = \text{Elektronenmasse}) \tag{4}$$

$$Q = q i. \tag{5}$$

Gleichung (4) enthält die Annahme, daß die Elektronen *im allgemeinen* den Raum zwischen Kathode und Anode unbehindert durchfallen, und (5) setzt die Zahl der wirksamen Stöße proportional der Stromdichte, vernachlässigt also die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Stromrichtung (J. S. 147).

Unter Hinzunahme der Grenzbedingungen, daß V und dV/dx an der Kathode verschwinden sollen (vgl. J. S. 148), ergibt sich aus den Gleichungen (1) bis (5) die gesuchte Stromspannungscharakteristik. Wir deuten die erhaltene Endgleichung [J. S. 149, Formel (16)] hier nur symbolisch an

$$F(i, V, x) = 0, \tag{I}$$

und beschränken uns darauf, die Näherungsformel für kleine Werte von q anzugeben [J. S. 151, Gleichung (20) und Gleichung (20a)]

$$\begin{cases} V = (a_2 i x^2)^{2/3} \{1 - b_2 a_2^{2/3} i^{-1/3} x^{4/3}\}, \\ a_2 = 9\pi \sqrt{\frac{m}{2e}}; \quad b_2 = \frac{4e^2 q}{21 m \alpha}. \end{cases} \tag{Ia}$$

Für $b_2 = 0$ reduziert sich Gleichung (Ia) auf die bekannte Child-Langmuirsche Formel.

Von den gemachten Annahmen haben die Gleichungen (4) und (5) offenbar einen viel engeren Gültigkeitsbereich als die Gleichungen (2) und (3). Es wurde von vornherein darauf hingewiesen (J. S. 147), daß die Gleichungen (3) und (4) streng genommen miteinander in Widerspruch stehen, weil bei Berücksichtigung von Stoßionisation und Wiedervereinigung die Geschwindigkeit der Elektronen gegenüber derjenigen, die durch Gleichung (4) gegeben ist, modifiziert sein muß. Die entwickelte Theorie beansprucht darum auch nur Gültigkeit für extrem niedrige Gasdrucke. (Nach einer J. S. 162 mitgeteilten Schätzung kommt etwa das Intervall von 10^{-3} bis

10^{-5} mm Hg in Frage.) Für höhere Gasdrucke, die allerdings immer noch so niedrig bleiben müssen, daß der Strombeitrag der positiven Ionen vernachlässigt werden kann, muß die Annahme (4) aufgegeben werden.

Im folgenden soll ausgeführt werden, welche Änderung die Theorie dadurch erfährt. Eine solche Untersuchung ist schon darum von Interesse, auch für extrem niedrige Gasdrucke, weil Hr. Lilienfeld in einer Bemerkung zu der Arbeit des Verfassers[1]) betont hat, daß die Annahme (4) mit charakteristischen Merkmalen der von ihm studierten Entladungserscheinungen, insbesondere mit seinen Temperaturmessungen an der Anode, im Widerspruch steht.

Diejenige Abänderung der Voraussetzung (4), welche sich von selbst darbietet, besteht in der einfachen Annahme, daß die Elektronen immer nur über eine kurze Strecke, die mittlere freie Weglänge λ, eine ungestörte Beschleunigung durch das elektrische Feld erfahren und am Ende dieser Strecke die ganze aus dem Felde stammende Energie durch Stoß wieder abgeben. Damit ist zugleich ausgesprochen, daß die Elektronen an der Wärmebewegung der Gasmoleküle teilnehmen, und eine vollständige Theorie dürfte keine Einschränkung über das Verhältnis der mittleren thermischen Geschwindigkeit zu der Geschwindigkeitsänderung im elektrischen Felde enthalten.

Beschränken wir uns aber, wie in der früheren Arbeit, auf die Betrachtung hohen Vakuums und hinreichender Feldstärken, so dürfen wir die Geschwindigkeit der Elektronen im Felde als groß gegen ihre thermische Geschwindigkeit ansetzen. Bedeute X den Wert der mittleren Feldstärke, P den Gasdruck in mm Hg, so ist die ausgesprochene Voraussetzung erfüllt, sobald X/P einen größeren Wert als 1000 annimmt.[2]) Für solche Werte von X und P, welche dieser Einschränkung unterliegen, ist zugleich die Annahme gerechtfertigt, daß im allgemeinen jeder Stoß Ionisation zur Folge hat. Dann behält also außer den Gleichungen (1) bis (3) auch Gleichung (5)

1) J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. **63**. S. 175. 1920.

2) J. S. Townsend, Die Ionisation der Gase. Handbuch der Radiologie 1. Art. 221.

ihre Gültigkeit, und nur an die Stelle von Gleichung (4) tritt die Beziehung

$$m\frac{v_e^2}{2} = e[V(x+\lambda) - V(x)]. \tag{4'}$$

Dabei ist die Geschwindigkeit zu Beginn der Wegstrecke λ schon vernachlässigt und unter v_e ist die Geschwindigkeit nach Durchlaufen dieser Strecke verstanden. Wenn λ hinreichend klein gegen den Elektrodenabstand ist[1]), kann man Gleichung (4') nach dem Taylorschen Satze entwickeln, nach dem Gliede mit λ abbrechen und findet so

$$v_e = \sqrt{\frac{2e\lambda}{m}\frac{dV}{dx}}. \tag{6}$$

Also ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{e\lambda}{2m}\frac{dV}{dx}}, \tag{7}$$

und dieser Ausdruck ist in Gleichung (2) einzuführen.[2])

Eliminiert man Q, v, p und n zwischen den Gleichungen (1) bis (3), (5) und (7), so erhält man folgende Differentialgleichung für V:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 2\bar{a}_1\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^{-1/2} - \bar{b}_1\left(\frac{dV}{dx}\right)^{1/2}\right\} \tag{8}$$

mit der Bedeutung

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{a}_1 = \bar{a}\,i; \quad \bar{a} = 4\pi\sqrt{\dfrac{m}{2e\lambda}}, \\ \bar{b}_1 = \dfrac{\bar{b}}{i}; \quad \bar{b} = \dfrac{e^2 q\lambda}{2mn}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Multipliziert man (8) mit $(dV/dx)^{1/2}$ und integriert unter Festhaltung der Grenzbedingungen, daß V und dV/dx für $x = 0$ verschwinden sollen, so ergibt sich

$$V = \frac{x}{\bar{b}_1} - \frac{1}{3\bar{a}_1\bar{b}_1}\left(\frac{dV}{dx}\right)^{3/2}. \tag{10}$$

---

1) Strenger ausgedrückt: es muß λ so klein sein, daß die Veränderlichkeit von dV/dx über die Strecke λ vernachlässigt werden kann. Da nun hier gerade die Inhomogenität des Feldes zwischen den Elektroden berücksichtigt wird, folgt daraus die Forderung im Text.

2) Man vgl hierzu: J. J. Thomson, Die Korpuskulartheorie der Materie. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1908. S. 52 u. 53 und J. S. Townsend, a. a. O.

Führt man andrerseits $h = \frac{dV}{dx}$ als neue Variable in (8) ein und integriert wiederum, so findet man

$$\bar{a}_1 \bar{b}_1^{5/2} x = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{\bar{b}_1 h}}{1 - \sqrt{\bar{b}_1 h}} - \sqrt{\bar{b}_1 h}. \tag{11}$$

Setzt man jetzt

$$\sqrt{\bar{b}_1 h} = \sqrt{\bar{b}_1 \frac{dV}{dx}} = z \tag{12}$$

und

$$\frac{1}{2} \lg \frac{1+z}{1-z} - z = \varphi(z), \tag{13}$$

so ergibt sich aus (11) und (10)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\bar{a}_1 \bar{b}_1^{5/2}} \varphi(z), \\ V = \dfrac{1}{\bar{a}_1 \bar{b}_1^{5/2}} \left[\varphi(z) - \dfrac{z^3}{3} \right]. \end{array} \right. \tag{14}$$

Die beiden Gleichungen (14) stellen den gesuchten Zusammenhang zwischen V, i und x mittels der Hilfsveränderlichen z dar, und zwar ergeben sie unmittelbar den Potentialverlauf bei gegebenem Stromwert. Zur Berechnung der Charakteristik bei festem x erhält man aus (14) und (9):

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \dfrac{\bar{a}^2 \bar{b}^3 x^2}{[\varphi(z)]^2}, \\ V = \bar{a}^2 \bar{b}^3 x^3 \dfrac{\varphi(z) - \dfrac{z^3}{3}}{[\varphi(z)]^3}. \end{array} \right. \tag{II}$$

Es zeigt sich also, daß $i/\bar{a}^2 \bar{b}^3 x^2$ universelle Funktion von $V/\bar{a}^2 \bar{b}^3 x^3$ ist[1]) und daraus läßt sich die Druckabhängigkeit der ermittelten Charakteristik ableiten, sobald bekannt ist, wie der Druck in die Konstanten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ eingeht. Nun ist λ umgekehrt proportional dem Druck P, q ist für hinreichend hohe Potentialwerte proportional P (J. S. 147); setzt man also α als vom Druck näherungsweise unabhängig voraus (J. S. 161), so wird auch $\bar{b}$ unabhängig vom Druck und $\bar{a} \infty P^{1/2}$. Folglich ergibt sich dann i/P als für alle Drucke gleiche Funktion von V/P.

1) Man vgl. die analogen Verhältnisse J. S. 150.

Für sehr kleine Werte von i (z näherungsweise = 1) ergibt sich aus (II)

$$i = \frac{\bar{b} V}{x}, \tag{15}$$

d. h. es müßte dann Ohmsches Gesetz gelten und die Leitfähigkeit wäre unabhängig vom Druck. Aber es muß betont werden, daß die Voraussetzung, welche gegenwärtig verfolgt wird (S. 735), schwerlich für niedrige Strom- und Potentialwerte zutrifft. Dagegen werden die Voraussetzungen der Theorie um so genauer erfüllt sein, je größer i ist.

Nun erhält man für große Werte von i, d. h. kleine Werte von b_1, folgende Näherungsformel [am einfachsten, indem man in (10) V als Potenzreihe nach ganzen Potenzen von b_1 ansetzt]:

$$\text{(IIa)} \quad \begin{cases} V = (\bar{a}_2\, i)^{2/3}\, x^{1/3} \{1 - \bar{b}_2\, \bar{a}_2^{2/3}\, i^{-1/3}\, x^{2/3}\}, \\ \bar{a}_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2/3} 12\pi \sqrt{\frac{m}{2e\lambda}}; \quad \bar{b}_2 = \frac{5e^3 q\lambda}{21 m a}. \end{cases}$$

Diese Näherungsformel ist darum von besonderem Interesse, weil sie zeigt, daß für genügend große Stromdichten $V \infty i^{2/3}$ wird, welches auch immer die Werte der Konstanten sein mögen; natürlich wird es aber von den Bedingungen des Versuchs abhängen (P und x), ob die erforderlichen Stromdichten wirklich erreicht werden können. Die Formel (IIa) ist der früheren Formel (Ia) völlig analog gebaut, und die numerische Berechnung zeigt, daß auch im allgemeinen Falle die durch (II) dargestellte Gesetzmäßigkeit der früher betrachteten (I) formal sehr ähnlich ist. Trägt man die Stromdichte als Ordinate gegen $V^{3/2}$ als Abszisse auf, so werden die Charakteristiken Kurven, die nur unbeträchtlich von Geraden abweichen (man vgl. Fig. 1, J. S. 153), die Parameter gehen aber in anderer Weise ein. Macht man die oben (S. 737) ausgesprochenen Annahmen über die Druckabhängigkeit der Konstanten, so zeigt sich, daß die Spannung, die zur Aufrechterhaltung einer bestimmten Stromdichte erforderlich ist, mit dem Drucke zunimmt. Der Koeffizient von $i^{2/3}$ in (IIa) unterscheidet sich von demjenigen in (Ia) durch den Faktor $0{,}727\,(x/\lambda)^{1/3}$; d. h. also die Neigung der Grenzgeraden (oder das Verhältnis $i/V^{3/2}$ für große i) nimmt $\infty 1/P^{1/3}$ ab, während es nach (Ia) unabhängig vom Druck ist.

Nach dem soeben Ausgeführten befindet man sich unter den Annahmen, welche der gegenwärtigen Theorie zugrunde liegen, bereits in demjenigen Druckgebiet, in welchem Druckerhöhung den Stromdurchgang erschwert, während nach den Formeln (I) das Umgekehrte der Fall war. Die Umkehr des Druckeinflusses muß dort erfolgen, wo die mittlere freie Weglänge λ anfängt mit dem Elektrodenabstand x vergleichbar zu werden.

Findet gar keine Ionisation durch Stoß statt, d. h. also, setzt man V kleiner voraus als die Ionisierungsspannung, so hat man das q der Gleichung (5) gleich 0 zu setzen. Dann reduzieren sich die Charakteristiken (I) und (II) auf die ersten Glieder von (Ia) und (IIa); demnach ist die Charakteristik dann unabhängig vom Gasdruck, solange λ größer als x ist [Formel (Ia)], und die Stromdichte für gegebenes V nimmt gegenüber dem Vakuumwert ab, wenn λ beträchtlich kleiner geworden ist als x [Formel (IIa)]. Das ist genau, was Schottky beobachtet hat[1]), allerdings bei zylindrischer Anordnung.

Bisher haben wir die Annahme verfolgt, daß die Geschwindigkeit der Elektronen im elektrischen Felde groß sei gegen ihre thermische Geschwindigkeit; um nun zu untersuchen, welche Abweichungen durch die Berücksichtigung der thermischen Geschwindigkeit zu erwarten sind, wollen wir jetzt die umgekehrte Annahme der Rechnung zugrunde legen.

An die Stelle der Gleichung (2) tritt jetzt

$$i = e n k \frac{dV}{dx}, \tag{2''}$$

wo k die Beweglichkeit der Elektronen ist.

Die Zahl der pro sec und cm³ erzeugten Elektronen ist jetzt nicht mehr proportional i, kann aber proportional n gesetzt werden, so daß wir statt (3) erhalten:

$$\bar{\bar{q}} n - \alpha n p = 0. \tag{3''}$$

Die Größe $\bar{\bar{q}}$ soll als Konstante behandelt werden, die — ebenso wie k — die Molekulargeschwindigkeit enthält. In demjenigen Gebiete, in welchem wirklich die Geschwindigkeit der Elektronen proportional der Feldstärke ist, darf zwar keineswegs $\bar{\bar{q}}$ als unabhängig von dV/dx angesehen werden,

1) W. Schottky, Phys. Zeitschr. 15. S. 625. 1914. Letzter Abschnitt.

da es sich aber hier nur um eine Korrektionsrechnung für den Fall handelt, daß Gleichung (7) aufhört zulässig zu sein, mag immerhin $\bar{\bar{q}}$ als konstant angesehen werden.

Aus (1), (2″) und (3″) gelangen wir zu der folgenden Differentialgleichung für V:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \bar{\bar{a}}_1 \left\{ \left(\frac{dV}{dx}\right)^{-1} - \bar{\bar{b}}_1 \right\}; \tag{16}$$

dabei ist gesetzt:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\bar{a}}_1 = \bar{\bar{a}}\, i\,; & \bar{\bar{a}} = \dfrac{4\pi}{k}\,. \\ \bar{\bar{b}}_1 = \dfrac{\bar{\bar{b}}}{i}\,; & \bar{\bar{b}} = \dfrac{e\,\bar{\bar{q}}\,k}{a}\,. \end{array} \right. \tag{17}$$

Durch ganz analoge Rechnungen wie oben (S. 736 u. 737) gelangt man zu folgender Lösung, wenn

$$\bar{\bar{b}}_1 h = \bar{\bar{b}}_1 \frac{dV}{dx} = \zeta \tag{18}$$

und

$$-\lg(1-\zeta) - \zeta = \psi(\zeta) \tag{19}$$

gesetzt wird:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \dfrac{\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{b}}^2\,x}{\psi(\zeta)}\,, \\ V = \bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{b}}\,x^2\,\dfrac{\psi(\zeta) - \dfrac{\zeta^2}{2}}{[\psi(\zeta)]^2}\,. \end{array} \right. \tag{III}$$

Für kleine Werte von i ergibt sich analog (15):

$$i = \frac{\bar{\bar{b}}\,V}{x} \tag{20}$$

und für große Werte von i:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \bar{\bar{a}}_2^{\,1/3}\, i^{1/3}\, x^{2/3} \{1 - \bar{\bar{a}}_2^{\,1/3}\, \bar{\bar{b}}_2\, x^{1/3}\, i^{-1/3}\}\,; \\ \bar{\bar{a}}_2 = \dfrac{32\pi}{9k}\,; \qquad \bar{\bar{b}}_2 = \dfrac{3\,e\,\bar{\bar{q}}\,k}{8a}\,. \end{array} \right. \tag{IIIa}$$

Für große Werte von i wird also unter den gegenwärtigen Annahmen $i \propto V^2$, und die numerische Berechnung von (III) zeigt, daß die Charakteristiken jetzt einen ähnlichen Verlauf in der i, V^2-Ebene haben, wie die früheren in der $i, V^{3/2}$-Ebene. Als einzige Folgerung, die wir für die vorliegende Untersuchung aus den Formeln (III) bzw. (IIIa) ziehen wollen, ergibt sich also, daß an der Grenze der Gültigkeit von (II) die Strom-

dichten eine Tendenz zeigen werden, stärker als mit der $^3/_2$ten Potenz von V anzusteigen. Außerdem würde eine Temperaturabhängigkeit bemerkbar werden.

Es müssen noch einige Worte über den Gültigkeitsbereich der aufgestellten Theorie gesagt werden. Nach der Seite der niedrigen Drucke ist sie nur durch die Annahme beschränkt, daß λ klein gegen x sein muß. Daher geht auch (IIa) für $\lambda = x$ nicht genau in (Ia) über, sondern unterscheidet sich dann im Hauptgliede noch durch den Faktor 0,727. (Vgl. S. 738.)

Nach der Seite höherer Drucke ist der Gültigkeit unserer Theorie durch die Bedingung $X/P > 1000$ eine Grenze gesetzt. Mit diesem Werte ist aber bereits das Gebiet erreicht, welches durch die Townsendsche Theorie völlig geklärt ist.[1])

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß nach der vorgetragenen Theorie die Stromdichten sich in einem ziemlich beträchtlichen Druckgebiet proportional $V^{3/2}$ ergeben müssen, sofern es nur gelingt — unter Vermeidung von Temperatursättigung der Glühkathode — hinreichende Stromdichten zu erreichen. Es ist also keineswegs gerechtfertigt, wie das auch Hr. Lilienfeld wiederholt betont hat, die Gültigkeit des $^3/_2$-Gesetzes als hinreichendes Kriterium für höchstes Vakuum anzusehen.

Zum Schluß wollen wir noch untersuchen, inwieweit die mitgeteilten Rechnungen zur Deutung der Versuche des Hrn. Lilienfeld beitragen können. Zunächst geht aus dem Gesagten hervor, daß die Gleichungen (II) bzw. (IIa) formal die gemessenen Charakteristiken genau so gut wiedergeben, wie die älteren Gleichungen (I) und (Ia). (Man vgl. J. § 3.) Es ist aber völlig unzulässig, die Formeln (II) heranzuziehen, solange man annimmt, daß die mittlere freie Weglänge durch den Gasdruck bestimmt ist. Da die mittleren freien Weglängen der Elektronen bei einem Druck eines mm Hg bereits von der Größenordnung $1 \cdot \mathrm{cm}^{-1}$ sind[2]), käme man schon bei Drucken von 10^{-3} mm Hg zu Werten von λ, welche die Anwendung der Formeln (II) ausschließen. Andererseits bewirkt

1) Man vgl. J. S. Townsend, a. a. O. Kap. 8.
2) A. Partzsch, Ann. d. Phys. 40. S. 157. 1913.

eine Zunahme des Gasdrucks, wenn $\lambda \infty 1/P$ gesetzt wird, wie oben (S. 738 u. 739) ausgeführt, eine Verminderung der Stromdichte bei konstantem Potential, während in dem von Hrn. Lilienfeld untersuchten Gebiet das Umgekehrte der Fall ist.

Dagegen ist bei der Form der benutzten Entladungsröhren die Annahme nicht von der Hand zu weisen, daß λ im wesentlichen durch die Weite des Rohres (außerdem vielleicht durch die negativen Ladungen selbst) bestimmt ist. Macht man diese Annahme, so wird λ von einem bestimmten Druckwerte abwärts unabhängig vom Druck. Es kann allerdings fraglich erscheinen, ob bei Berücksichtigung des Wandeinflusses unsere Theorie noch anwendbar ist, weil das Problem dann nicht mehr eindimensional ist; aber für die allgemeinen Schlußfolgerungen ist es gleichgültig, welcher Umstand den Wert der freien Weglänge bestimmt.

Bei konstantem λ wird $\bar{a}$ (bzw. $\bar{a}_1$) konstant, und auch $\bar{b}$ (bzw. $\bar{b}_1$) wird unabhängig vom Druck, wenn die sekundären Elektronen im wesentlichen durch Stoß an der Wand erzeugt werden; nur derjenige Teil der Elektronen, welche durch Stoß mit Gasmolekülen entstehen, wird mit zunehmendem Druck $\bar{b}$ vergrößern und so (genau wie nach der Theorie I und im Einklang mit der Beobachtung) den Strom für gegebene Spannung heraufsetzen.

Es erklärt sich also unter diesen Umständen nicht nur die Form der Charakteristik, sondern auch die Existenz einer Grenzcharakteristik, die unabhängig von Druck und Temperatur ist; es erklärt sich ferner die beobachtete Erwärmung der Glaswände. Denn im Gegensatz zu der früheren Theorie wird bei der gegenwärtigen die Hauptmenge der Stromenergie an die Wände abgegeben; die Energie, welche der Anode mitgeteilt wird, wächst nur $\infty \frac{dV}{dx}$ [1]) und wird daher (vgl. J. S. 154) häufig nur wenig vom Anodenabstand abhängen, wie es auch von Hrn. Lilienfeld beobachtet wurde.

---

1) Der Energiestrom pro Querschnitteinheit ist $n v \cdot \frac{m v^2}{2}$, also bei gegebener Stromdichte proportional dV/dx; denn nv ist proportional i [Formel (2)] und v proportional $\sqrt{\frac{dV}{dx}}$ [Formel (7)].

Endlich ergibt sich auch eine Möglichkeit, den Widerspruch zwischen dem beobachteten und errechneten Wert des Quotienten $i/V^{3/2}$ (J. S. 172/173) aufzuklären. Solange angenommen wurde, daß sekundäre Elektronen nur durch Stoß mit Gasmolekeln erzeugt werden können, war es nicht möglich, für b beträchtliche Werte einzusetzen (J. S. 173), weil die Grenzfunktion dann nur für kleine Werte von b erreicht wird, und sich sonst eine Druckabhängigkeit ergeben hätte, welche den Ergebnissen des Experiments widersprochen hätte. Wenn man aber die freie Weglänge durch die Rohrweite bestimmt sein läßt und demgemäß auch Erzeugung sekundärer Kathodenstrahlen an den Wänden zuläßt, wird sich bei abnehmendem Druck schließlich ein Zustand einstellen, bei dem auch die Erzeugung sekundärer Elektronen vom Gasdruck unabhängig wird und dennoch einen beträchtlichen Einfluß haben kann. Rechnerisch bedeutet das, daß $\bar{b}$ als konstant behandelt werden darf, ohne in seiner Größe beschränkt zu sein. Nun fällt $\bar{a}$[1]) um so kleiner aus, je größer man $\bar{b}$ wählt, so daß auf diese Weise ein Weg gegeben ist, den erwähnten Widerspruch zu beseitigen. Es erklärt sich so auch, warum bei solchen Versuchsanordnungen, bei denen die Entladung auf dem Wege zwischen den Elektroden nicht mit Glaswänden in Berührung kommt, der theoretische Wert vollständig[2]) oder doch nahezu vollständig[3]) erreicht wird.

Wenn die ausgesprochene Vermutung richtig ist, muß eine Vergrößerung des Rohrdurchmessers λ heraufsetzen und damit das Potentialgefälle für gegebene Stromdichte vermindert werden.[4]) Auf Grund der Versuche des Hrn. Lilienfeld kann dieser Punkt, wie schon bei früherer Gelegenheit betont wurde (J. S. 173), noch nicht als endgültig geklärt angesehen werden, so daß weitere Messungen in dieser Richtung wünschenswert sind.

---

1) Der Koeffizient $\bar{a}$ unterscheidet sich von dem a der früheren Arbeit nur durch einen numerischen Faktor, wenn λ konstant ist. Vgl. Formel (9) und J. Formel (9).

2) S. Dushman, Phys. Rev. (2.) 4. S. 121. 1914; Phys. Zeitschr. 15. S. 681. 1914.

3) W. Germershausen, Ann. d. Phys. 51. S. 705, 847. 1916.

4) Dieser Einfluß wird um so unbeträchtlicher, je größer $\bar{b}$ ist.

Zusammenfassung.

Die früher gegebene Theorie der Hochvakuumentladung wurde durch Berücksichtigung der Elektronenweglängen nach der Seite höherer Drucke zu weiterentwickelt. Die Stromspannungscharakteristiken, die sich so ergeben, sind den früheren formal sehr ähnlich, insbesondere ergibt sich wieder als Grenzfunktion für hohe Stromdichten eine Proportionalität von i mit $V^{3/2}$; die Druckabhängigkeit ist aber jetzt eine andere. Bei Berücksichtigung der thermischen Geschwindigkeit an der Grenze des Gültigkeitsbereiches ist ein stärkeres Anwachsen der Stromdichte mit der Spannung zu erwarten.

Aus den gegebenen Rechnungen ergibt sich eine Möglichkeit, die Widersprüche zu beseitigen, welche zwischen den Versuchen des Hrn. Lilienfeld und der Theorie des Verfassers bestehen geblieben waren.

Leipzig, im November 1920.

(Eingegangen 17. Dezember 1920.)

5. *Bemerkung zu Hrn. G. Jaffés vorstehender Arbeit: „Zur Theorie der Vakuumentladung“; von J. E. Lilienfeld.*

Die letzten Untersuchungen Hrn. Jaffés veranlassen mich, in kurzen Worten meine Meinung darüber niederzulegen, wie der gegenwärtige Stand der Frage nach einer Ableitung meiner Versuchsergebnisse aus gewohnten Vorstellungen ist.

Bereits in meinen älteren Arbeiten und seither mehrmals wiederholt, ist die Aufmerksamkeit darauf gelenkt worden, daß eines der hervorragendsten Merkmale des von mir untersuchten Entladungsgebildes das Bestehen einer ungeordneten Elektronenbewegung ist, welche einen ganz erheblich höheren Energieumsatz bewirkt, als die geordnete Bewegung des Stromtransportes. Ferner, daß diese ungeordnete Bewegung ursächlich mit dem Vorhandensein positiver Ladungen zusammenhängt. In Hrn. Jaffés erster Arbeit wurde — im direkten Gegensatz zu diesen Merkmalen — die Vorstellung eingeführt, daß keine andere Bewegung außer der geordneten, stromtransportierenden besteht. Dessenungeachtet konnte Hr. Jaffé Formeln errechnen, welche die beobachteten Kurvenformen gut wiedergaben — erklärlicherweise lieferte aber die erste Arbeit Hrn. Jaffés im allgemeinen ein Bild, welches dem tatsächlichen Sachbestand in mancher Hinsicht widersprach.

In der vorstehenden zweiten Arbeit strebt Hr. Jaffé es an, das Vorhandensein der ungeordneten Elektronenbewegung in seine Betrachtungen einzubeziehen. Auch von ihm wird diese Bewegung in ursächlichen Zusammenhang mit dem Bestehen positiver Ladungen gebracht. Und zwar geht Hr. Jaffé ursprünglich von der Annahme aus, daß die Ursache des ungeordneten Zustandes im *Volumen* der Strombahn liege und

durch die Stoßionisation der Gasreste gegeben sei.[1]) Diese letztere physikalische Vorstellung wird aber von Hrn. Jaffé bei der Diskussion seiner Rechnungsergebnisse — sofern das von mir untersuchte Druckgebiet in Betracht kommt — als unhaltbar erkannt und verlassen.[2])

Nun meint aber Hr. Jaffé, die von ihm errechneten Formeln hätten einen weiteren Gültigkeitsbereich als die physikalische Vorstellung, die den Ansätzen zugrunde lag. Und zwar daß die Formeln Gültigkeit haben für eine jede Entladungsform, welche eine ungeordnete Bewegung mit sich führt. Es sei deshalb zuläßig, nachdem die Formeln einmal da seien, eine völlig abweichende physikalische Vorstellung einzuführen. Als solche wird nicht — was ja an sich möglich wäre — die von mir seit Jahren wiederholt in Vorschlag gebrachte herangezogen, nämlich die Annahme eines neuartigen Dissoziationsvorganges im Volumen der Entladungsbahn. Es wird vielmehr in kurzen Worten — freilich zunächst nur als Möglichkeit — erwähnt, daß die ungeordnete Bewegung ursächlich dadurch bedingt sei, daß die mittlere freie Weglänge der Elektronen im wesentlichen durch die Rohrweite gegeben ist. Soweit ich es verstehe, liegt der Vorstellung der Elektronenstoß gegen die Glaswand und die Bildung sekundärer Elektronen unter gleichzeitigem Entstehen positiver Ladungen zugrunde, wogegen irgendwelche ionisationsähnliche Vorgänge im Volumen quantitativ nicht ins Gewicht fallen sollen.

Die Erteilung der Rolle eines Trägers oder Vermittlers der Stoßionisation an die Begrenzung der Entladungsbahn hat augenscheinlich den Vorzug, die von mir experimentell ge-

---

1) Die Rechnung wird unter der Annahme durchgeführt, daß die Geschwindigkeit der Elektronen im Felde groß gegen die thermische sei. Es scheint mir keineswegs erwiesen zu sein, daß dies für mein Entladungsgebilde zutrifft. Die Erörterung hierüber mag aber bis zur Ausführung einer von mir beabsichtigten experimentellen Untersuchung zurückgestellt bleiben.

2) Wesensgleiche Überlegungen führten mich bereits vor mehr als zehn Jahren zu der gleichen Schlußfolgerung: ich meinte damals, daß selbst unter der Berücksichtigung der Bildung mehrwertiger Ionen und der Zunahme ihres Aktionsradius bei den geringsten erreichbaren Gasdichten von der Stoßionisation bei Erklärung der Erscheinungen unbedingt abzusehen sei.

fundene Unabhängigkeit der Erscheinungen von der Gasdichte verständlich zu machen. Solch ein entscheidender Einfluß der Raumbegrenzung ist aber meiner Ansicht nach *nur unter ganz besonderen Annahmen* über die Eigenart der Glaswand geeignet, die tatsächlich ganz hervorragende Stabilität meiner Entladungsform gedanklich ableitbar zu machen. Werden besondere Annahmen nicht getroffen, dann wird wohl eine jede geordnetere Entladungsform wahrscheinlicher und stabiler sein jeder anderen gegenüber, bei welcher die ungeordnete Bewegung in höherem Maße überwiegt. Es wird also letzten Endes ein geradlinig von Kathode zur Anode durchgehendes Kathodenstrahlbündel als die stabilste aller Entladungsformen bestehen bleiben. In der Tat bildet sich stets an der Übergangsstelle in die zylindrische Entladungsbahn ein Striktionskathodenstrahl, dessen geordnete Bewegung sonderbarerweise sich im weiteren Verlaufe verliert. Fraglos ist ein physikalischer Grund für eine derartige Bevorzugung ungeordneter Bewegungen vom Gesichtspunkte der ausschlaggebenden Rolle der Glaswand nicht ohne Einführung besonderer Voraussetzungen einzusehen.

Es müßte also erst untersucht werden, ob unter Einführung *besonderer Annahmen* über das Verhalten der Glaswände dem Elektronenstoß gegenüber — und welcher? — eine einwandfreie Ableitung sämtlicher charakteristischer Merkmale der Erscheinung möglich ist. Abhängigkeit der Charakteristik von der Glasart — z. B. ob Quarz oder Bleiglas — stünde zu erwarten. Es wäre also nicht lediglich Gedankenarbeit, sondern auch eine experimentelle, das *tatsächliche Vorhandensein* der anzunehmenden Eigenschaften beweisende Untersuchung unbedingt erforderlich.

Es erscheint mir deshalb von Wert, auch an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß die Heranziehung der Eigenschaften des Isolators für die Erklärung verschiedener Erscheinungen der Hochvakuumentladung von mir seit dem Jahre 1914 angebahnt wurde.[1]) Ein besonders bemerkenswertes Experiment wurde in meinem in diesen Annalen 1920 abgedruckten Aufsatze mitgeteilt. Diesen Gedankengängen zufolge verhalten

1) Vgl. mein Sammelreferat, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Bd. 16. Heft 2. S. 140–152.

sich die Isolatoren dem Elektronenstoß gegenüber anders als Metalle. Während letztere, wenn sie isoliert sind, sich auf das volle Gegenpotential der auftreffenden Elektronen aufladen und von nun an einer Erwärmung durch Elektronenstoß nicht mehr unterliegen, gelingt es, Isolatoren dauernd mit Elektronen zu bewerfen und auf hohe Temperaturen zu erhitzen. Geklärt ist aber nicht, ob dieses Verhalten eine sekundäre Folge anderer primärer Vorgänge oder recht eigentlich auf eine Eigenschaft des Isolators zurückzuführen ist. Noch viel weniger sichergestellt dürfte es aber sein, ob ein getreues Bild der von mir seit mehr als einem Jahrzehnt beobachteten Erscheinungen aufgebaut werden kann auf einer experimentell sich begründen lassenden Annahme über das Wesen des Isolators.

Wenn auch vom Gesichtspunkte der physikalischen Vorstellung aus gesehen die Gedanken, welche ich mir über meine Versuche machte, grundverschieden von denen Hrn. Jaffés sind, so besteht zwischen beiden hinsichtlich der für die mathematische Ableitung gegebenen Grundlage Verwandtschaft, sofern in beiden Fällen Auftreten positiver Ladungen und ungeordnete Bewegung vorausgesetzt wird. Diese Verwandtschaft bedingt es erklärlicherweise, daß die errechneten Beziehungen vielfach mit beiden Vorstellungen vereinbar sind — nach Hrn. Jaffés Meinung auch mit meinen Meßergebnissen innerhalb der gegenwärtigen Fehlergrenzen. Fragt man nach einem Experiment, welches die Entscheidung fällen könnte, so kommt in erster Linie eine erhebliche Verfeinerung derjenigen Messungen in Frage, welche mich dahin führten, den Satz aufzustellen, daß die Erscheinungen lediglich Funktion der Stromdichte sind, einen Satz, welcher sich mit Hrn. Jaffés Grundvorstellung nicht vereinbaren läßt, derzufolge die Glaswände eine ausschlaggebende Rolle spielen sollen. Gleichfalls würde eine Verfeinerung der Messung des Potentialgefälles längs der Rohrachse, besonders aber Ausdehnung des Meßbereiches auf die nähere Umgebung der Kathode — gleichbleibenden zylindrischen Querschnitt vorausgesetzt — unter Umständen[1]) einen entschei-

1) Würde dabei Linearität des Gefälles beobachtet werden, so wäre Hrn. Jaffés Annahme widerlegt. Im entgegengesetzten Falle würde freilich eine Entscheidung zwischen beiden Vorstellungen sich nicht ergeben.

denden Versuch liefern, dessen Durchführung freilich recht mühevoll und kostspielig würde. Möglicherweise würden auch die Schwierigkeiten, denen Hr. Jaffé bei der Erzielung einer Übereinstimmung in der Berechnung einer seiner grundlegenden Größen für mein Druckgebiet begegnet — umfangreicheres experimentelles Material vorausgesetzt — zur Entscheidung der Frage beitragen. Auch noch anders geartete experimentelle Untersuchungen dürften zu dem gleichen Ziele führen, und ich habe die Absicht, nach Erledigung laufender Verpflichtungen wiederholt auf den Gegenstand einzugehen.

Demnach ist der Zweck dieser meiner Bemerkungen nicht der, eine unmittelbare Folge von Erörterungen anzubahnen. Meine Absicht ist vielmehr vorläufig, es zu betonen, daß durch die Arbeiten Hrn. Jaffés zwar — in Übereinstimmung mit meinen eigenen Gedanken — sichergestellt ist, daß keinesfalls die Stoßionisationsvorgänge gewöhnlicher Art im Volumen für die Erscheinungen verantwortlich gemacht werden können, daß andererseits aber meines Dafürhaltens eine einheitlich zusammenhängende Ableitung der Tatsachen ohne Einführung dem derzeitigen Bestande der Physik fremder Voraussetzungen nach wie vor *nicht* für gegeben gelten darf.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität,
11. Dezember 1920.

(Eingegangen 17. Dezember 1920.)

6. *Die lichtelektrische Wirkung unterteilter Lichtquanten;* *von C. Ramsauer.*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

Ausgangsvorstellungen[1]):

a) Die einzelnen Lichtquanten sind kohärente Wellenzüge von geringem Querschnitt.[2])

b) Das Verhalten der einzelnen Lichtquanten gegenüber äußeren Beeinflussungen muß derart sein, daß die Befolgung der optischen Gesetze durch den ganzen Lichtstrahl erklärlich wird.

c) Der lichtelektrische Effekt besteht in der Umsetzung eines Lichtquants in die entsprechende Elektronenenergie durch den Atommechanismus.

1. *Die Unterteilung der Lichtquanten durch zweimalige Polarisation.* — Trifft ein Strahl natürlichen Lichtes auf einen Kalkspat, so wird er in zwei senkrecht zueinander schwingende

1) Diese Vorstellungen sind durchaus nicht zwingend; man muß aber nach unserer Ansicht bei der experimentellen Bearbeitung des Quantenproblems den Mut haben, eine bestimmte *Anschauung* zugrunde zu legen. Lehnt man die räumliche Lokalisierung des Lichtquants überhaupt ab oder nimmt man sie im Gegenteil als absolut unzerstörbar an, so erhalten die hier gegebenen Versuchsresultate eine durchaus andere Deutung und müßten daher auch unter eine *ganz andere Überschrift* gebracht werden. *Rein experimentell* bestehen sie lediglich in der Feststellung, daß der lichtelektrische Effekt eines Strahles durch die zweimalige Passierung eines Polarisators nicht geändert wird.

2) Vgl. H. A. Lorentz, Physik. Zeitschr. **11.** S. 353. 1910, sowie P. Lenard u. W. Hausser, Heidelberger Akad. 1913, A 19, S. 34, Anm. 61 (Interferenzversuche an abklingenden Phosphoren, bei deren schwacher Lichtstärke nur die Wellenzüge von Einzelquanten als mit sich selbst interferierend in Betracht kommen). Auch die Ergebnisse W. Wiens (Ann. d. Phys. **60.** S. 597. 1919) über die Leuchtdauer der Atome legen die Auffassung des ausgesandten Lichtquants als eines kohärenten Wellenzuges nahe. — Ferner A. Einstein, Phys. Zeitschr. **18.** S. 121. 1917 (theoretischer Nachweis einer bestimmten Ausstrahlungsrichtung des Quants auf Grund von Impulsbetrachtungen).

Strahlen von untereinander gleicher Energie zerlegt. Dieser Vorgang kann im Sinne der Quantentheorie in doppelter Weise gedeutet werden: Entweder bleibt jedes Quant als Ganzes erhalten und paßt sich derjenigen der beiden Schwingungsebenen an, mit welcher seine eigene Schwingungsebene den kleineren Winkel bildet, oder jedes Quant wird nach der klassischen Auffassung in zwei Anteile $(h \cdot \nu) \cdot \cos^2 \gamma + (h \cdot \nu) \sin^2 \gamma$ zerlegt, wo γ den Winkel der Schwingungsebene des Quants mit dem Hauptschnitt bedeutet.

Wir lassen nun einen der beiden Strahlen auf einen *zweiten* entsprechend orientierten Kalkspat fallen. Im letzteren der obigen beiden Fälle würde sich die Unterteilung nach derselben Gesetzmäßigkeit fortsetzen. Aber auch bei der ersten Annahme müßten wir *jetzt* zu einer Unterteilung gelangen. Denn bei der Gleichheit aller Schwingungsrichtungen kann die erfahrungsgemäße weitere Teilung in die beiden Schwingungsmöglichkeiten des zweiten Kalkspats nach den Anteilen $\cos^2 \gamma' + \sin^2 \gamma'$ jetzt nicht mehr durch Anpassung der ungeteilt bleibenden Lichtquanten an die beiden Schwingungsebenen, sondern nur noch durch wirkliche Teilung der Einzelenergien nach Maßgabe der genannten Anteile erfolgen. Benutzt man also schließlich nur den einen der beiden durch den zweiten Kalkspat gelangten Strahlen, so stellt dieser jedenfalls ein Bündel unterteilter Lichtquanten dar.

Die im folgenden benutzte Versuchsanordnung war verschieden, je nachdem es sich um ultraviolettes oder sichtbares Licht handelt. Im ersten Falle (Versuche unter 3; Fig. 1) wurde das natürliche Licht zuerst durch Reflexion an einer Quarzfläche polarisiert und dann mittels eines Kalkspats in einen ordentlichen und einen außerordentlichen Strahl zerlegt, von denen nur der ordentliche Strahl benutzt wurde. Im zweiten Falle (Versuche unter 4) wurde das natürliche Licht zuerst an einem Spiegel aus schwarzem Glase polarisiert und fiel dann auf ein achromatisiertes Kalkspatprisma, welches nur den außerordentlichen Strahl zur Benutzung gelangen läßt.

Bezeichnet man in beiden Fällen den Winkel zwischen den Polarisationsebenen der spiegelnden Fläche und des benutzten Kalkspatstrahles mit α, und sieht man von einer etwaigen Unterteilung der Quanten bei der Polarisation am Spiegel ab, so besteht der für eine bestimmte Winkelstellung des zweiten

Polarisators erhaltene Teilstrahl aus Quantenstücken von der Größe $(h \cdot \nu) \cdot \cos^2 \alpha$. Für den Fall, daß auch schon am Spiegel eine Quantenunterteilung eintritt (was bei dem Verhalten des Lichtquants am zweiten Polarisator das Wahrscheinlichere ist), würde dieser Ausdruck die obere Grenze des Quantenbruchteiles bedeuten; der einfacheren Darstellung wegen wollen wir im folgenden aber lediglich die sichere Unterteilung auf $(h \cdot \nu) \cdot \cos^2 \alpha$ am zweiten Polarisator in Rechnung setzen.

2. *Die möglichen Einflüsse der Quantenunterteilung auf den lichtelektrischen Effekt.* — Faßt man den lichtelektrischen Effekt in dem Sinne als quantenhaft auf, daß das Atom die Energie eines von außen kommenden Lichtquantes $h \cdot \nu$ in die Elektronenenergie $\varepsilon \cdot P$ umsetzt, von welch letzterer ein Teil zur Überwindung der gesamten Abtrennungsarbeiten verwandt wird, und der Rest als äußere Energie zur Erscheinung kommt, so muß die Unterteilung, z. B. Halbierung des Lichtquants, diese Erscheinung völlig ändern. Denn diese Halbierung bedeutet ja ihrer Wirkung nach das gleiche wie eine Verdoppelung der Lichtwellenlänge. Dies müßte sich auf die äußerlich meßbaren Grundvorgänge des lichtelektrischen Effekts, die Geschwindigkeitsverteilung und die Gesamtelektronenmenge auf das deutlichste zeigen. Die Geschwindigkeitsverteilung würde dieselbe Form annehmen wie bei Verdoppelung der Wellenlänge, die Elektronenmenge würde sich geradeso ändern, wie bei gleichzeitiger Halbierung der Energie und Verdoppelung der Wellenlänge, würde also nicht proportional der verminderten Energie, sondern nach einer speziellen lichtelektrischen Funktion, im allgemeinen sehr schnell, abnehmen. Dieser Überlegung nach zerfallen die folgenden Versuche in zwei Gruppen: die Untersuchung der Geschwindigkeitsverteilung und die Untersuchung der Elektronenmenge als Funktion des Winkels α.

3. *Die Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung von der Unterteilung der Lichtquanten.* — In der Versuchsanordnung der Fig. 1 sind:

Hg eine Quarzquecksilberlampe mittlerer Stärke,

B_1 eine Blende von etwa 4×1 mm Öffnung (Längsdimension senkrecht zur Zeichenebene),

S ein Schieber, durch welchen einen bestimmten Zeitbetrag hindurch, z. B. 30 Sekunden, der Lichtweg freigegeben wird,

$L_1 L_2$ zwei Quarzlinsen von zusammen etwa 18 cm Brennweite für 250 $\mu\mu$ und 9 cm Durchmesser,

P ein Quarzprisma, dessen Außenfläche (6 × 7 cm) als Polarisatorspiegel mit dem Einfallswinkel 58° entsprechend 250 $\mu\mu$ benutzt wird,

K ein natürliches Kalkspatstück[1]) von 3,3 cm Dicke, welches um die Strahlrichtung als Achse drehbar ist; gemessener Drehungswinkel α im obigen Sinne,

o u. e der ordentliche bzw. außerordentliche Strahl,

Q eine senkrecht zur Achse geschliffene, das Vakuum abschließende Quarzplatte,

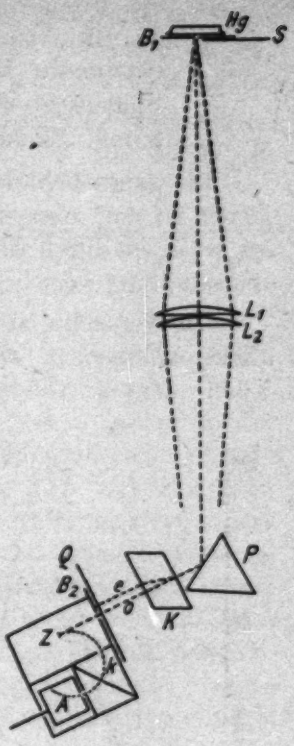


Fig. 1.

B_2 eine Blende, welche so groß bemessen ist (elliptisch; 5 : 2,5 mm), daß die Stärke des Blendenbildes auf Z möglichst wenig vermindert wird, daß aber das außerordentliche Bild auch in seinen äußersten Randteilen möglichst abgehalten wird,

Z ein 1 mm breiter, 9,5 mm hoher Zinkstreifen (senkrecht zur Zeichenebene), auf dessen Mitte das ordentliche Bild fällt,

A der zum Elektrometer geleitete Auffangekäfig,

---

1) Das besonders durchlässige und ungewöhnlich glatt gespaltene Stück wurde mir von Hrn. Geheimrat Goldschmidt, Heidelberg, in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt, wofür ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen möchte.

k die durch Blenden festgelegte Kreisbahn, auf welcher die Elektronen bestimmter Geschwindigkeit durch das bestimmte Magnetfeld eines hier nicht gezeichneten Spulensystems nach A gelenkt werden (Radius von k 8 mm, Blendenbreite 1 mm).

Die ganze lichtelektrische Anordnung, welche hier im Vergleich zu den übrigen Teilen etwa 4 mal zu groß gezeichnet ist, ist in ein durch Diffusionspumpe evakuierbares, mit Kohlensäurekühlung versehenes Rohr eingeschlossen.

Die Versuche bestehen darin, daß die nach A gelangenden Elektronenmengen als Funktion des Magnetfeldes d. h. der Elektronengeschwindigkeiten, aufgenommen werden.[1])

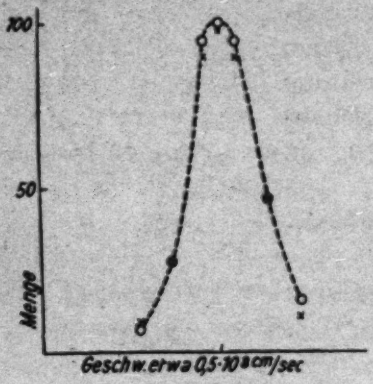


Fig. 2.

Fig. 2 zeigt die gefundenen Verteilungskurven für $\sphericalangle a = 0^0$ bei 30″ Belichtung (⊙⊙) bzw. für $\sphericalangle a = 60^0$ bei 120″ Belichtung (× ×); der bereits in Abzug gebrachte Wert für falsches Licht betrug in beiden Fällen etwa 3 Proz. der Maximalordinate. Wie man sieht, ergibt sich eine *völlige Identität* der beiden Kurvenformen und ein Mengenverhältnis von rund $1 : 1/4$ bei Berücksichtigung der verschiedenen Belichtungszeiten.

Genau dasselbe Resultat ergab der analoge Versuch für $\sphericalangle a = 45^0$. Ebenso zeigten sich keine Änderungen der Verteilungskurve, wenn die Polarisation nur mittels Spiegelung oder nur mittels Kalkspats erfolgte, oder wenn völlig unpolarisiertes Licht benutzt wurde, bis auf eine eben merkliche Verschiebung des Maximums bei Einschaltung des Kalkspats nach geringeren Geschwindigkeiten, wie sie sich ohne weiteres durch die nach kürzeren Wellen wachsende Absorption des dicken Kalkspats erklärt. Durch besondere Kontrollmessungen

1) Näheres vgl. C. Ramsauer, Über eine direkte magnetische Methode zur Bestimmung der lichtelektrischen Geschwindigkeitsverteilung. Ann. d. Phys. 45. S. 961. 1914.

(3 um je 45° gegeneinander verdrehte Versuche) wurde übrigens noch festgestellt, daß die Orientierung der Schwingungsebene zu den Schmiergelriefen des Zinkstreifens keinerlei Rolle spielt.

Die folgende Tabelle zeigt die Abhängigkeit der absoluten Maximalordinaten der Verteilungskurven von der Größe des Winkels α:

$\sphericalangle\ \alpha°$	0	15	30	45	60	75	90
$100 \cdot \cos^2 \alpha$	100	93,3	75	50	25	6,7	0
Elektronenmenge	100	93,4	78,7	46,7	22,4	9,9	5,3

Die Zahlenreihe folgt bis über 60° hinaus innerhalb der Versuchsfehler den theoretischen Werten, während sich erst zum Schluß falsches Licht bemerkbar macht. Letzteres wird in der Hauptsache durch die nicht völlige Abhaltung des außerordentlichen Strahles für die ungünstigsten Winkelstellungen, bei welchen die beiden Bilder in der Längsrichtung aneinanderstoßen, zum wesentlich kleineren Teile durch die nicht vollständige Polarisation an der Quarzebene infolge der verschiedenen Strahlenrichtungen und Wellenlängen bedingt, beides Fehler, welche bei dem hohen Energiebedarf der Methode nicht vermieden werden können.

Ergebnis:

a) Die Geschwindigkeitsverteilung bleibt genau die gleiche bei Unterteilung der Lichtquanten auf $^1/_2$ und $^1/_4$, während nach dem obigen Standpunkt bereits die Unterteilung auf $^1/_2$ die Verteilungskurve für 250 $\mu\mu$ zur Verteilungskurve für 500 $\mu\mu$ machen müßte; da der Schwellenwert bei etwa 360 $\mu\mu$ liegt, müßte jede äußere Geschwindigkeitsverteilung verschwinden.

b) Die absoluten Mengen der maximal vertretenen Geschwindigkeiten und damit die ihnen proportionalen absoluten Mengen aller senkrecht zu Z ausgesandten Elektronen sinken innerhalb der Meßgenauigkeit lediglich entsprechend dem Faktor $\cos^2 \alpha$, während sie bei obigem Standpunkt schon bei $\alpha = 34°$ auf Null gesunken sein müßten, da bei dieser Winkelstellung der Energieinhalt der ursprünglichen 250 $\mu\mu$-Quanten den Energieinhalt der 360 $\mu\mu$-Quanten, d. h. den Schwellenwert, erreicht haben würde.

4. *Die Abhängigkeit der Elektronenmengen von der Unterteilung der Lichtquanten.* Diese Frage ist in dem letzten Versuche schon behandelt, läßt sich aber für die größten Werte von a, d. h. für die weitgehendste Unterteilung der Lichtquanten, dort nicht mehr durchführen. Diese Verhältnisse liegen weit günstiger bei der entsprechenden Benutzung einer Kaliumnatriumzelle.

Die Versuchsanordnung ist der der Fig. 1 sehr ähnlich. An Stelle von B_1 tritt eine kreisförmige Blende von 3,3 mm Durchmesser, an Stelle von $L_1 L_2$ ein photographisches Objektiv von rund 30 cm Brennweite, an Stelle von P eine schwarze Glasfläche, an Stelle von K das achromatisierte Kalkspatprisma, an Stelle von Z und A die mit einem Einfadenelektrometer verbundene Zelle. Die Zelle ist jetzt etwa 2 m vom 2. Polarisator entfernt, trägt außerdem selbst (an Stelle von S) den Lichtverschluß. Bei Versuchen mit monochromatischem Licht einer Quecksilberlampe wurden entsprechende

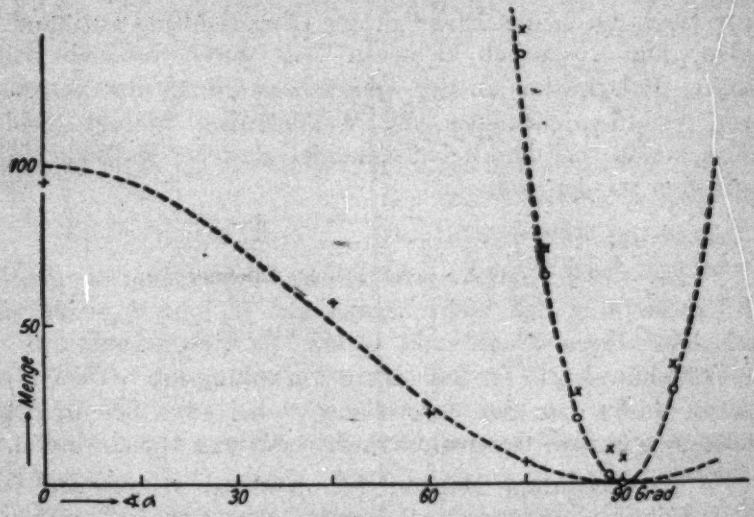


Fig. 3.

Farbfilter am Objektiv eingeschaltet. Der Strahlengang hinter dem Objektiv ist nahezu parallel, kann jedoch zur Abschwächung der Helligkeit durch eine hinter dem zweiten Polarisator eingeschaltete Linse nach Belieben zerstreut werden.

Fig. 3 zeigt die Ergebnisse für die violette Hg-Linie (436 $\mu\mu$). Die ++ entsprechen hierbei der geringsten noch

meßbaren Lichtintensität, wobei die Größenordnung des kleinsten zur Messung gelangenden Stromes $1 \cdot 10^{-14}$ Wb beträgt. Die $\times\times$ sind bei solcher Lichtstärke aufgenommen, daß die kleinsten Werte (bei 90°) noch eben quantitativ bestimmbar waren. Die 90°-Abszisse ist hierbei durch einen Kontrollpunkt auf dem wiederaufsteigenden Kurvenast besonders festgelegt. Die gestrichelten Kurven entsprechen dem Schwächungsfaktor $\cos^2 \alpha$, wobei für die erste Kurve $\cos^2 0^0$, für die zweite Kurve $\cos^2 75^0$ auf 100 gelegt ist.

Die $++$ entsprechen innerhalb der Versuchsfehler dem Verlauf von $\cos^2 \alpha$, die $\times\times$ liegen alle etwas zu hoch, passen sich aber bis zu den kleinsten Werten herab der Kurve völlig an, wenn man den Wert für 90° als durch falsches Licht bedingt, überall abzieht (vgl. ⊙⊙). Je nachdem man den Verlauf der experimentell gefundenen Kurve (⊙⊙) bis rund 82°, 84° oder 88° als einwandfrei mit der $\cos^2 \alpha$-Kurve zusammenfallend ansieht, erhält man eine Unterteilung der Lichtquanten auf rund $^1/_{50}$, $^1/_{100}$ oder $^1/_{1000}$. — Die analogen Versuche für schwächstes grünes Hg-Licht (546 $\mu\mu$) geben dasselbe Resultat wie die $++$-Punkte der Violettkurve.

Endlich wurden die Versuche noch auf schwächstes *kontinuierliches weißes* Licht einer Glühfadenlampe ausgedehnt; das Ergebnis zweier Versuchsreihen ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$\sphericalangle\ \alpha$	$100 \cdot \cos^2 \alpha$	Elektronenmengen	
0°	100	100	100
45°	50	50,0	51,9
60°	25	23,1	27,8

Auch hier besteht also völlige Übereinstimmung mit der $\cos^2 \alpha$-Reihe.

Ergebnis:

Die Verringerung der lichtelektrisch ausgelösten Elektronenmengen erfolgt bis zu weitgehendster Unterteilung der Lichtquanten lediglich nach Maßgabe der verringerten Gesamtenergie entsprechend $\cos^2 \alpha$, nicht aber nach dem viel steileren Abfall, wie er sich aus der obigen Auffassung des lichtelektrischen Effektes als einer durch die Größe des ankommenden Lichtquantes bedingten Erscheinung ergeben würde.

5. *Folgerungen.* — Faßt man nach wie vor den lichtelektrischen Effekt als quantenhaft auf, wie es bei der Gesamtheit der zurzeit vorliegenden Kenntnisse als unvermeidlich erscheint, so beruht nach den gefundenen Ergebnissen diese Grundeigenschaft nicht auf der Quantenhaftigkeit der *ankommenden Lichtenergie*, sondern auf dem quantenhaften Arbeiten des die Energie aufnehmenden *Atommechanismus*. *Das Atom summiert die Energien der in seinen Wirkungsbereich*[1]) *kommenden Lichtwellen bis zu dem Betrage des der Schwingungszahl entsprechenden Quants, einerlei, ob das aus dem emittierenden Atom stammende Lichtquant als Ganzes ankommt oder ob nacheinander eine entsprechende Anzahl kleinster Quantenbruchteile eintreffen.* Die Fähigkeit des Atoms, Lichtenergie zeitlich zu summieren bzw. aus einem verhältnismäßig großen Raumbereich in sich einzusaugen, erstreckt sich hierbei jedenfalls sehr weit, da sonst die Unveränderlichkeit des lichtelektrischen Effektes trotz stärkster Unterteilung der Quanten und trotz schwächster Bestrahlung mit kontinuierlichem weißen Licht, bei welchem sich die Summierung nur auf Quantenbruchteile gleicher Schwingungszahl erstrecken kann, nicht verständlich sein würde.[2])

Heidelberg, im Oktober 1920.

---

1) Der Wirkungsbereich des Atoms kann, wie die Metallatome der Phosphore zeigen, wesentlich größere Werte annehmen, als der gewöhnlichen Atomgröße entspricht (P. Lenard, Heidelberger Akad. 1912, A 5, S. 41 f.). Das gleiche läßt sich aus den Woodschen Versuchen über die äußerst große Absorption der Hg-Linie 253,6 in dünnstem Hg-Dampf schließen (Phil. Mag. **23**. S. 689. 1912).

2) Bei diesem Ergebnis wird es übrigens zweifelhaft, ob es überhaupt zweckmäßig ist, die hier zugrunde gelegten Ausgangsvorstellungen über die räumliche Begrenzung des Lichtquants beizubehalten, da selbst bei dieser Annahme die Quantenhaftigkeit des lichtelektrischen Effekts sich als eine Eigenschaft des Atommechanismus erweist und damit der Hauptgrund zur Lokalisierung der Lichtquanten in Fortfall kommt. Dieser Schluß verliert nur dann seine Bedeutung, wenn man die Lichtquanten als absolut unteilbar voraussetzt, womit aber zugleich die Verpflichtung gegeben wäre, die Geltung der klassischen Optik, speziell die hier benutzte Unterteilung der Lichtenergie durch zwei Polarisatoren, unter dieser Voraussetzung begreiflich zu machen.

(Eingegangen 12. November 1920.)

7. *Über eine neue Methode der Erzeugung elektromagnetischer ungedämpfter Schwingungen, welche in der Verwendung der elektrostatischen oder magnetischen Eigenschaften der Kathodenstrahlen zu schnellsten Stromunterbrechungen besteht;*

von Al. Nasaritschwily.

Eine Braunsche Röhre hat in K als Elektronenquelle die Glühkathode in Form, welche ihnen Hr. Samson gegeben hat.[1]) An dem entgegengesetzten Ende an Stelle des fluoreszierenden Schirmes befindet sich die Anode (Scheibe nur von 8 mm Breite).

In 5 cm Entfernung vor der Kathode sitzt ein Metallschirm mit einer Durchbohrung von 1,5 mm. „Die Spule D konzentriert die noch nicht völlig parallelen Strahlen" (nach Samson). Die negative Klemme der Anodenbatterie (1800 bis 3500 Volt) ist an die Kathode angeschlossen und die positive Klemme ist durch die Entwicklung des Transformators T mit der Anode verbunden. Die Zweitwicklung ist entweder mit dem Ablenkungskondensator oder mit den ablenkenden Spulen verbunden (Figg. 1 u. 2). Ist die Kathode zum Glühen

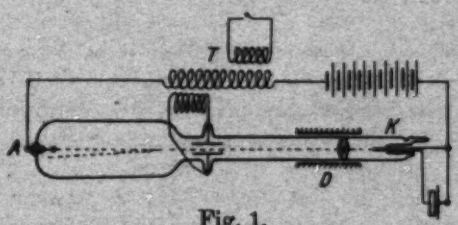


Fig. 1.

gebracht, so geht durch die Röhre ein Strom durch (0,3 bis 9,7 Milliamp.), welcher in der Zweitwicklung einen sekundären Strom induziert.

1) C. Samson, Ann. d. Phys. 55. S. 610. 1918.

In beiden Fällen werden die weichen Kathodenstrahlen momentan (in viel weniger als einer billionstel Sekunde) abgelenkt und der Stromkreis wird unterbrochen. In demselben

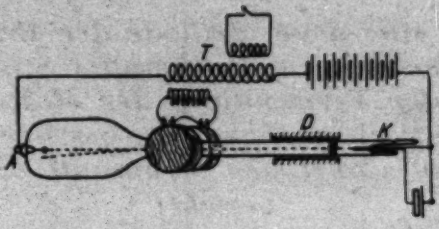


Fig. 2.

Augenblick verlaufen die Kathodenstrahlen wieder geradlinig, d. h. können wieder auf die Anode zurückfallen und der Vorgang beginnt von Neuem. Auf diese Weise gelingt es, hochfrequente Schwingungen zu erzeugen; die ganze Einrichtung kann in ihrer Wirkung mit dem Neefschen Unterbrecher verglichen werden. Der Verf. hat diesen Apparat mit großem Erfolg für den Überlagerungsempfang in drahtloser Telegraphie verwendet.

(Eingegangen 8. Januar 1921.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Arthur Pfeiffer, W[illegible]

Werkstätten für Präzisionsmechanik [illegible]

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen

und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D. R. P.

System [illegible], D. R. P. angemeldet

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neu-konstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter a. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.

Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene

Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle [illegible]